Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 15

Teoria della dualità:

- Teorema forte della dualità
- Teorema degli scarti complementari

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

2. Teorema (forte) della dualità

Data una coppia di problemi primale duale, (P) e (D), se uno dei due problemi ammette una soluzione ottima finita, allora anche l'altro problema ammette una soluzione ottima finita ed i valori ottimi delle funzioni obiettivo coincidono, i.e.

$$\underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{b}^T \underline{w}^*$$

$$(P)\quad \min \quad \underline{c}^T \underline{x} \qquad\qquad (D)\quad \max \quad \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad\qquad A^T \underline{w} \le \underline{c}$$

$$\underline{x} \ge \underline{0} \qquad\qquad \underline{w} \quad n.v.$$

Dim.: Sia $\underline{x}^*$ la soluzione ottima del primale e sia B la base ad esso associata.

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} \underline{x}_B^* \\ \underline{x}_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{quindi} \quad \underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{c}_B^T \underline{x}_B^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$

Sia $\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$, vogliamo dimostrare che questo vettore è una soluzione ammissibile ed ottima per (D).

$$(P)\quad \min\quad \underline{c}^T\underline{x} \qquad\qquad (D)\quad \max\quad \underline{b}^T\underline{w}$$

$$A\underline{x}=\underline{b} \qquad\qquad A^T\underline{w}\le\underline{c}$$

$$\underline{x}\ge\underline{0} \qquad\qquad \underline{w}\quad n.v.$$

- Ammissibilità ($\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B{}^T A_B{}^{-1}$):

$$A^T\underline{w}^*\le\underline{c} \iff \underline{w}^{*T}A\le\underline{c}^T \implies \underline{c}_B^T A_B^{-1}A\le\underline{c}^T$$

$$\iff \underline{c}_B^T A_B^{-1}A-\underline{c}^T\le\underline{0}^T$$

$$\underline{c}_B^T A_B^{-1}\left[A_B \mid A_N\right]-\left\lfloor\underline{c}_B^T \mid \underline{c}_N^T\right\rfloor=\left\lfloor\underline{c}_B^T \mid \underline{c}_B^T A_B^{-1}A_N\right\rfloor-\left\lfloor\underline{c}_B^T \mid \underline{c}_N^T\right\rfloor=$$

$$=\left\lfloor\underline{c}_B^T-\underline{c}_B^T \mid \underline{c}_B^T A_B^{-1}A_N-\underline{c}_N^T\right\rfloor=\left\lfloor\underline{0}\mid \underline{c}_B^T A_B^{-1}A_N-\underline{c}_N^T\right\rfloor\le\underline{0}^T$$

Poichè $\underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T \leq \underline{0}^T$ è la condizione di ottimalità per (P) (problema di minimizzazione), è verificata l' ammissibilità.

- Ottimalità:

Il valore della funzione obiettivo duale in $\underline{w}^{*T}$ è:

$\underline{w}^{*T}\underline{b} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}\underline{b} = \underline{c}_B^T \underline{x}^*_B = \underline{c}^T\underline{x}^*$

Dal Corollario 1 del teorema della dualità debole sappiamo che, essendo $\underline{c}^T\underline{x}^* = \underline{w}^{*T}\underline{b}$, anche $\underline{w}^{*T}$ è ottima. □

Dal teorema della dualità forte ricaviamo che, data la base ottima B del primale, è possibile calcolare velocemente la soluzione ottima del duale (D) tramite l'equazione: $\underline{w}^{*T} = \underline{c}^T{}_B A_B{}^{-1}$

Riassumendo

Se (P) è illimitato $\Rightarrow$ (D) non è ammissibile

(P) ha soluzione ottima finita $\Leftrightarrow$ (D) ha soluzione ottima finita

Se (P) inammissibile $\Rightarrow$ (D) illimitato o inammissibile

$$\boxed{\underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{b}^T \underline{w}^*}$$

$$A = \left[A_B \mid A_N \right]$$

$$\min \ \underline{c}_B^T \underline{x}_B + \underline{c}_N^T \underline{x}_N$$

$$A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b}$$

$$\underline{x}_B \geq \underline{0} \qquad \underline{x}_N \geq \underline{0}$$

$$\max \ \underline{b}^T \underline{w}$$

$$\underline{w}^T A_B \leq \underline{c}_B^T$$

$$\underline{w}^T A_N \leq \underline{c}_N^T$$

$$\underline{w} \ \text{var.}\,libere$$

una sol. di base (che soddisfa le cond. di ottimalità) per (P)

la corrispondente per (D)

$$\underline{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} \underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{w}^T = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$$

$$\boxed{\underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{b}^T \underline{w}^*}$$

l' ammissibilità per (P)

$$\underline{\bar{x}} \in X \Rightarrow A_B^{-1} \underline{b} \geq \underline{0}$$

l' ammissibilità per (D)

$$\underline{w}^T \in W \Rightarrow \begin{cases} a) & (\underline{c}_B^T A_B^{-1}) A_B \leq \underline{c}_B^T \\ b) & (\underline{c}_B^T A_B^{-1}) A_N \leq \underline{c}_N^T \end{cases}$$

$a) \qquad \underline{c}_B^T \leq \underline{c}_B^T$ (vera sempre)

$b) \qquad \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T \leq \underline{0}$

$$\underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \leq 0 \qquad j \in N$$

sono le (n-m) condizioni di ottimalità (costi ridotti) di (P)

- Solo in corrispondenza dell'ottimo dalla base B ammissibile per (P) si ottiene una soluzione ammissibile per (D) (che in particolare è anche ottima).

- Ad una generica iterazione del simplesso dalla base corrente per (P) si può costruire un vettore $\underline{\pi}^T = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$ che **<u>non è</u>** soluzione di (D).

- Tale vettore è detto dei **MOLTIPLICATORI DEL SIMPLESSO** e compare nel calcolo dei coefficienti di costo ridotto (problema di min):

$$\left(\underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \underline{c}_N^T\right)$$

Il Teorema dello "scarto complementare" (Complementary Slackness Theorem)

Consideriamo la coppia di problemi (P) e (D) in forma canonica e trasformiamoli in forma standard

$$(P) \quad \begin{aligned} &\min\ \underline{c}^T \underline{x} \\ &A\underline{x} \geq \underline{b} \\ &\underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min\ \underline{c}^T \underline{x} \\ &A\underline{x} - I\underline{s} = \underline{b} \\ &\underline{x} \geq \underline{0} \qquad n \text{ var.} \\ &\underline{s} \geq \underline{0} \qquad m \text{ var. } \textit{di surplus} \end{aligned}$$

$$(D) \quad \begin{aligned} &\max\ \underline{b}^T \underline{w} \\ &A^T \underline{w} \leq \underline{c} \\ &\underline{w} \geq \underline{0} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} &\max\ \underline{b}^T \underline{w} \\ &A^T \underline{w} + I\underline{v} = \underline{c} \\ &\underline{w} \geq \underline{0} \qquad m \text{ var.} \\ &\underline{v} \geq \underline{0} \qquad n \text{ var. } \textit{di slack} \end{aligned}$$

Ad ogni variabile di (P) è associato un vincolo di (D) e quindi la corrispondente variabile di slack e viceversa.

3. Teorema della slackness complementare

Data la coppia di soluzioni $\underline{x}$ e $\underline{w}$ rispettivamente ammissibili per (P) e (D), $\underline{x}$ e $\underline{w}$ sono ottime per (P) e (D) se e solo se

$$s_j w_j = (\underline{a}^j \underline{x} - b_j) w_j = 0 \qquad j = 1, \dots, m$$

$$v_i x_i = (c_i - \underline{a}_i^T \underline{w}) x_i = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

dove $\underline{a}^j$ è la j-esima riga di A

$\underline{a}_i$ è la i-esima colonna di A

Esercizio

$$\max \; -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 5$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

1. Scrivere il duale del problema e determinare una coppia di soluzioni primale-duale ammissibile.
2. Verificare che le soluzioni trovate soddisfano il teorema debole della dualità.
3. Verificare se le soluzioni trovate sono ottime.
4. Verificare utilizzando gli scarti complementari se le seguenti soluzioni sono ottime: $x_1 = 2, x_2 = 6, w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = 1$ sono ottime.

Esercizio

(P)

$$\max\ z = -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 5$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

(D)

$$\min\ g = 4w_1 + 5w_2$$

$$-w_1 - \frac{1}{2}w_2 \ge -1$$

$$w_1 + w_2 \ge \frac{3}{2}$$

$$w_1 \ge 0 \quad w_2 \ge 0$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4, z = 5 \qquad z = 5 \le 10 = g \qquad w_1 = 0,\ w_2 = 2, g = 10$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 6, z = 7 \qquad w_1 = \frac{1}{2},\ w_2 = 1, g = 7$$

Esercizio

(P)

$$\max\ z = -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 5$$

$$x_1 \ge 0\ \ x_2 \ge 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\max\ z = -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 \quad = 4$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + s_2 = 5$$

$$\underline{x} \ge \underline{0},\ \ \underline{s} \ge \underline{0}$$

(D)

$$\min\ g = 4w_1 + 5w_2$$

$$-w_1 - \frac{1}{2}w_2 \ge -1$$

$$w_1 + w_2 \ge \frac{3}{2}$$

$$w_1 \ge 0\ \ w_2 \ge 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\min\ g = 4w_1 + 5w_2$$

$$-w_1 - \frac{1}{2}w_2 - v_1 \quad = -1$$

$$w_1 + w_2 \quad - v_2 = \frac{3}{2}$$

$$\underline{w} \ge \underline{0},\ \ \underline{v} \ge \underline{0}$$

Esercizio

(P)

$$\max\ z = -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$
$$-x_1 + x_2 + s_1 = 4$$
$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + s_2 = 5$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{s} \geq \underline{0}$$

(D)

$$\min\ g = 4w_1 + 5w_2$$
$$-w_1 - \frac{1}{2}w_2 - v_1 = -1$$
$$w_1 + w_2 - v_2 = \frac{3}{2}$$
$$\underline{w} \geq \underline{0}, \quad \underline{v} \geq \underline{0}$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 6 \Rightarrow s_1 = 0, s_2 = 0$$

$$w_1 = \frac{1}{2},\ w_2 = 1 \Rightarrow v_1 = 0, v_2 = 0$$

$$\underbrace{(4 + x_1 - x_2)}_{s_1} * w_1 = (4 + 2 - 6) * \frac{1}{2} = 0 * \frac{1}{2} = 0$$

$$\underbrace{(5 + \frac{1}{2}x_1 - x_2)}_{s_2} * w_2 = (5 + 1 - 6) * 1 = 0 * 1 = 0$$

$$\underbrace{(-w_1 - \frac{1}{2}w_2 + 1)}_{v_1} * x_1 = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1) * 2 = 0 * 2 = 0$$

$$\underbrace{(w_1 + w_2 - \frac{3}{2})}_{v_2} * x_2 = (\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2}) * 6 = 0 * 6 = 0$$

$$s_j w_j = (\underline{a}^j \underline{x} - b_j) w_j = 0$$
$$v_i x_i = (c_i - \underline{a}_i^T \underline{w}) x_i = 0$$