

Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 18

- Teoria dei grafi: definizioni di base
- Problema del flusso a costo minimo

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Teoria dei Grafi

Concetti fondamentali

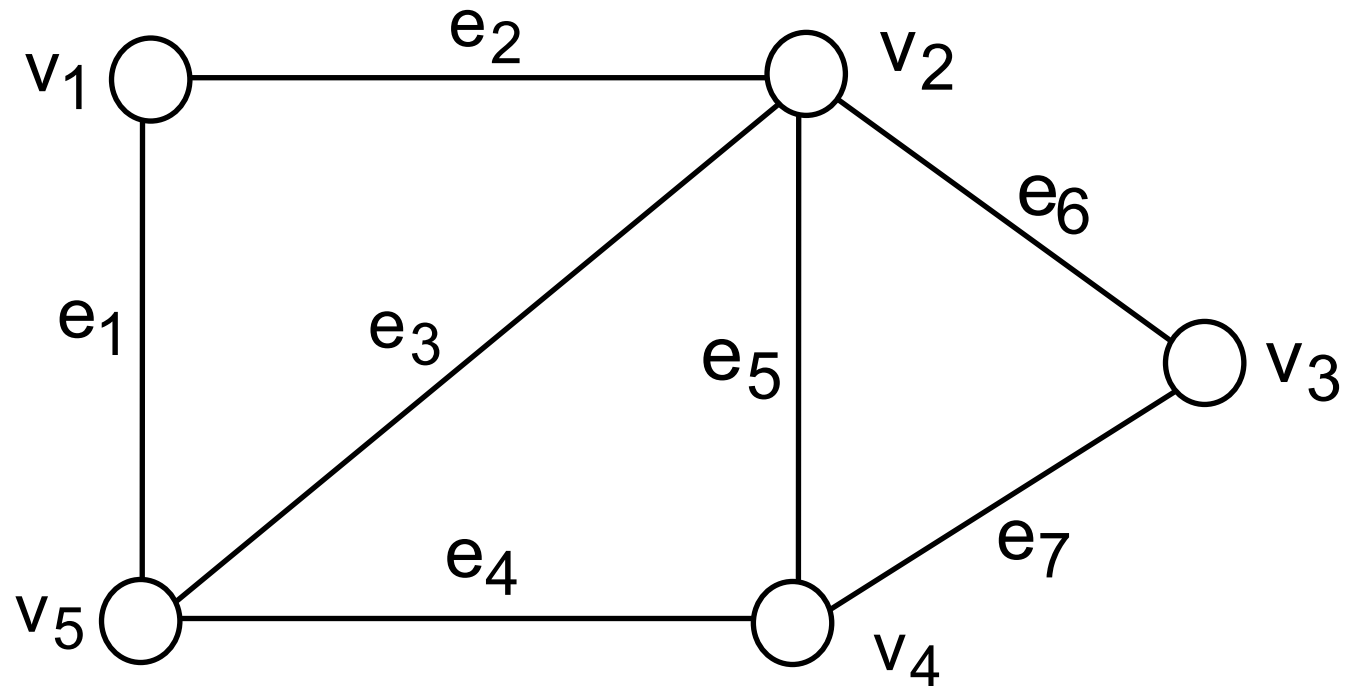
Un grafo non orientato $G=(V,E)$ è dato da una coppia di insiemi finiti:

- $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ l'insieme degli n **Nodi** di G
- $E=\{e_1,\dots,e_m\}\subseteq V\times V$ l'insieme degli m **Archi non orientati** di G

Ogni arco non orientato di G corrisponde ad una coppia non ordinata di nodi di G $e_k=(v_i,v_j)$.

La presenza di un arco tra una coppia di nodi indica una relazione tra i nodi stessi.

Un esempio: $G=(V,E)$



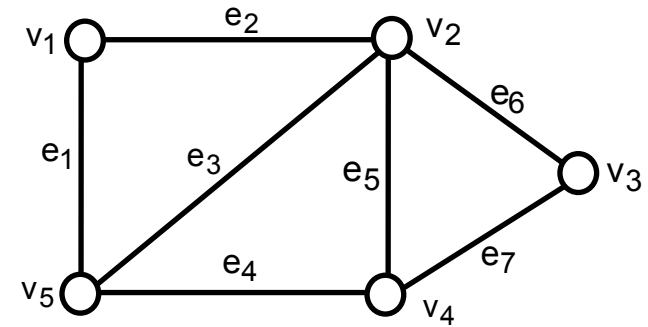
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$e_1 = (v_1, v_5) \quad e_2 = (v_1, v_2) \quad \dots$$

Definizioni di base:

- un arco (v,v) è detto **loop**
- un arco $e=(u,v)\in E$ si dice **incidente** su u e su v
- due nodi $u,v\in V$ sono detti **adiacenti** $\Leftrightarrow (u,v)\in E$
- due archi $e_1,e_2\in E$ sono detti **adiacenti** $\Leftrightarrow e_1=(u,v)$ ed $e_2=(v,w)$ (hanno un nodo in comune)
- l'insieme di nodi $N(u)=\{v\in V: v \text{ adiacente a } u\}$ è detto **intorno** di u in G
- l'insieme di archi $\delta(u)=\{e\in E: e \text{ incide su } u\}$ è detto **stella** di u in G
- $|\delta(u)|$ è detto **grado del nodo** u



Teoria dei Grafi

Concetti fondamentali

I grafi sono un mezzo per rappresentare relazioni binarie

Ad esempio:

- due città connesse da una strada
- due calcolatori connessi in una rete telematica
- due persone legate da una relazione di parentela (come, padre-figlio)
- due persone che condividono una stanza
- il collegamento tra due componenti elettronici
- un'operazione che deve essere eseguita da una certa macchina
- ...

I grafi possono essere usati come strumento per modellare in maniera schematica un vastissimo numero di problemi decisionali.

Ad esempio:

- determinare il percorso più breve che connette due città
- determinare come connettere nella maniera più economica (più efficiente) un insieme di calcolatori in una rete telematica
- assegnare un insieme di operazioni ad un insieme di macchine
- determinare il percorso più conveniente da far percorrere ad una flotta di veicoli commerciali per effettuare delle consegne e quindi rientrare al deposito
- ...

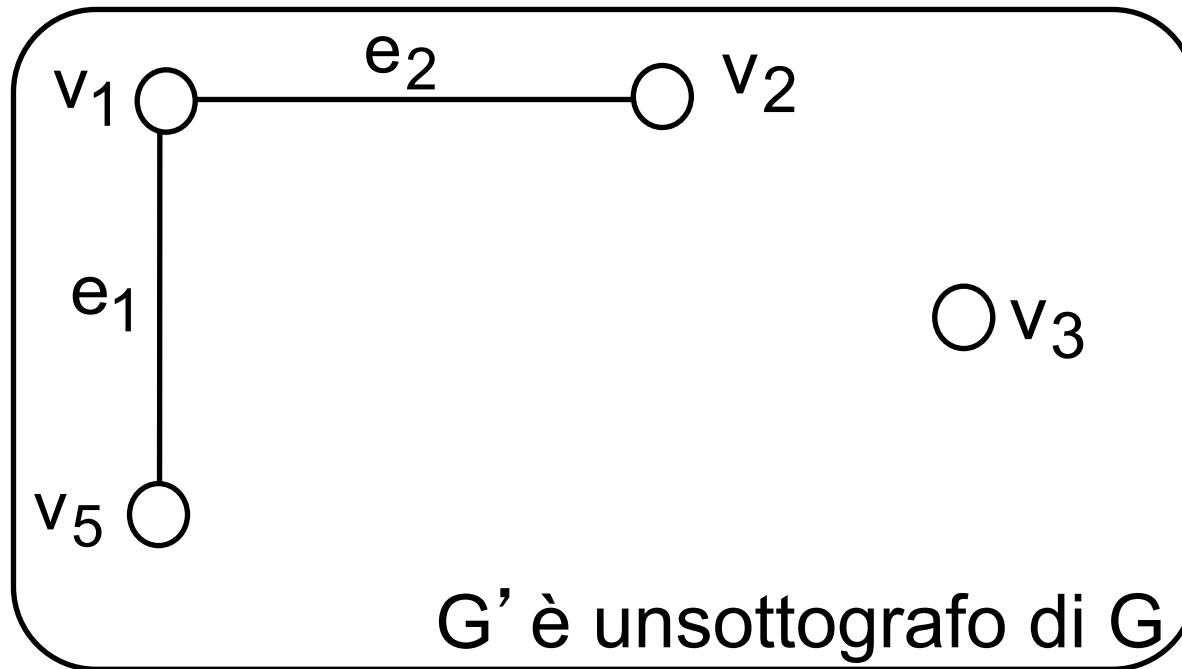
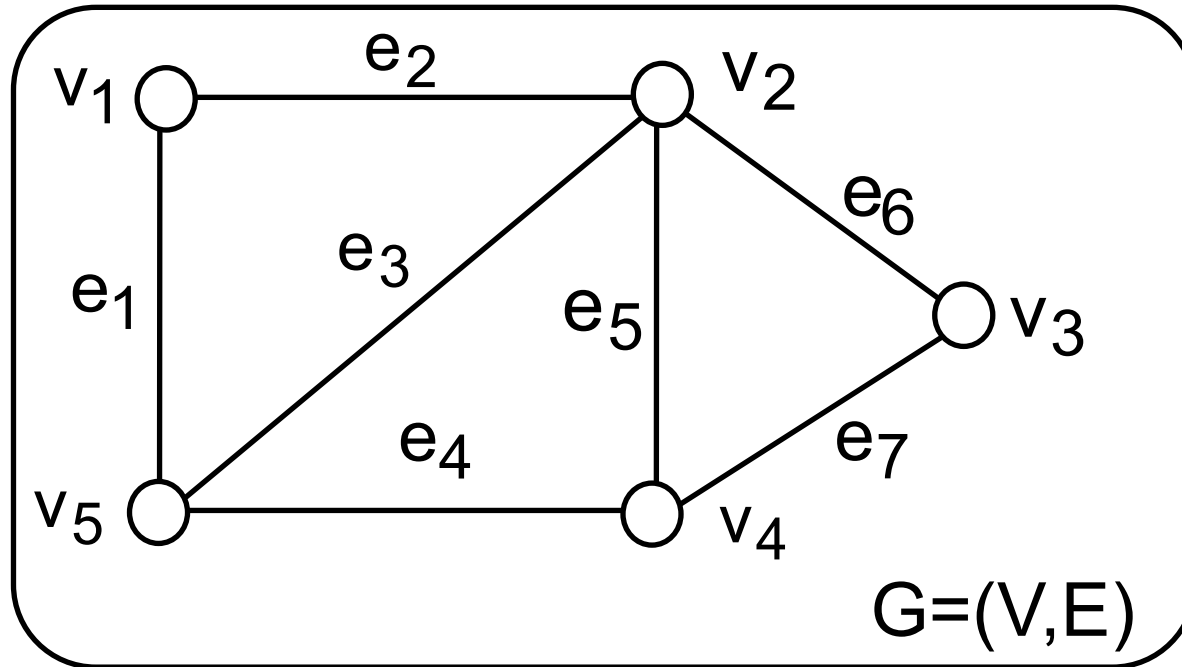
Grafo semplice:

Non esistono archi paralleli (al più un arco per ogni coppia di nodi) o “loop” .

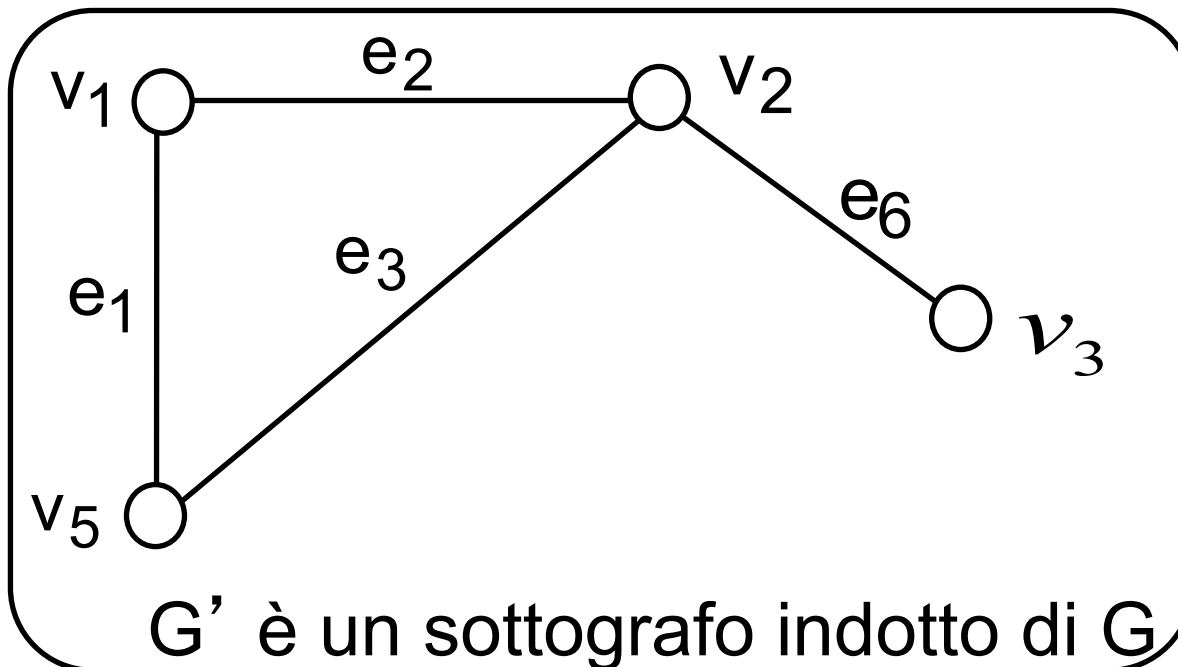
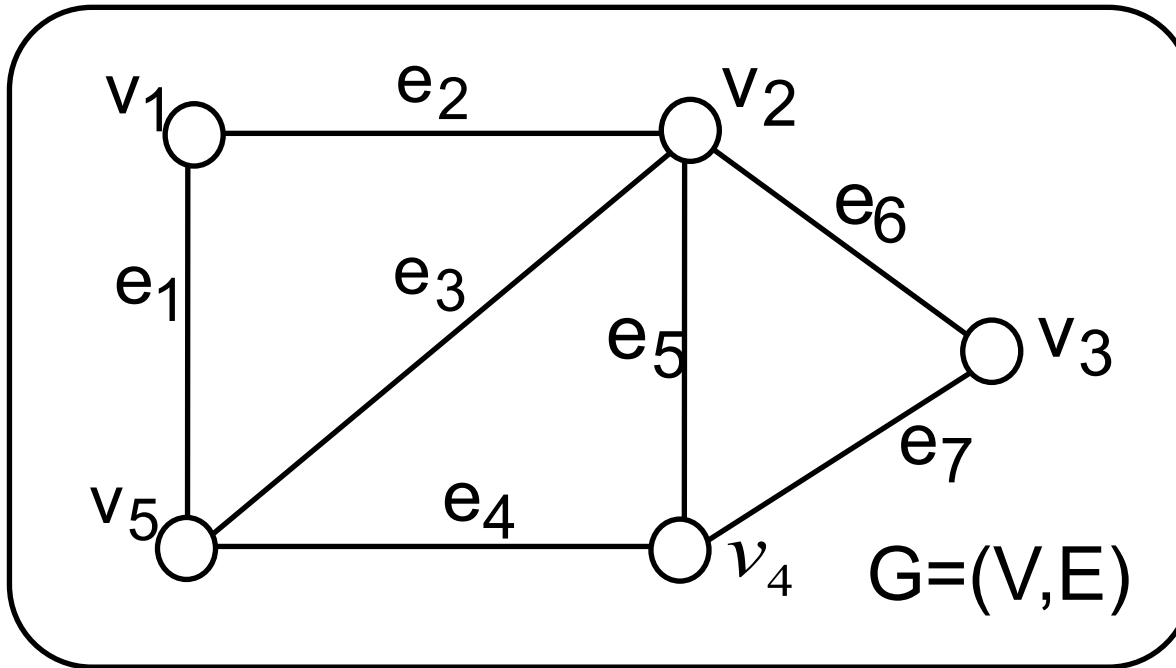
Grafi e Sottografi

- $G'=(V',E')$ è detto **sottografo** di $G=(V,E) \Leftrightarrow V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$
- $G'=(V',E')$ è detto **sottografo indotto** da V' in $G=(V,E) \Leftrightarrow V' \subseteq V$ e $\forall u,v \in V'$ se $(u,v) \in E$ allora $(u,v) \in E'$.

Esempio



Esempio



$$V' = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$$

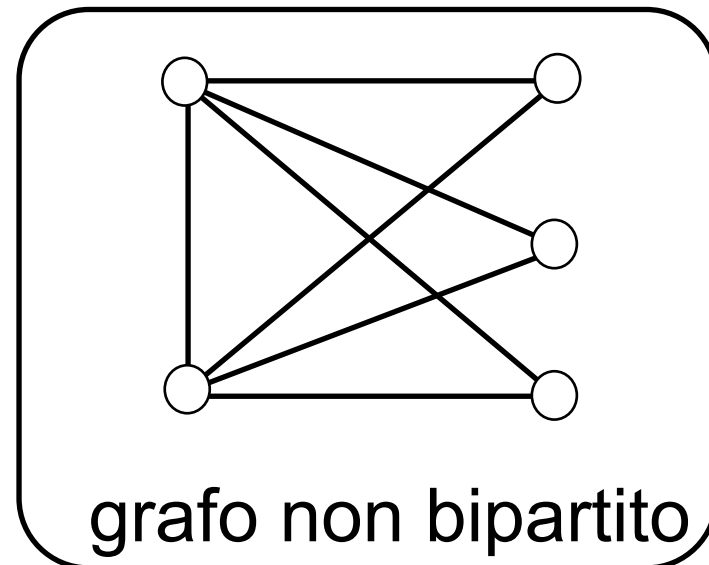
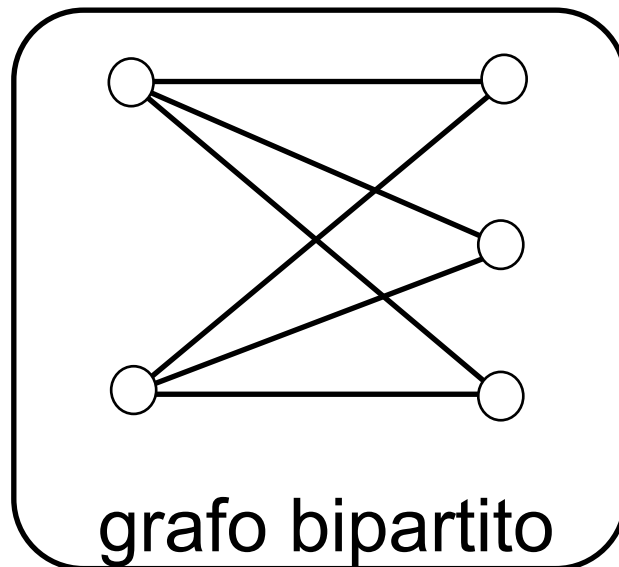
G' è un sottografo indotto di G

Grafi bipartiti e grafi completi

G è detto **grafo bipartito** se esiste una partizione di $V=V_1 \cup V_2$ tale che:

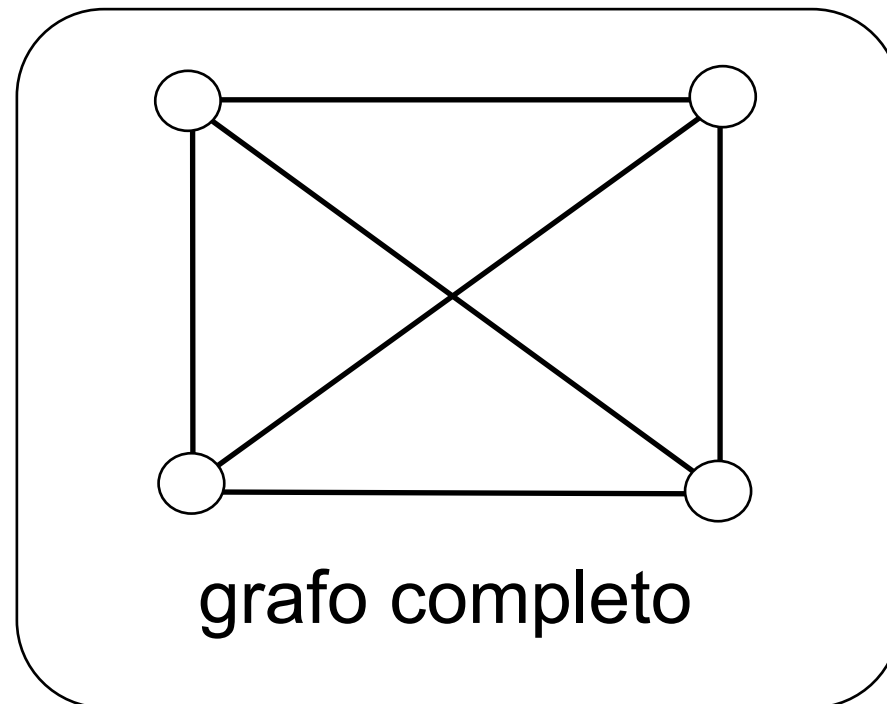
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $\forall e=(u,v) \in E$ se $u \in V_1$ allora $v \in V_2$ oppure se $u \in V_2$ allora $v \in V_1$

Esempio



- G è detto **completo** \Leftrightarrow contiene tutti i possibili archi, ovvero $|\delta(v)| = n-1 \quad \forall v \in V$
- il massimo numero di archi di un grafo completo è dato da $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Esempio



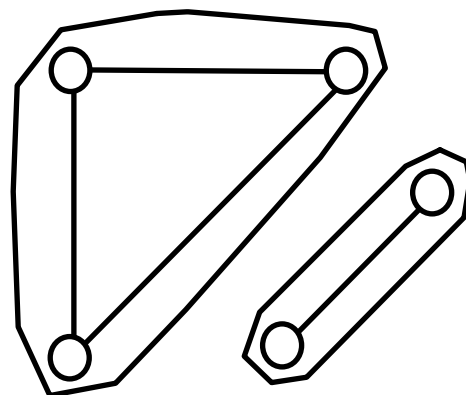
Grafi connessi e componenti connesse

- Dato $G=(V,E)$, un nodo $v \in V$ si dice **connesso** ad un nodo $u \in V$ se esiste un cammino tra u e v in G
- $v \in V$ è connesso a v (riflessività)
- $v \in V$ è connesso a $u \in V \Rightarrow u \in V$ è connesso a $v \in V$ (simmetria)
- se $v \in V$ è connesso a $u \in V$ e $u \in V$ è connesso a $w \in V \Rightarrow v \in V$ è connesso a $w \in V$ (transitività)
- Un grafo $G=(V,E)$ è connesso \Leftrightarrow tutti i suoi nodi sono connessi tra loro.

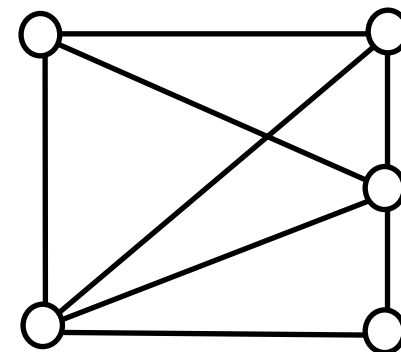
- L'insieme V può essere partizionato in sottoinsiemi

$$C_i = \{v \in V : v \text{ è connesso a } u, \forall u \in C_i\}$$
- Il sottografo indotto da C_i in G è detto **componente connessa** di G
- G è connesso \Leftrightarrow possiede una sola componente connessa ($\forall v, u \in V$ v è connesso a u)

Esempio



componenti
connesse

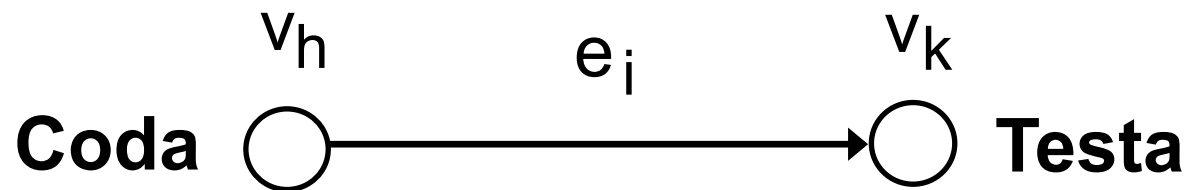


grafo connesso

Grafi orientati

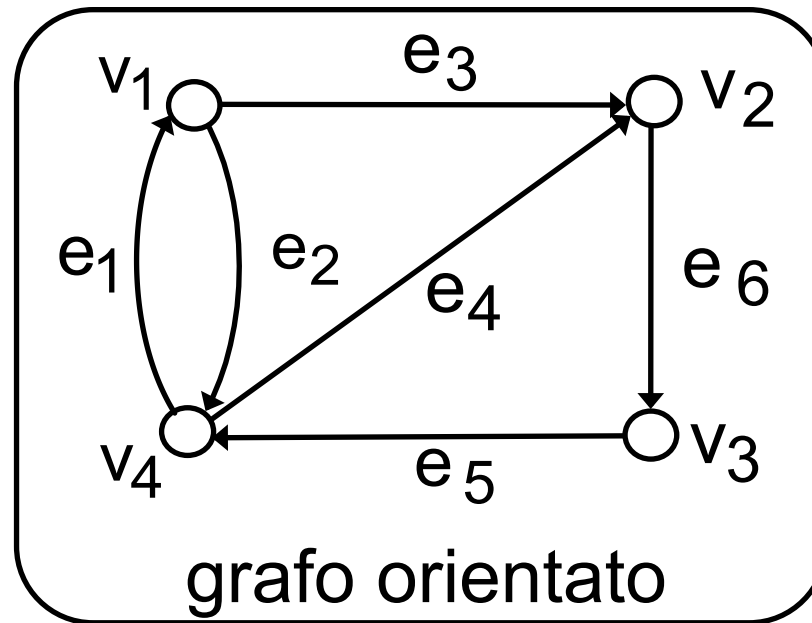
- $G=(V,E)$ è detto **orientato** se, dato $V=\{v_1,\dots,v_n\}$, l'insieme degli archi $E=\{e_1,\dots,e_m\}$ è formato da coppie ordinate di nodi.

Per un grafo orientato si ha che $e_i=(v_k,v_h) \neq e_j=(v_h,v_k)$
 $e_i, e_j \in E$



L'arco e_i si dice **uscente** da v_h ed **entrante** in v_k

Esempio

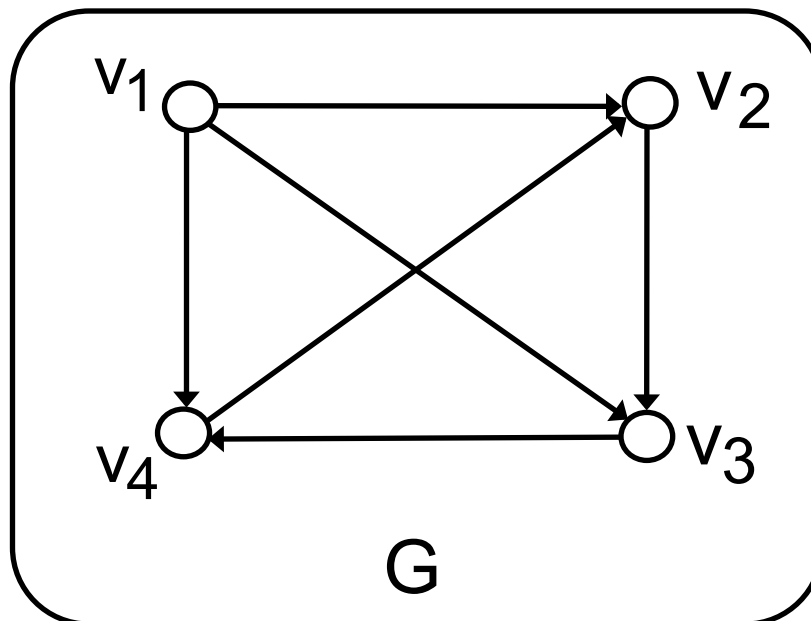


- $F_s(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$ è detto **stella uscente** di v
- $B_s(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}$ è detto **stella entrante** di v
- $S(v) = F_s(v) \cup B_s(v)$ è detto **stella** di v
- le definizioni di sottografo, sottografo indotto e componente connessa di un grafo orientato sono analoghe a quelle date per i grafi non orientati

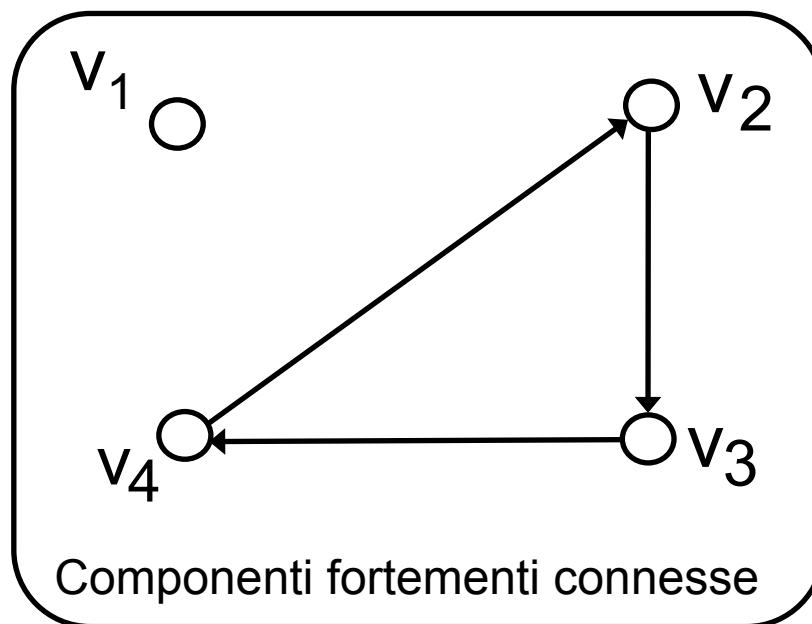
Grafi orientati e componenti fortemente connesse

- Dato $G=(V,E)$, un nodo $v \in V$ si dice **fortemente connesso** ad un nodo $u \in V$ se esiste una path (cammino orientato) tra v e u in G .
- $v \in V$ è connesso a v (riflessività)
- se $v \in V$ è fortemente connesso a $u \in V$ e $u \in V$ è fortemente connesso a $w \in V \Rightarrow v \in V$ è fortemente connesso a $w \in V$ (transitività)
- Un grafo $G=(V,E)$ è fortemente connesso \Leftrightarrow tutti i suoi nodi sono fortemente connessi tra loro.

Esempio



Ci sono in G componenti fortemente connesse?



Rappresentazioni di un Grafo

- **Liste di adiacenza:**

ad ogni vertice è associata la lista dei vertici adiacenti (può essere una tabella o una lista concatenata).

- **Matrice di adiacenza:** $(n \times n)$

$$a_{ih} = 1 \text{ se } (v_i, v_h) \in E, a_{ih} = 0 \text{ altrimenti}$$

- **Matrice di incidenza:** $(n \times m)$

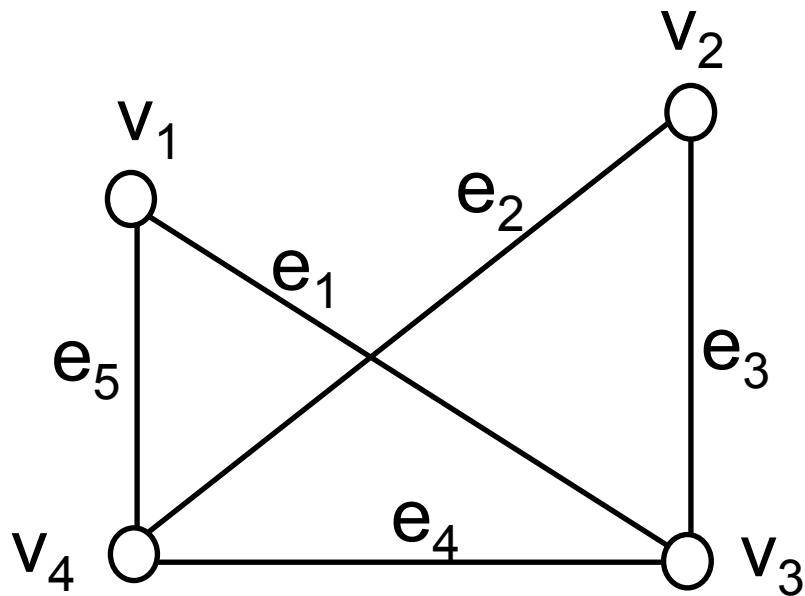
$$a_{ih} = 1 \text{ se } v_i \in e_h, a_{ih} = 0 \text{ altrimenti}$$

Matrici di Incidenza dei Grafi

- Dato $G=(V,E)$ **grafo non orientato**, $A_G=[a_{ij}]$, con $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$ è la **matrice di incidenza** di G , dove $n=|V|$ ed $m=|E|$, e tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ è testa o coda di } e_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

●Esempio



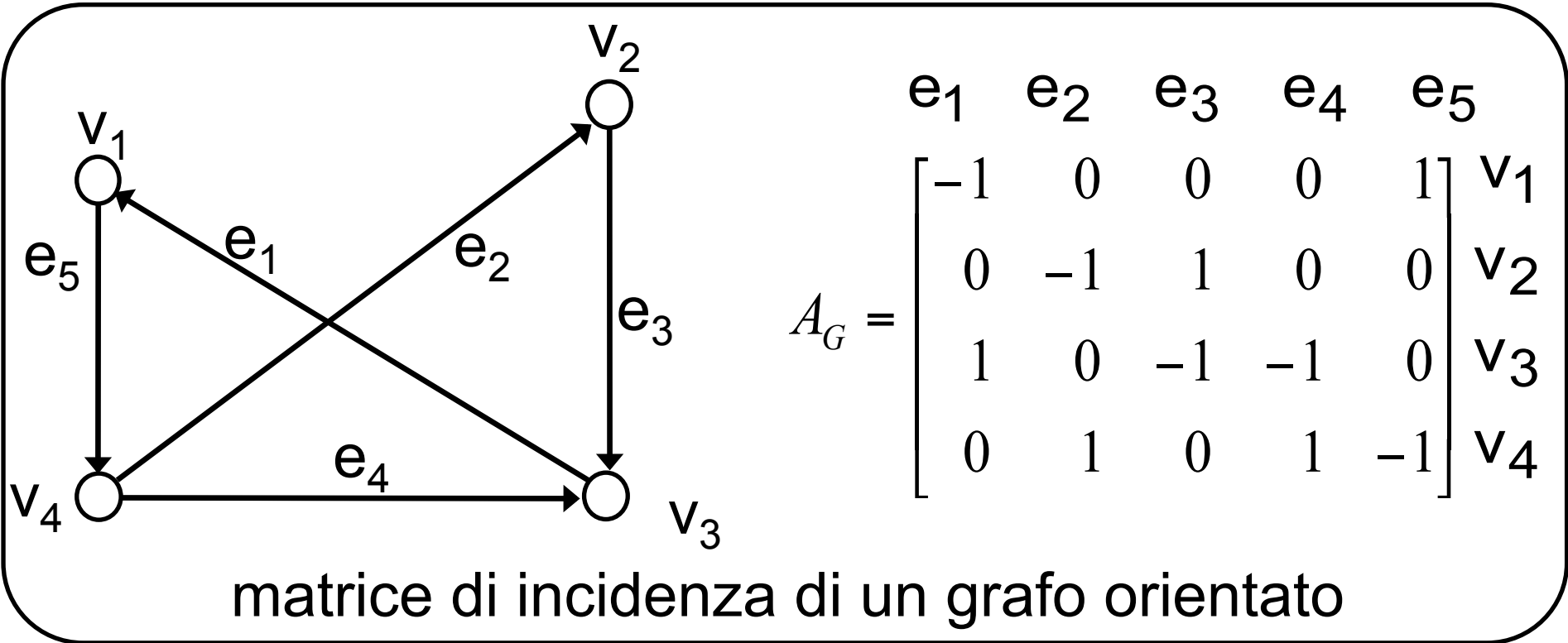
$$A_G = \begin{array}{ccccc|c} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ v_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ v_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

matrice di incidenza di un grafo non orientato

- Dato $G=(V,E)$ **grafo orientato**, $A_G=[a_{ij}]$, con $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$ è la **matrice di incidenza** di G , dove $n=|V|$ ed $m=|E|$, e tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ è coda di } e_j \text{ (arco uscente da } v_i \text{)} \\ -1 & \text{se } v_i \text{ è testa di } e_j \text{ (arco entrante in } v_i \text{)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

●Esempio



Rappresentazioni di un Grafo: Vantaggi e Svantaggi

- **Lista di adiacenza:** memoria $O(m)$
 - Vantaggi: permette di scorrere i nodi adiacenti a v in $O(\text{grado}(v))$
 - Svantaggi: inserimenti e cancellazioni su liste concatenate in $O(\text{grado}(v))$
- **Matrice di adiacenza:** memoria $O(n^2)$
 - Vantaggi: Inserimenti e cancellazioni in $O(1)$
 - Svantaggi: permette di scorrere i nodi adiacenti a v in $O(n)$
- **D.: matrice di incidenza ?**

Problema del flusso a costo minimo

Sia $G=(V,E)$ un **grafo connesso e orientato** in cui:

➤ Ad ogni arco (i,j) è associato un costo c_{ij} che rappresenta il costo da pagare per ogni unità di flusso che transita sull'arco (i,j) .

➤ Ad ogni vertice $v \in V$ è associato un valore intero b_v dove:

- $b_v > 0$ indica che il nodo v è un nodo di offerta
- $b_v < 0$ indica che il nodo v è un nodo di domanda
- $b_v = 0$ indica che il nodo v è un nodo di passaggio

➤ La somma di tutti i b_v deve essere uguale a zero (condizione di bilanciamento). Ciò che viene prodotto dalle sorgenti viene consumato dalle destinazioni.

Nel problema del flusso a costo minimo bisogna far giungere la merce prodotta (dai nodi di offerta) alle destinazioni (nodi di domanda) minimizzando i costi di trasporto.

Problema del Flusso a costo Minimo

FORMULAZIONE

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

con vincoli :

$$\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k \in BS(i)} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i \in A$$

x_{ij} = quantità di flusso sull'arco (i, j)

c_{ij} = costo di trasporto di un'unità di flusso sull'arco (i, j)

b_i = valore associato al nodo i :

se $b_i > 0$: nodo offerta

se $b_i < 0$: nodo domanda

se $b_i = 0$: nodo di passaggio

Problema del Flusso a costo Minimo: FORMULAZIONE

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

con vincoli :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{k=1}^n x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$$

x_{ij} = quantità di flusso sull'arco (i, j)

c_{ij} = costo di "trasporto" di un'unità di flusso sull'arco (i, j)

b_i = valore associato al nodo i :

se $b_i > 0$: nodo offerta

se $b_i < 0$: nodo domanda

se $b_i = 0$: nodo di passaggio

- Problema del Flusso a costo Minimo

- FORMULAZIONE

- In forma
matriciale:
~~min $c \cdot x$~~

$$Ax = b$$

- NOTA: $x \geq 0$

- 1. La matrice $A(m,n)$ è la matrice di incidenza nodo-arco, ogni colonna a_{ij} è associata all'arco (i,j) , ed in particolare abbiamo che:

$$\underline{a}_{ij} = \underline{e}_i - \underline{e}_j$$

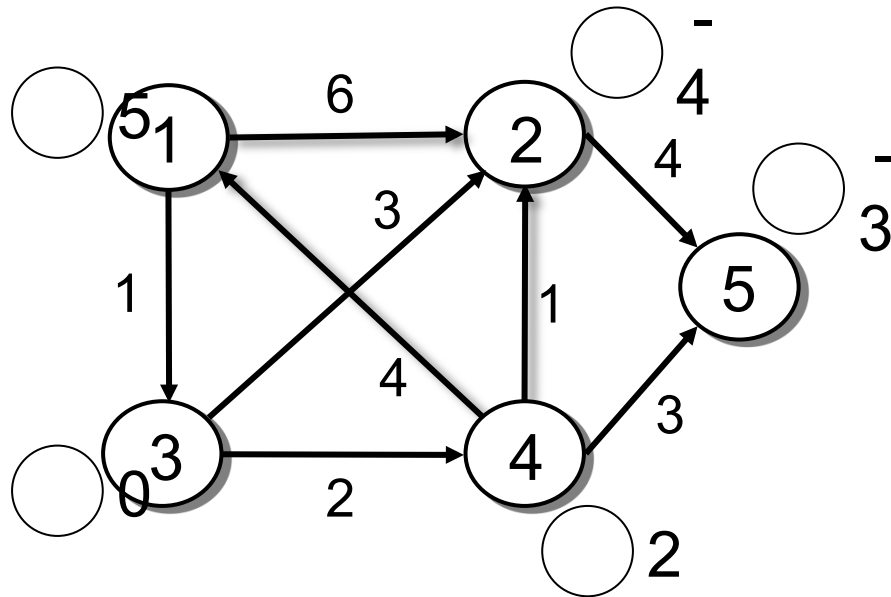
(\underline{e}_i vettore colonna con tutti 0 eccetto un 1 in posizione i -ma.)

- 2. Il rango di questa matrice è: $r(A)=m-1$

Problema del Flusso a costo Minimo: Esempio

Consideriamo un grafo orientato $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ rappresentante una rete di trasporto.

L'obiettivo è quello di far viaggiare ("fluire"), al minimo costo, determinate quantità di merce (unità di flusso) dai nodi di **offerta** a quelli di **domanda** (eventualmente passando per dei nodi di **passaggio**).



Abbiamo:

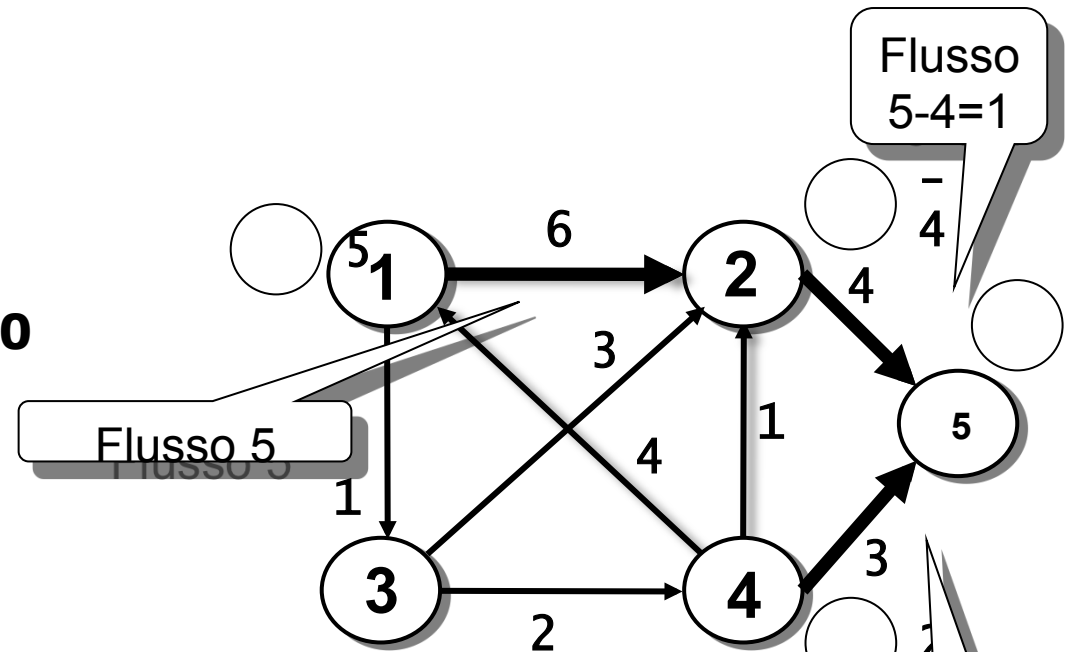
- Una quantità $\mathbf{b}_i > \mathbf{0}$ per i nodi offerta, $\mathbf{<0}$ per i nodi domanda, $\mathbf{=0}$ per i nodi di passaggio (quantità di offerta/domanda)
- Un costo $\mathbf{c}_{ij} \geq \mathbf{0}$ per ogni arco (costo per il trasporto di una unità di merce)

Problema del Flusso a costo Minimo: Esempio

Soluzione 1

Costo:

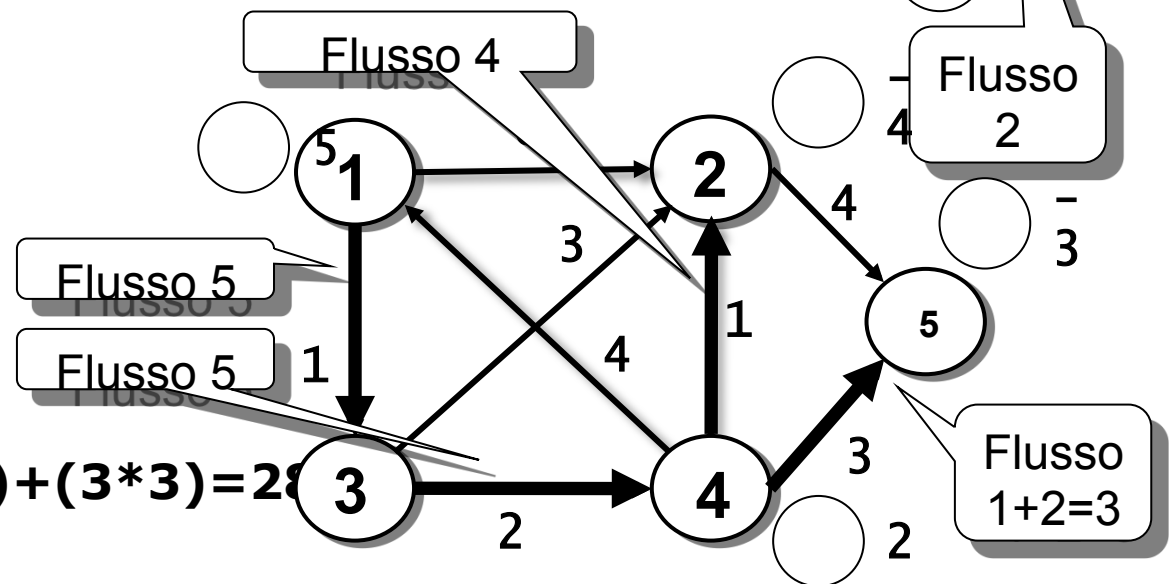
$$(6*5)+(4*1)+(3*2)=40$$



Soluzione 2

Costo:

$$(1*5)+(2*5)+(1*4)+(3*3)=28$$



Problema del Flusso a costo Minimo: Esempio

Modelliamo il problema

- Consideriamo una variabile $x_{ij} \geq 0$ per ogni arco (i,j) , rappresentante la quantità di flusso che attraverserà l'arco nella soluzione

$$\min 6x_{12} + x_{13} + 4x_{25} + 3x_{32} + 2x_{34} + 4x_{41} + x_{42} + 3x_{45}$$

soggetto ai vincoli

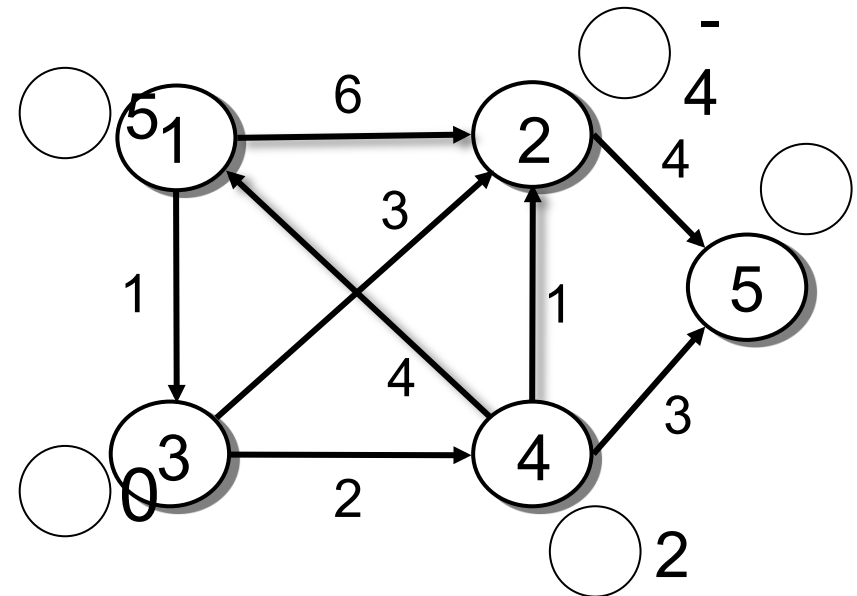
$$x_{12} + x_{13} - x_{41} = 5$$

$$x_{25} - x_{12} - x_{32} - x_{42} = -4$$

$$x_{32} + x_{34} - x_{13} = 0$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{45} - x_{34} = 2$$

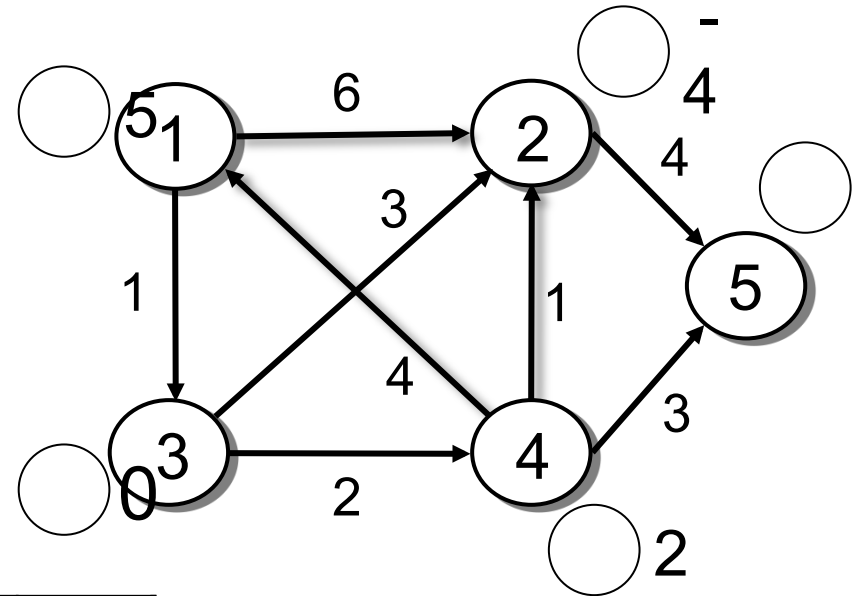
$$-x_{25} - x_{45} = -3$$



Problema del Flusso a costo Minimo: Esempio

Rappresentiamo il grafo mediante una **matrice di incidenza nodo-arco A**; per ogni nodo v ed arco e , la corrispondente entrata A_{ve} varrà:

- 1 se e esce da v (v è la coda di e)
- 1 se e entra in v (v è la testa di e)
- 0 altrimenti



A	(1,2)	(1,3)	(2,5)	(3,2)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,5)
1	1	1	0	0	0	-1	0	0
2	-1	0	1	-1	0	0	-1	0
3	0	-1	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	-1	1	1	1
5	0	0	-1	0	0	0	0	-1