Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 21/1/2011 – ore 9

Esercizio 1 Si consideri l'esperimento che consiste nell'effettuare 3 estrazioni a caso da un'urna che contiene 3 biglie bianche e 3 biglie nere. Calcolare la probabilità che tra le 3 biglie estratte ve ne siano 2 bianche e una nera. Se si sono estratte 2 biglie bianche ed una nera, qual è la probabilità che la prima estratta sia stata bianca?

Valutare le probabilità richieste
(i) nel caso di estrazioni con reinserimento;
(ii) nel caso di estrazioni senza reinserimento.

Esercizio 2 Si sceglie a caso una sequenza dall'elenco delle sequenze booleane di lunghezza 4 aventi almeno un bit pari a **1**. Sia X il numero di bit pari a **1** nella sequenza scelta e sia

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se l'ultimo bit della sequenza è pari a } \mathbf{1}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Calcolare $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Determinare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X normale di media 1 e varianza 25, e Y esponenziale di media 1.
(i) Calcolare $P(\{X \leq 6\} \cup \{Y \leq 2\})$.
(ii) Determinare $P(X \leq 6, Y \leq 2 \,|\, X \leq 13, Y \leq 4)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 3/2/2011 – ore 9

Esercizio 1 Si consideri l'esperimento che consiste nel lanciare a caso 4 monete non truccate. Sia $H_k = \{\text{esce testa } k \text{ volte}\}$, $0 \le k \le 4$, e sia $A = \{\text{nei primi 2 lanci esce lo stesso risultato}\}$.
(i) Stabilire se gli eventi $H_0, H_1, \dots, H_4$ sono necessari e incompatibili.
(ii) Calcolare $P(H_k)$ e $P(A|H_k)$ per $k = 0, 1, \dots, 4$.
(iii) Valutare $P(H_k|A)$ per $k = 0, 1, \dots, 4$.

Esercizio 2 Un esperimento consiste nel colorare di blu 2 vertici del seguente grafo scelti a caso, e di colorare di rosso i rimanenti 2 vertici:

Successivamente si sceglie a caso un vertice del grafo. Sia

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se il vertice scelto ha colore blu,} \\ 0, & \text{se il vertice scelto ha colore rosso.} \end{cases}$$

Sia Y la variabile aleatoria che descrive quanti sono i vertici adiacenti a quello scelto a caso ad avere colore blu.
(i) Determinare la densità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Valutare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, entrambe con distribuzione normale di valore medio 1 e varianza 4. Posto

$$T = 2X - Y - 1, \qquad 0 < p < 1.$$

(i) Calcolare valore atteso e varianza di T.
(ii) Tenendo presente che T ha distribuzione normale, determinare $P(T > 0)$ e $P(T > 1)$.
(iii) Valutare $Cov(T, X)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 18/2/2011 – ore 9

Esercizio 1 Un esperimento consiste nell'estrarre 3 biglie da un'urna contenente inizialmente 3 biglie bianche e 5 rosse, con la regola che se una biglia estratta è bianca viene reinserita nell'urna con l'aggiunta di un'ulteriore biglia bianca, mentre se è rossa viene lasciata fuori. Calcolare la probabilità che:
(i) tra le 3 estratte ve ne sia almeno una rossa;
(ii) la seconda estratta sia bianca;
(iii) la prima estratta è rossa sapendo che tra le 3 estratte almeno una è rossa.

Esercizio 2 Da una scatola che contiene 5 biglie, di cui 3 sono bianche e 2 nere, si estraggono tutte le biglie in sequenza, senza reinserimento. Si considerino le variabili aleatorie:
$X =$ in quale estrazione esce la prima biglia nera,
$Y =$ in quale estrazione esce la seconda biglia nera.
(i) Determinare la cardinalità dello spazio campionario dell'esperimento.
(ii) Valutare la densità discreta congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(iii) Stabilire se X ed Y sono indipendenti.
(iv) Calcolare $Cov(X, Y)$.

Esercizio 3 Uno studente deve sostenere una prova d'esame composta da 25 quesiti. Indicando con X_i il punteggio ottenuto rispondendo al quesito i-esimo, sia $\mu = E(X_i) = 6$ e $\sigma^2 = Var(X_i) = 4$. Posto

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{25}}{25},$$

e supponendo che le variabili aleatorie X_i siano indipendenti,
(i) determinare valore atteso e varianza di $\overline{X}$,
(ii) valutare in maniera approssimata $P(\overline{X} \geq 7)$ ricorrendo al teorema del limite centrale,
(iii) ricavare un limite superiore per $P(\overline{X} \geq 7)$ facendo uso della disuguaglianza di Markov.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Fisciano, 4/4/2011 – ore 15

Esercizio 1 Dati due eventi A e B, sia $P(A) = 0{,}4$ e $P(A \cup B) = 0{,}6$. Si calcoli $P(B)$ nei seguenti casi:
(i) A e B sono incompatibili;
(ii) A e B sono indipendenti;
(iii) $P(A|B) = 0{,}2$.

Esercizio 2 Si consideri la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria continua X:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha}{x^2 + \alpha} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare i valori ammissibili per α.
(ii) Ricavare la densità di probabilità di X.
(iii) Calcolare la mediana di X, ossia il valore m tale che $F(m) = 1/2$.
(iv) Valutare $P(X > 1/2 \,|\, X > 1/4)$.

Esercizio 3 Si estraggono 3 biglie senza reinserimento da un'urna che contiene 1 biglia bianca, 2 biglie nere e 3 biglie rosse. Sia X il numero di biglie bianche estratte e sia Y il numero di biglie nere estratte.
(i) Determinare la funzione di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 15/6/2011 – ore 9

Esercizio 1 Si consideri l'esperimento che consiste nell'effettuare 3 lanci a caso di un dado. Sia $D_k = \{$nei 3 lanci esce k volte un numero dispari$\}$, $0 \leq k \leq 3$, e sia $A = \{$nel primo lancio esce un numero dispari$\}$.
(i) Stabilire se gli eventi D_0, D_1, D_2, D_3 sono necessari e incompatibili.
(ii) Calcolare $P(D_k)$ e $P(A|D_k)$ per $k = 0, 1, 2, 3$.
(iii) Valutare $P(D_k|A)$ per $k = 0, 1, 2, 3$.

Esercizio 2 Si consideri la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, x^2 & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Individuare i valori ammissibili per α.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare il valore medio $E(X)$.
(iv) Calcolare $P(X > 1 \,|\, X > 0)$.

Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, con

$$P(X = -1) = \frac{1}{2}, \qquad P(X = 0) = \frac{1}{4}, \qquad P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

(i) Posto $Z = X + Y$, calcolare $E(Z)$ e $Var(Z)$.
(ii) Posto $U = X \cdot Y$, determinare $E(U)$ e $Var(U)$.
(iii) [Facoltativo] Calcolare $Cov(Z, X)$ e $Cov(U, X)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 19/7/2011 – ore 9

Esercizio 1 Un'urna contiene 4 biglie numerate da 1 a 4. Se ne estraggono 3 a caso senza reinserimento. Sia $A = \{$una delle 3 biglie estratte ha numero 1 o 2$\}$, $B = \{$nessuna delle 3 biglie estratte ha numero 4$\}$, $C = \{$le 3 biglie estratte hanno numeri tra loro consecutivi$\}$.
(i) Calcolare $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$, $P(B \cup C)$.
(ii) Stabilire se gli eventi A, B, C sono indipendenti.
(iii) Valutare $P(A), P(B), P(C)$ nel caso di estrazioni con reinserimento.

Esercizio 2 Si consideri l'esperimento che consiste nell'effettuare lanci a caso indipendenti di una moneta truccata, che ad ogni lancio mostra testa con probabilità $1 - p$. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero totale di volte che esce croce in n lanci.
(i) Determinare $P(X = k)$ per $k = 1, 2, \dots, n$.
(ii) Calcolare il valore medio e la varianza di $Y = X + 1$.
(iii) Valutare il valore medio di $1/Y$.

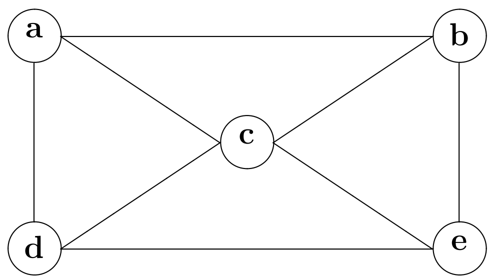
Esercizio 3 In un centro di elaborazione dati devono essere eseguiti $n = 36$ job. Indicando con X_i il tempo d'esecuzione del job i-esimo, supponiamo che sia $\mu = E(X_i) = 10\, min$ e $\sigma = \sqrt{Var(X_i)} = 3\, min$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Posto

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

e supponendo che le variabili aleatorie X_i siano indipendenti,
(i) determinare valore atteso e varianza di $\overline{X}$,
(ii) valutare in maniera approssimata $P(\overline{X} \geq 11\, min)$ usando il teorema del limite centrale,
(iii) ricavare un limite superiore per $P(\overline{X} \geq 11\, min)$ mediante la disuguaglianza di Markov.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 8/9/2011 – ore 9

Esercizio 1 Un esperimento consiste nello scegliere a caso 2 nodi del seguente grafo. Consideriamo i seguenti eventi: $A = \{\text{uno dei 2 nodi ha label } \mathbf{a}\}$, $B = \{\text{i due nodi sono adiacenti}\}$, $C = \{\text{le label dei due nodi sono adiacenti nell'ordinamento alfabetico}\}$.



(i) Calcolare $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$, $P(B \cup C)$.
(ii) Stabilire se gli eventi A, B, C sono indipendenti.

Esercizio 2 La composizione di un gruppo di lavoro di 5 persone viene decisa in base ad un sorteggio casuale da un elenco di 8 possibili candidati. Se nell'elenco vi sono 3 fratelli, indichiamo con X quanti tra questi saranno inclusi nel gruppo di lavoro.
(i) Determinare $P(X = k)$ per $k = 0, 1, 2, 3$.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione di X, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Calcolare il valore medio e la varianza di $Y = X - 1$.

Esercizio 3 Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti dotate di densità di probabilità

$$f_{X_k}(x) = \begin{cases} 1 - k + x, & \text{per } k - 1 < x \leq k, \\ 1 + k - x, & \text{per } k < x < k + 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Posto

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

(i) determinare valore atteso e varianza di X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$,
(ii) determinare valore atteso e varianza di $\overline{X}$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 16/12/2011

Esercizio 1 Da un'urna contenente 5 biglie rosse e 5 blu si estraggono a caso tre biglie secondo la seguente regola: se si estrae una biglia blu, questa viene reinserita nell'urna mentre se si estrae una biglia rossa questa non viene reinserita.
(i) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una biglia rossa.
(ii) Calcolare la probabilità di estrarre esattamente due biglie rosse.
(ii) Se alla seconda estrazione si è ottenuto una biglia blu, qual è la probabilità di estrarre esattamente due biglie rosse?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria discreta caratterizzata dalla seguente funzione di probabilità

$$p(x) = c(1 + |x|), \qquad x = -1, 0, 1, 2.$$

Determinare:
(i) il valore della costante c,
(ii) la funzione di distribuzione di X mostrandone l'andamento grafico,
(iii) valore atteso e varianza di X.

Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X normale di varianza 4, ed Y uniforme di media 1/2. Sia inoltre $E(X + Y) = -1/2$ e $Var(X + Y) = 49/12$.
(i) Calcolare $P(X > 1, Y > 1/2)$.
(ii) Determinare $P(X > 1/2, Y < 1 \,|\, X > 1, Y > 1/2)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 19/12/2011 – ore 11

Esercizio 1 Da un'urna contenente 5 biglie, di cui 2 sono nere e 3 bianche, si estraggono biglie in sequenza. Posto
$A = \{$nelle prime 3 estrazioni fuoriesce almeno una biglia nera$\}$,
$B = \{$nelle prime 2 estrazioni fuoriescono biglie dello stesso colore$\}$,
stabilire se A e B sono eventi indipendenti, nel caso di
(i) estrazioni con reinserimento,
(ii) estrazioni senza reinserimento.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua di valore medio $\mu = 1$. Calcolare $P(X > 0)$, $P(X < -1)$ e $P(X > 0|X > -1)$ nei seguenti casi:
(i) X è normale, di varianza $\sigma^2 = 4$;
(ii) X è uniforme, tale che $P(X > 2) = 1/3$.

Esercizio 3 Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia tale che

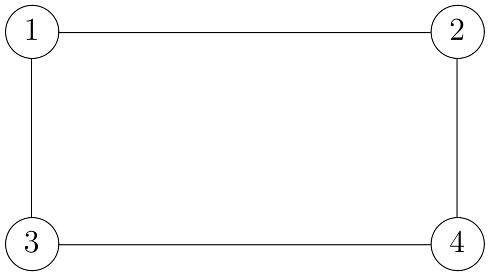
$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) = c\{4 - (x + y)\}, \qquad x, y = 0, 1, 2, 3;\;\; 0 \le x + y \le 3.$$

(i) Determinare la costante di normalizzazione c.
(ii) Ricavare le funzioni di probabilità marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$, stabilendo se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Fisciano, 19/12/2011 – ore 14

Esercizio 1 Un esperimento consiste nel lanciare a caso una moneta in corrispondenza di ciascuno dei vertici del seguente grafo:



Sia A_k l'evento che si verifica se la moneta lanciata nel vertice k e le monete lanciate nei 2 vertici adiacenti danno lo stesso risultato, per $k = 1, 2, 3, 4$.
(i) Calcolare $P(A_k)$, per $k = 1, 2, 3, 4$.
(ii) Calcolare la probabilità che si verifichi almeno uno degli eventi A_1, A_2, A_3, A_4.
(iii) Stabilire se A_i e A_j sono indipendenti, per $i \neq j$.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{x+\alpha}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Stabilire quali sono i valori ammissibili per la costante α.
(ii) Ricavare la densità di probabilità di X.
(iii) Determinare la mediana m, tale che $F(m) = 1/2$.
(iv) Calcolare $P(X > \alpha | X > \alpha/2)$.

Esercizio 3 Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia tale che

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) = \frac{1}{c}\binom{3}{x+y}, \qquad x, y = 0, 1, 2, 3; \;\; 0 \leq x + y \leq 3.$$

(i) Determinare la costante c.
(ii) Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.
(iii) Valutare $P(X + Y > 1)$ e $P(X = Y)$.