S, T insiemi

$f: (S \times T, G)$ una corrispondenza di S in T

f è un'applicazione di dominio S e codominio T $(f: S \to T)$

se $\forall x \in S \ \exists! \ (x, y) \in G$ che ha come prima coordinata x.

IMMAGINE DI X MEDIANTE f

$f: S \to T$

$X \subseteq S$

$f(X) = \{ f(x) : x \in X \} \subseteq T$

$\downarrow$

immagine di X mediante f

ANTI IMMAGINE DI Y MEDIANTE f

$f: S \to T$

$Y \subseteq T$

$f^{-1}(Y) = \{ x \in S \text{ t.c. } f(x) \in Y \} \subseteq S$

$\downarrow$

antiimmagine di Y mediante f

Esercizio

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $X = \{-1, -3, 4\}$

$x \to x^2$

$f(X) = ?$

$f(X) = \{ f(x) \text{ t.c. } x \in \{-1, -3, 4\} \} = \{ x^2 \text{ t.c. } x \in \{-1, -3, 4\} \} =$

$\{1, 9, 16\}$

Esercizio

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$$
$$x \to |x|$$

$X = \{-1, -3, 4, 5, -\frac{7}{4}\}$

$f^{-1}(X) = ?$

$f^{-1}(X) = \{x \in \mathbb{Z} \text{ te } f(x) \in \{-1, -3, 4, 5, -\frac{7}{4}\}\} = \{x \in \mathbb{Z} \text{ te } |x| = -1 \text{ o } |x| = -3 \text{ o } |x| = 4 \text{ o } |x| = 5 \text{ o } |x| = -\frac{7}{4}\} = \{-4, 4, -5, 5\}$

FUNZIONE INIETTIVA

$f: S \to T$

f iniettiva $\Leftrightarrow (\forall x, y \in S \; x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)) \Leftrightarrow$
$(\forall x, y \in S \; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

Esercizio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva?
$x \to 3x+5$

Siano x e $y \in \mathbb{R}$ te $\underline{f(x) = f(y)} \Rightarrow 3x+5 = 3y+5 \Rightarrow$

$3x = 3y \Rightarrow \underline{x = y} \Rightarrow f$ iniettiva

FUNZIONE SURIETTIVA

$f: S \to T$

f e' suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T \; \exists x \in S$ te $f(x) = y$
(ogni elemento del codominio e' immagine di almeno un elemento del dominio)

Esercizio

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è suriettiva?
$x \to x^2$

f è suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z}$ tc $f(x) = y \Leftrightarrow$
$\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z}$ tc $y = x^2$ ($\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$)

non è vero che $\forall y\ \exists x \in \mathbb{Z}$ tc $x = \pm\sqrt{y}$

controesempio: $y = -1$ $\nexists x \in \mathbb{Z}$ tc $x^2 = -1$
$\Rightarrow f$ no suriettiva

Esercizio

$f : x \in \mathbb{Z} \to |x| + 9 \in \mathbb{Z}$

(1) Calcolare $f(\{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\})$

$f(\{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\}) = \{f(x)$ tc $x \in \{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\}\} =$
$= \{f(-7), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(7)\} =$
$= \{|-7| + 9, |-2| + 9, |-1| + 9, |0| + 9, |1| + 9, |2| + 9, |7| + 9\} = \{16, 11, 10, 9\}$

(2) Calcolare $f^{-1}(\{-4, -1, 0, 15, 20\})$

$f^{-1}(\{-4, -1, 0, 15, 20\}) = \{x \in \mathbb{Z}$ tc $f(x) \in \{-4, -1, 0, 15, 20\}\} =$
$= \{x \in \mathbb{Z}$ tc $f(x) = -4$ o $f(x) = -1$ o $f(x) = 0$ o $f(x) = 15$ o $f(x) = 20\} =$
$= \{x \in \mathbb{Z}$ tc $|x| + 9 = -4$ o $|x| + 9 = -1$ o $|x| + 9 = 0$ o $|x| + 9 = 15$ o $|x| + 9 = 20\} = \{6, 11\}$

(3) Stabilire se f è iniettiva e suriettiva

4

f iniettiva?

Siano $x, y \in \mathbb{Z} : f(x) = f(y) \Rightarrow |x| + 9 = |y| + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow x = \pm y \quad (\not\Rightarrow x = y)$

Controesempio $x = 1, \; y = -1$

$$x \neq y \quad (1 \neq -1) \text{ ma } f(x) = 10 = f(y)$$

$$f(x) = |x| + 9 = |+1| + 9 \qquad f(y) = |y| + 9 = |-1| + 9$$

Dunque f non è iniettiva

f suriettiva?

f suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Z} \; \exists x \in \mathbb{Z}$ t.c. $y = f(x) = |x| + 9$

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Z} \; \exists x \in \mathbb{Z}$ t.c. $|x| = y - 9$

$\downarrow$

Non sempre è vero!

Controesempio $y = -4$ non ha controimmagine.

Se $y = -4 \; \nexists x \in \mathbb{Z}$ t.c. $|x| + 9 = -4$

perché $|x| + 9 = -4 \Rightarrow |x| = -13$ e il modulo di un intero non può essere mai negativo.

Dunque f non è suriettiva.

Esercizio

$f: x \in \mathbb{Z} \to -\frac{x}{5} \in \mathbb{Q}$

(5)

calcolare

(1) $f(\{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\}) =$

$= \{f(-7), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(7)\} =$

$= \left\{-\frac{(-7)}{5}, -\frac{(-2)}{5}, -\frac{(-1)}{5}, -\frac{(0)}{5}, -\frac{(1)}{5}, -\frac{(2)}{5}, -\frac{(7)}{5}\right\}$

$= \left\{\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{7}{5}\right\}$

calcolare

(2) $f^{-1}(\{-\frac{4}{3}, -1, 0, \frac{2}{15}, 20\}) =$

$= \{x \in \mathbb{Z}$ t.c. $f(x) \in \{-\frac{4}{3}, -1, 0, \frac{2}{15}, 20\}\} =$

$= \{x \in \mathbb{Z}$ t.c. $f(x) = -\frac{4}{3}$ o $f(x) = -1$ o $f(x) = 0$

o $f(x) = \frac{2}{15}$ o $f(x) = 20\} =$

$= \{x \in \mathbb{Z}$ t.c. $-\frac{x}{5} = -\frac{4}{3}$ o $-\frac{x}{5} = -1$ o $-\frac{x}{5} = 0$

o $-\frac{x}{5} = \frac{2}{15}$, $-\frac{x}{5} = 20\} =$

$= \{5, 0, -100\}$

$\downarrow$

Oss. $-\frac{x}{5} = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{20}{3} \notin f^{-1}(\{-\frac{4}{3}, -1, 0, \frac{2}{15}, 20\})$

perché $x = \frac{20}{3} \notin \mathbb{Z}$.

$-\frac{x}{5} = \frac{2}{15} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \notin f^{-1}(\{-\frac{4}{3}, -1, 0, \frac{2}{15}, 20\})$

(3) Stabilire se f è iniettiva o suriettiva

f iniettiva?

$x, y \in \mathbb{Z} : \underline{f(x) = f(y)} \Rightarrow -\frac{x}{5} = -\frac{y}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x = -y \Rightarrow \underline{x = y} \Rightarrow f$ iniettiva

moltiplico entrambi i membri per 5

moltiplico entrambi i membri per -1

f suriettiva?

f suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Q}\ \exists x \in \mathbb{Z}$ t.c. $y = f(x)$

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Q}\ \exists x \in \mathbb{Z}$ t.c. $y = -\frac{x}{5}$ $\rightarrow$ NON VALE IN GENERALE

OSS. Possiamo trovare nel punto (2) l'elemento $y \in \mathbb{Q}$ per il controesempio.

Controesempio $y = -\frac{4}{3}$

se $y = -\frac{4}{3}$ $\nexists x \in \mathbb{Z}$ t.c. $-\frac{4}{3} = -\frac{x}{5}$

perché in tal caso $x = \frac{20}{3} \notin \mathbb{Z}$ (dominio).

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5/2 & 2 & 3/2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 9/4 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 11/4 & -5/2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Verificare che $A^2 = A \cdot A$ è l'inversa di B.
  Per fare la verifica proviamo che $A^2 \cdot B = I$
- verificare che A è invertibile senza calcolare il determin.

$A^2 = A \cdot A$ è invertibile (perché $\exists B$ t.c. $A^2 \cdot B = I$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow |A^2| \neq 0$.. Ma $|A^2| = |A \cdot A| = |A|\,|A| \overset{\text{T. di Binet}}{=} 2|A| \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$
$\Rightarrow A$ invertibile