Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 16

Teoria della dualità:

- Esempio

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Esercizio

$$(P) \quad \min \quad x_1 - \frac{3}{2} x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-\frac{1}{2} x_1 + x_2 \leq 5$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

a) Data la base ottima B={ 2,1} verificare se è ammissibile.
b) Verificare se è ottima.
c) Determinare la soluzione duale associata a tale base.
d) Verificare attraverso il teorema della dualità forte se la coppia di soluzioni primale/duale è ottima.
e) Verificare attraverso il teorema degli scarti complementari se la coppia di soluzioni primale/duale è ottima.
f) Risolvere graficamente il problema primale.
g) Risolvere graficamente il problema duale.
h) Riscrivere il problema primale applicando il teorema della rappresentazione.
i) Risolvere il problema ottenuto al punto h) e determinare dalla soluzione ottima di questo problema il vettore x ottimo del problema (P).

Esercizio a) Data la base ottima B={ 2,1}, determinare la soluzione duale corrispondente al vertice ottimo;

Base ottima B={ 2,1}

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Calcolo dell'inversa:

$$\left\langle \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \quad \left\langle \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right\rangle \quad \left\langle \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right\rangle$$

$$w^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \qquad \underline{c}_B^T = (-3/2 \;\; 1) \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}^{*T} = (-3/2, \;\; 1)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = (-1/2, \; -1)$$

Esercizio

a) Dopo aver formulato il duale del problema di programmazione lineare, scrivere le condizioni degli scarti complementari relative alla coppia di problemi individuata. Dire se la soluzione duale w^T=[-1/2 -1] è ottima giustificandone la risposta.

(P)

$$
\begin{aligned}
&\min\ z = x_1 - \frac{3}{2}x_2 \\
&-x_1 + x_2 \le 4 \\
&-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 5 \\
&x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(D)

$$
\begin{aligned}
&\max\ g = 4w_1 + 5w_2 \\
&-w_1 - \frac{1}{2}w_2 \le 1 \\
&w_1 + w_2 \le -\frac{3}{2} \\
&w_1 \le 0 \quad w_2 \le 0
\end{aligned}
$$

Un altro Esempio: Massimizzazione del Profitto.

- Una azienda produce due tipi di mangime A e B, entrambi costituiti da una miscela di carne e cereali secondo i seguenti rapporti:

		Prodotti	
		A	B
materie prime	Cereali	1 Kg	1.5 Kg
	Carne	2 Kg	1 Kg

La disponibilità giornaliera di cereali è pari a 240 Kg, mentre quella di carne è di 180 Kg.
L'azienda per produrre il mangime A usa una macchina che ogni giorno produce al più 110 confezioni.

- Il ricavo unitario per ciascuno dei due mangimi è:

Prodotto A : 560 Prodotto B: 420

Problema:

determinare le quantità dei due mangimi che debbono essere prodotte giornalmente in modo da rendere massimo il profitto.

Introduciamo due variabili che rappresentano le quantità di prodotto 1 e prodotto 2 confezionate:

confezioni di prodotto 1: x1
confezioni di prodotto 2: x2.

(P) $$\max z = 560x_1 + 420x_2$$

$$x_1 + 1{,}5x_2 \leq 240$$ **Cereali**

$$2x_1 + x_2 \leq 180$$ **Carne**

$$x_1 \leq 110$$ **Macchina**

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Supponiamo che un'altra azienda chieda alla prima di vendergli parte della carne o dei cereali. Qual'è il prezzo minimo al quale la prima azienda deve vendere la carne e i cereali facendo rimanere inalterato il proprio profitto?

Per rispondere a questa domanda risolviamo il problema duale:

Problema (D):

$$\min g = 240w_1 + 180w_2 + 110w_3$$

$$w_1 \quad + 2w_2 + w_3 \geq 560$$

$$1,5w_1 + w_2 \geq 420$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0.$$

La soluzione ottima del problema **primale** (P) è:

$$x_1^* = 15;\ x_2^* = 150;\ x_3^* = x_4^* = 0;\ x_5^* = 95.$$

La soluzione ottima del problema **duale** (D) è:

$$w_1^* = 140;\ \ w_2^* = 210;\ \ w_3^* = w_4^* = w_5^* = 0.$$

Vediamo adesso il significato delle $\underline{x}$ e delle $\underline{w}$ considerando la seguente tabella:

Cereali	**Carne**	x1	x2	x3	x4	x5	w1	w2	w3	w4	w5	z* = g*
240	**180**	15	150	0	0	95	140	210	0	0	0	71400
239	**180**	15,5	149	0	0	94,5	140	210	0	0	0	71260
241	**180**	14,5	151	0	0	95,5	140	210	0	0	0	71540
240	**179**	14,25	150,5	0	0	95,75	140	210	0	0	0	71190
240	**181**	15,75	149,5	0	0	94,25	140	210	0	0	0	71610
250	**200**	25	150	0	0	85	140	210	0	0	0	77000
250	**250**	110	93,3	0	36,6	0	280	0	280	0	0	100800

Riassunto

• Le variabili duali <u>w</u> rappresentano i “prezzi ombra”, ovvero i prezzi minimi a cui bisogna vendere le risorse per mantenere invariato il profitto.

• I prezzi ombra sono validi fino a quando non viene cambiata la base ottima (quando ciò avviene devono essere ricalcolati).

• Quando un vincolo è attivo la risorsa ad esso associata è scarsa. La variabile duale corrispondente, a meno di degenerazione, sarà maggiore di zero. Se invece la risorsa è abbondante sicuramente la variabile duale ad essa associata è nulla.