Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

Lezione n°7

- Cono di recessione.
- Teorema della rappresentazione.

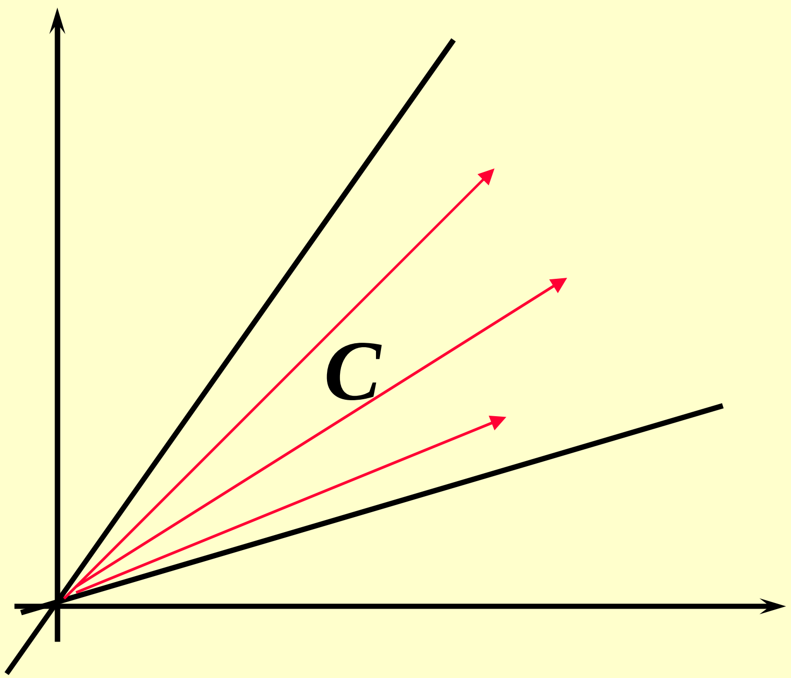
Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Coni Convessi

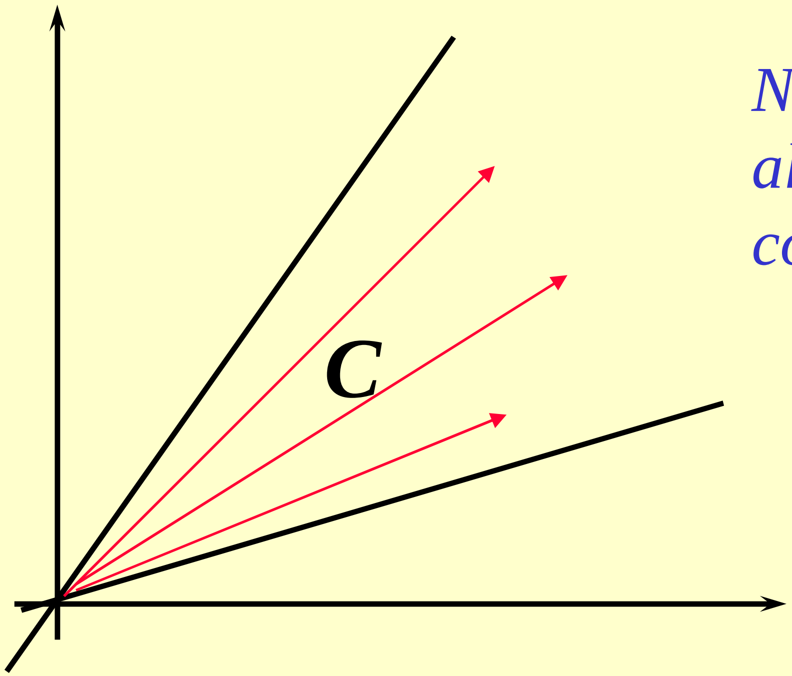
Definizione:

Un cono convesso C è un insieme convesso con la seguente proprietà

$$per\ \ ogni\ \ \underline{x} \in C \Rightarrow \lambda \underline{x} \in C \qquad \lambda \geq 0$$



Un cono convesso è un insieme convesso che contiene raggi che partono dall'origine (perché?)



Nota:
alcuni raggi possono essere espressi come combinazione conica di altri

In generale:
un cono convesso può essere espresso in funzione dei suoi raggi

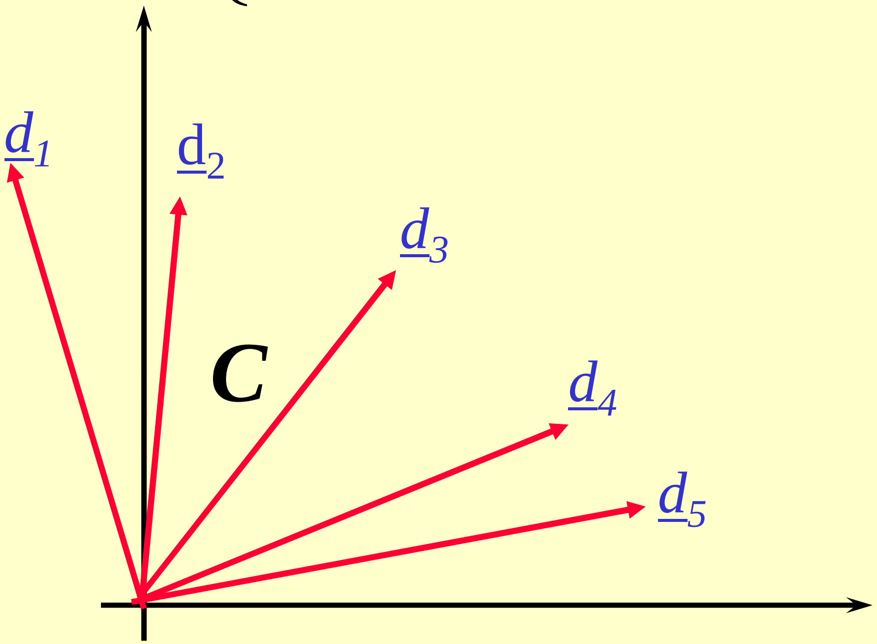
⬇

Solo alcuni raggi sono sufficienti (detti RAGGI ESTREMI) perché gli altri sono espressi come combinazione conica di questi

Coni Convessi

Dato un insieme di vettori $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \ldots, \underline{d}_k$ il cono convesso generato da questi vettori è dato da:

$$C = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underline{d}_j : \lambda_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,k \right\}$$



Direzioni estreme di un poliedro

Definizione

Una direzione $\underline{d}$ di un poliedro X, è una **direzione estrema** di X se e solo se non è esprimibile come combinazione conica di altre direzioni di X.

Come si calcolano le direzioni di un poliedro?

(Procedimento geometrico)

$$X = \{ \underline{x} : A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \}$$ (poliedro)

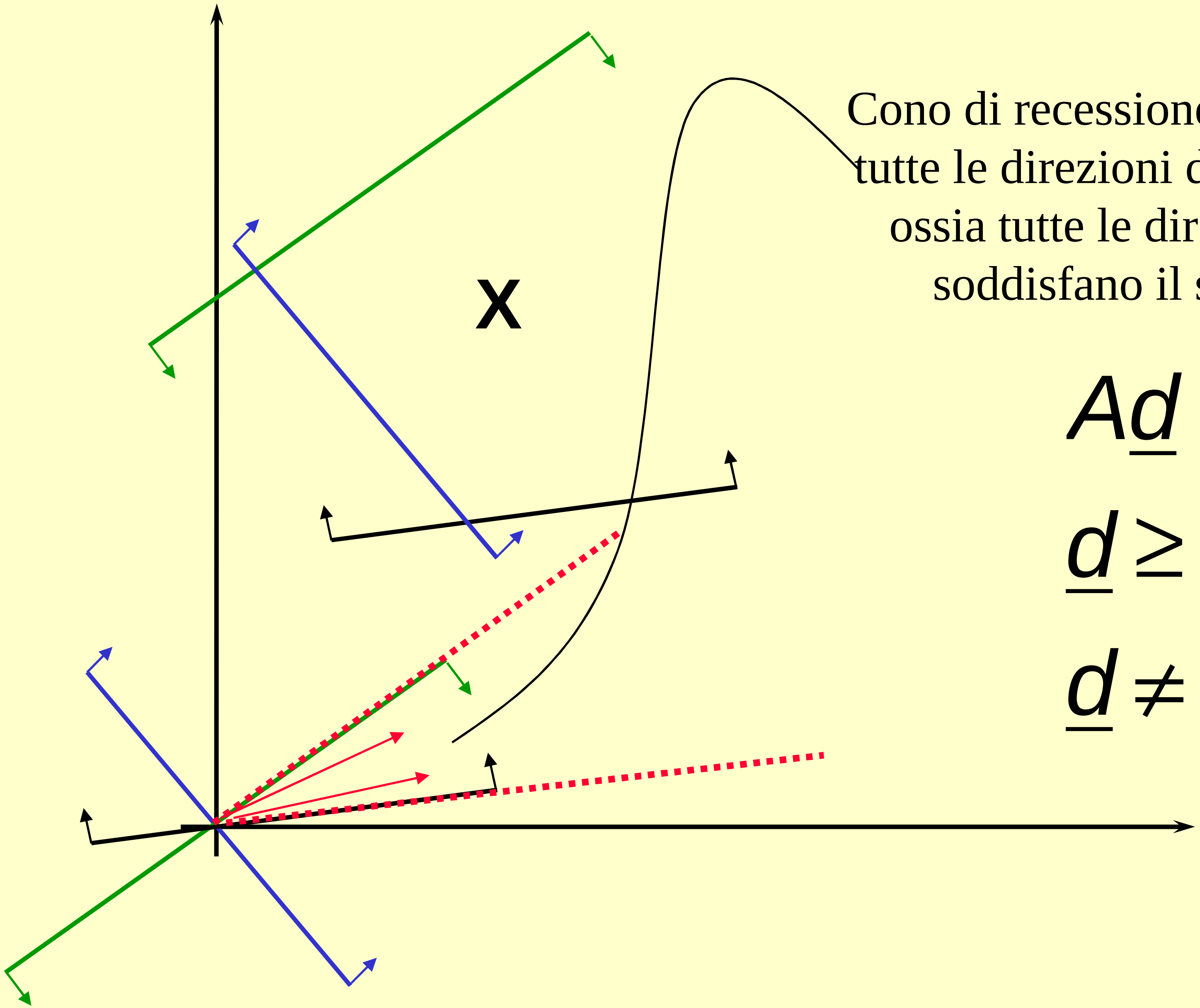
Abbiamo visto che $\underline{d}$ è una a direzione del poliedro se:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$

$$\underline{d} \geq \underline{0}$$

$$\underline{d} \neq \underline{0}$$

Questo è un sistema omogeneo che definisce un cono poliedrico (detto CONO di RECESSIONE) ottenuto traslando gli iperpiani che definiscono X parallelamente a se stessi fino all'origine

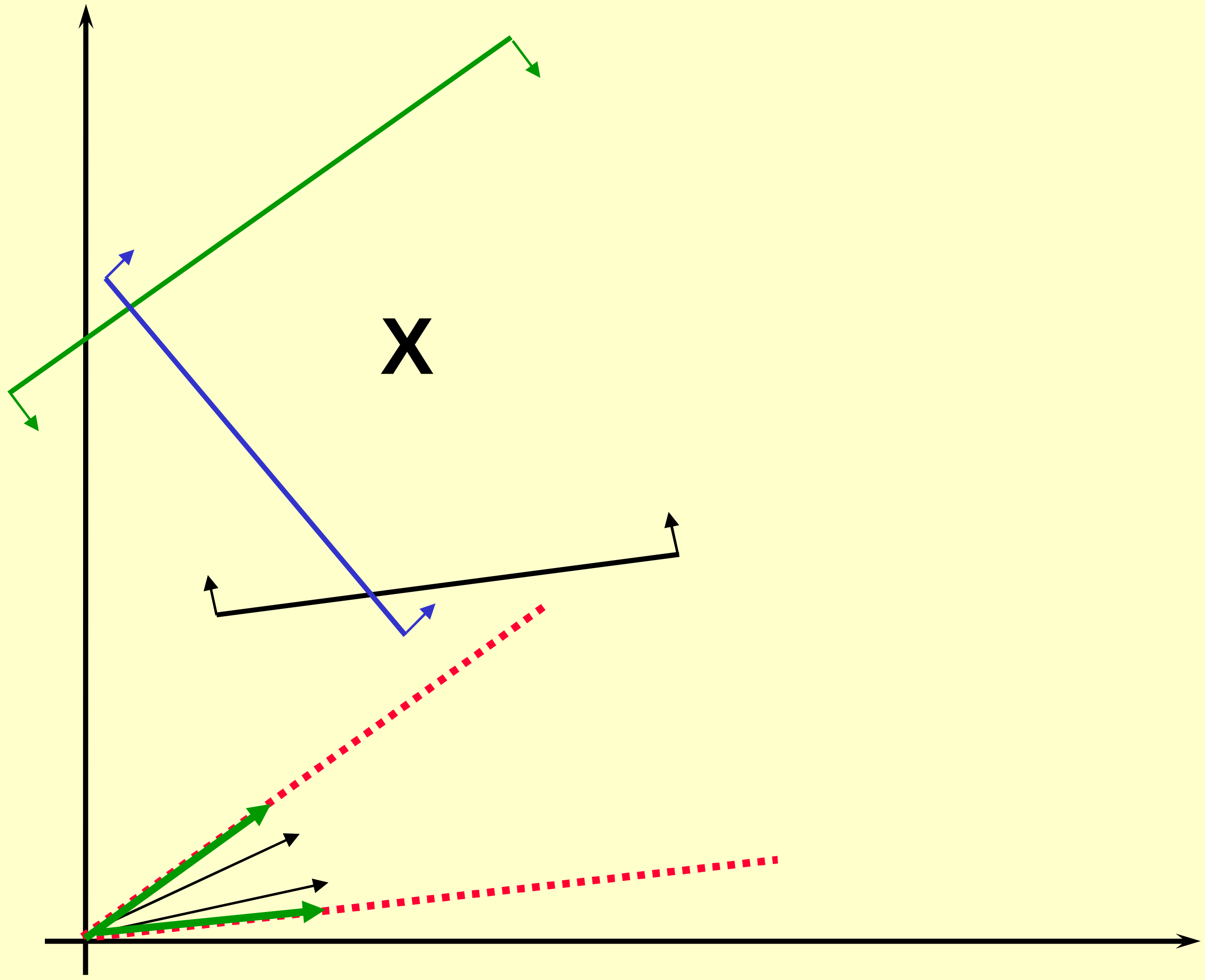


Cono di recessione contenente tutte le direzioni del poliedro, ossia tutte le direzioni che soddisfano il sistema:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$

$$\underline{d} \geq \underline{0}$$

$$\underline{d} \neq \underline{0}$$



Direzioni estreme del poliedro (direzioni estreme del cono di recessione)

Teorema (di rappresentazione di poliedri) (no dim.)

Dato un poliedro X non vuoto con punti estremi

$$\underline{x}_i \quad i = 1,2,\ldots,k$$

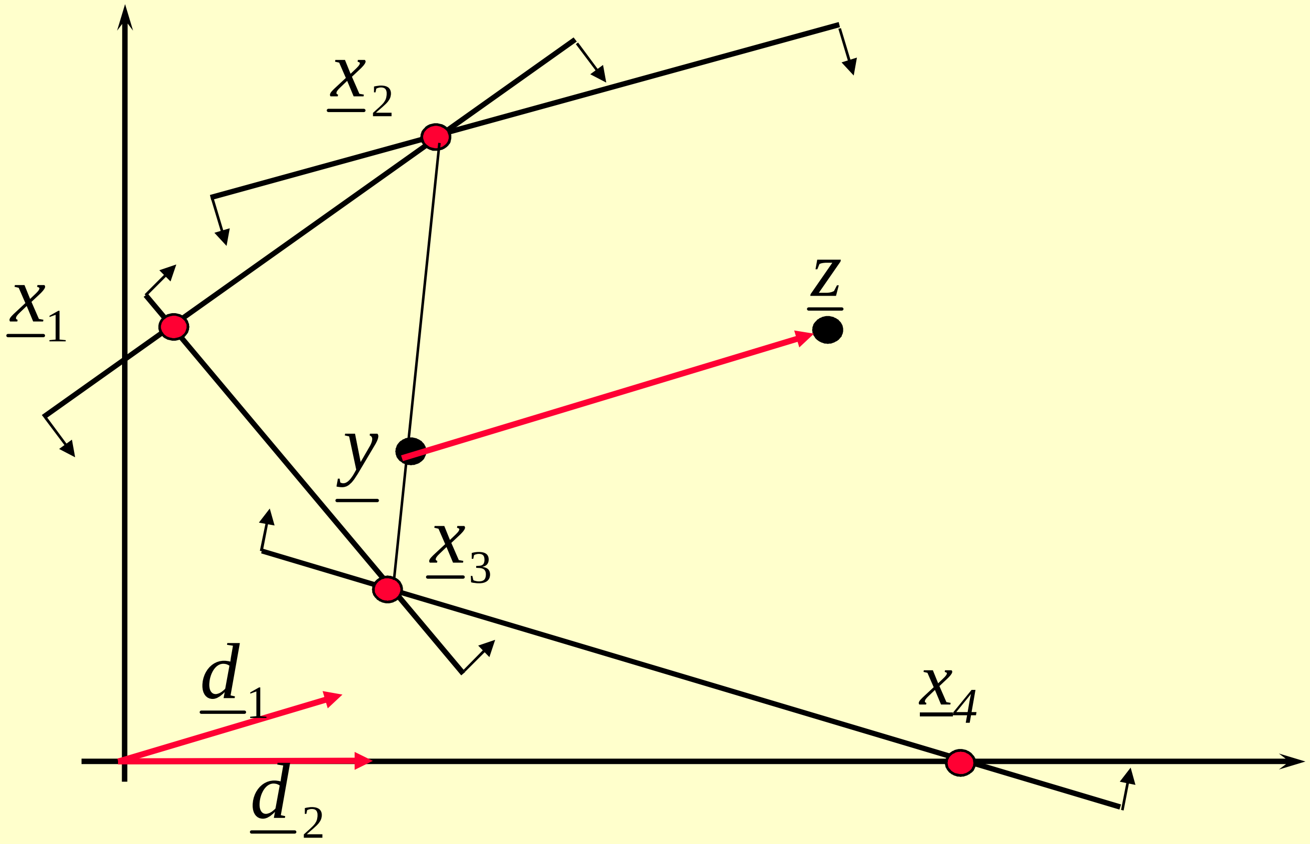
e direzioni estreme $\underline{d}_j \quad j = 1,2,\ldots,t$

Ogni punto $\underline{x} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione lineare non negativa delle sue direzioni estreme:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j \underline{d}_j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,k$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,t$$



$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + (1-\lambda)\underline{x}_3 \qquad \lambda \in (0,1)$$

$$\underline{z} = \underline{y} + \mu \underline{d}_1 \qquad \mu \geq 0$$

quindi: $$\underline{z} = \lambda \underline{x}_2 + (1-\lambda)\underline{x}_3 + \mu \underline{d}_1$$

Soluzione dei problemi di PL

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard

$$\begin{aligned} \min\ z &= \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.}\ A\underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

$\underline{x}_i \quad i = 1,2,\ldots,k$ punti estremi $\qquad \underline{d}_j \quad j = 1,2,\ldots,t$ direzioni estreme

Ogni punto $\underline{x} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione lineare non negativa delle sue direzioni estreme:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j \underline{d}_j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,k \quad \mu_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,t$$

Possiamo trasformare il problema di PL in un nuovo problema con incognite:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \text{ e } \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$$

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{k} (\underline{c}^T \underline{x}_i)\lambda_i + \sum_{j=1}^{t} (\underline{c}^T \underline{d}_j)\mu_j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,k \quad \mu_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,t$$

Nota:

1. se esiste una direzione $\underline{d}_j$ tale che $\underline{c}^T\underline{d}_j < 0$ $\Rightarrow$ *l'ottimo del problema è illimitato*

2. se $\underline{c}^T\underline{d}_j \geq 0$ per ogni $\underline{d}_j$ $\Rightarrow$
   - *le corrispondenti variabili $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$ sono scelte uguali a zero*

   - *per minimizzare il resto della sommatoria basta calcolare tutti i valori $\underline{c}^T\underline{x}_i$, scegliere il minimo ad esempio $\underline{c}^T\underline{x}_p$* ***e fissare*** $\lambda_p = 1$ *e tutti gli altri uguali a zero*

RIASSUMENDO:

1. la soluzione ottima di un problema di programmazione lineare è finito se e solo se $\underline{c}^T\underline{d}_j \geq 0$ per ogni $\underline{d}_j$

2. in questo caso una soluzione ottima si trova su uno dei vertici del poliedro

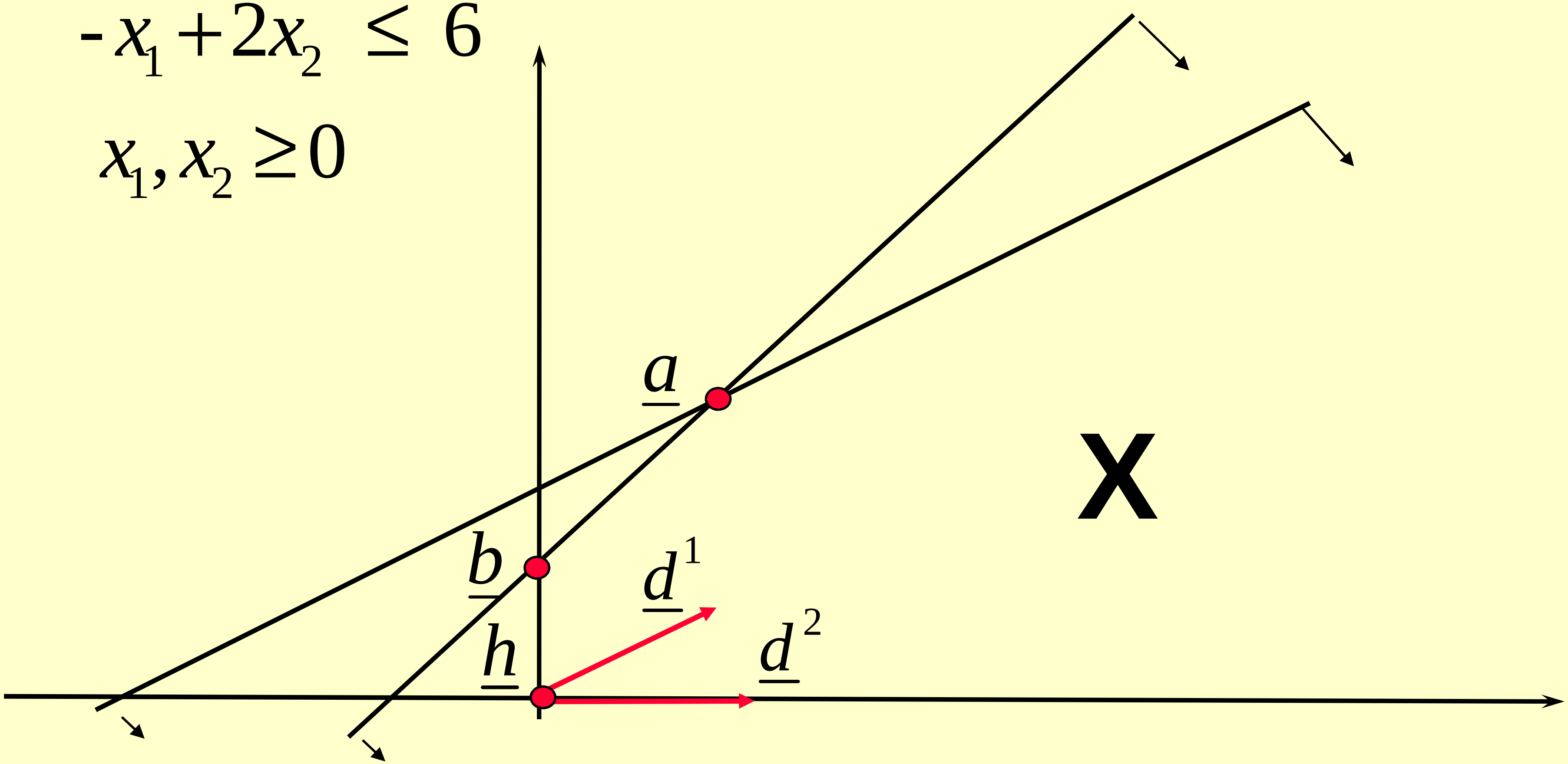
3. se esistono più vertici ottimi allora ogni combinazione convessa di questi punti è una soluzione ottima

Soluzione dei problemi di PL: esempio

$$\min \quad z = x_1 - 3x_2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Calcoliamo punti estremi

e direzioni estreme

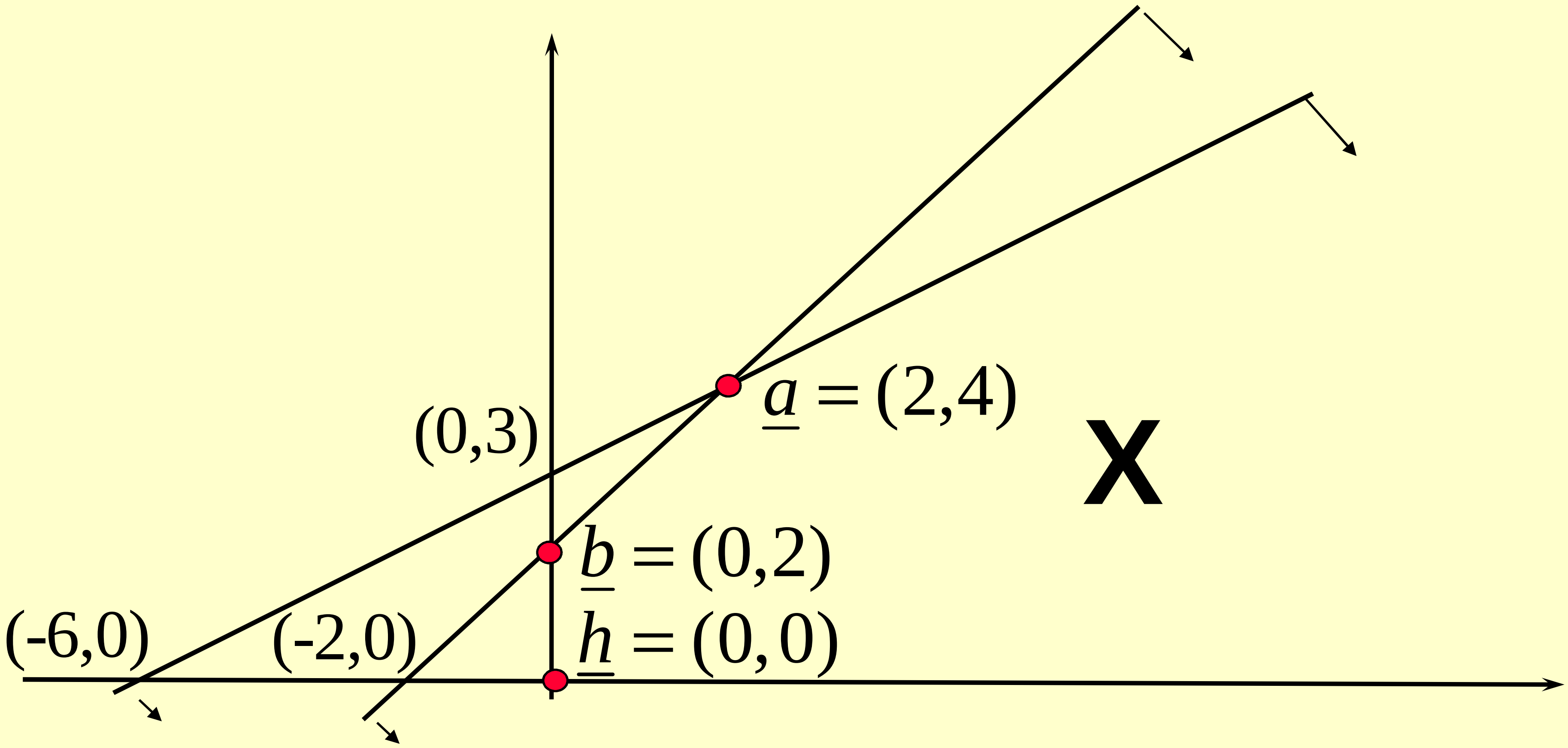


Soluzione dei problemi di PL: esempio(2)

$-x_1 + x_2 = 2;\ \mathrm{x}_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{x}_2 = 2;\ \mathrm{x}_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{x}_1 = -2$

$-x_1 + 2x_2 = 6;\ \mathrm{x}_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{x}_2 = 3;\ \mathrm{x}_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{x}_1 = -6$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 + x_1 \\ -x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow -x_1 + 4 + 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4 \end{cases}$$



Soluzione dei problemi di PL: esempio(3)

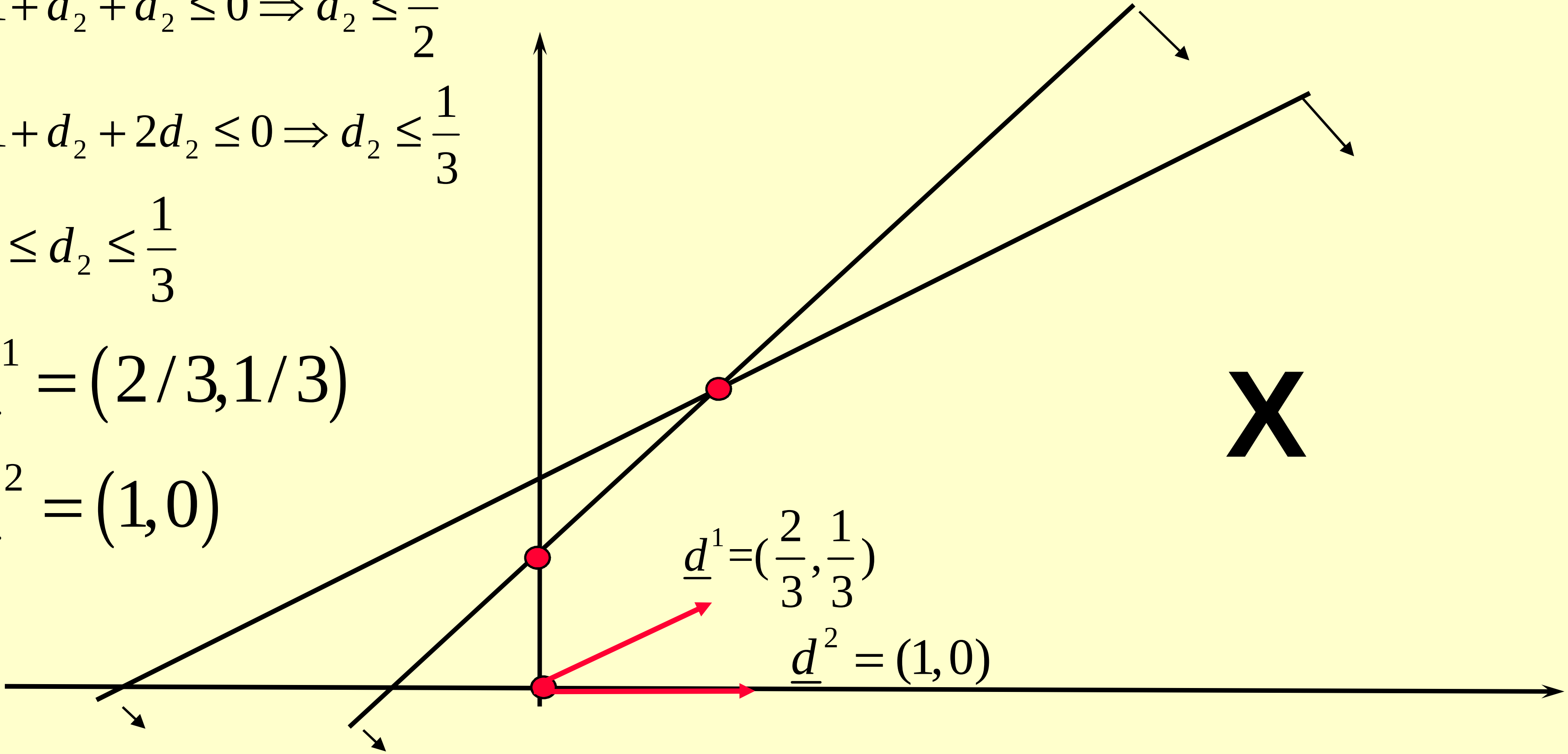
$$D=\begin{Bmatrix}(d_1,d_2):-d_1+d_2\le 0,-d_1+2d_2\le 0, d_1+d_2=1\\ d_1\ge 0, d_2\ge 0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} d_1=1-d_2 \\ -1+d_2+d_2\le 0 \Rightarrow d_2\le \frac{1}{2} \\ -1+d_2+2d_2\le 0 \Rightarrow d_2\le \frac{1}{3}\end{cases}$$

$$0\le d_2\le \frac{1}{3}$$

$$\underline{d}^1=(2/3,1/3)$$

$$\underline{d}^2=(1,0)$$



Soluzione dei problemi di PL: esempio(4)

$$\min \quad z = x_1 - 3x_2 \Rightarrow \underline{c}^T = (1,-3)$$

$$\underline{c}^T \underline{h} = (1,-3)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0; \; \underline{c}^T \underline{b} = (1,-3)\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = -6; \; \underline{c}^T \underline{a} = (1,-3)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = -10;$$

$$\underline{c}^T \underline{d}^1 = (1,-3)\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix} = -1/3; \; \underline{c}^T \underline{d}^2 = (1,-3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1;$$

$$\min \; 0\lambda_1 - 6\lambda_2 - 10\lambda_3 - 1/3\mu_1 + \mu_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Ottimo illimitato

(facendo tendere μ_1 a ∞ la f.o. tende a - ∞ indipendentemente dai valori scelti per le altre variabili)

Soluzione dei problemi di PL: esempio(5)

Consideriamo una differente funzione obiettivo

$$\min \quad z \quad = \quad 4x_1 - x_2 \Rightarrow \underline{c}^T = (4,-1)$$

$$\underline{c}^T \underline{h} = (4,-1)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0;\ \underline{c}^T \underline{b} = (4,-1)\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = -2;\ \underline{c}^T \underline{a} = (4,-1)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 4;$$

$$\underline{c}^T \underline{d}^1 = (4,-1)\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix} = 7/3;\ \underline{c}^T \underline{d}^2 = (4,-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 4;$$

$$\min \ 0\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 7/3\mu_1 + 4\mu_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Ottimo finito di valore -2 in corrispondenza del vertice $\underline{b}$, ottenuto assegnando alle variabili i valori

$\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 1$