Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 6

- Definizione di Iperpiano.
- Insiemi convessi.
- Politopi e poliedri.
- Punti estremi di un poliedro.
- Direzioni estreme di un poliedro.

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Iperpiano: generalizzazione della retta

Definizione:

Un insieme geometrico H è un iperpiano se e solo se:

$$H = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} = k\}$$

o equivalentemente

$$H = \{\underline{x} : p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = k\}$$

$\underline{p}$ è un vettore e k è uno scalare

Il vettore $\underline{p} \neq \underline{0}$ è detto gradiente o normale dell'iperpiano, ed è la direzione di crescita dell'iperpiano

Iperpiano: in particolare

Consideriamo un punto $\underline{x}_0$ di H ed il gradiente $\underline{p}$. L'iperpiano H è l'insieme dei vettori $\underline{x}$ tali che il vettore $\underline{x}-\underline{x}_0$ è perpendicolare a $\underline{p}$

$$\underline{x}_0 \in H \quad \Rightarrow \quad \underline{p}^T \underline{x}_0 = k$$

$$\underline{x} \in H \quad \Rightarrow \quad \underline{p}^T \underline{x} = k$$

sottraendo*:*

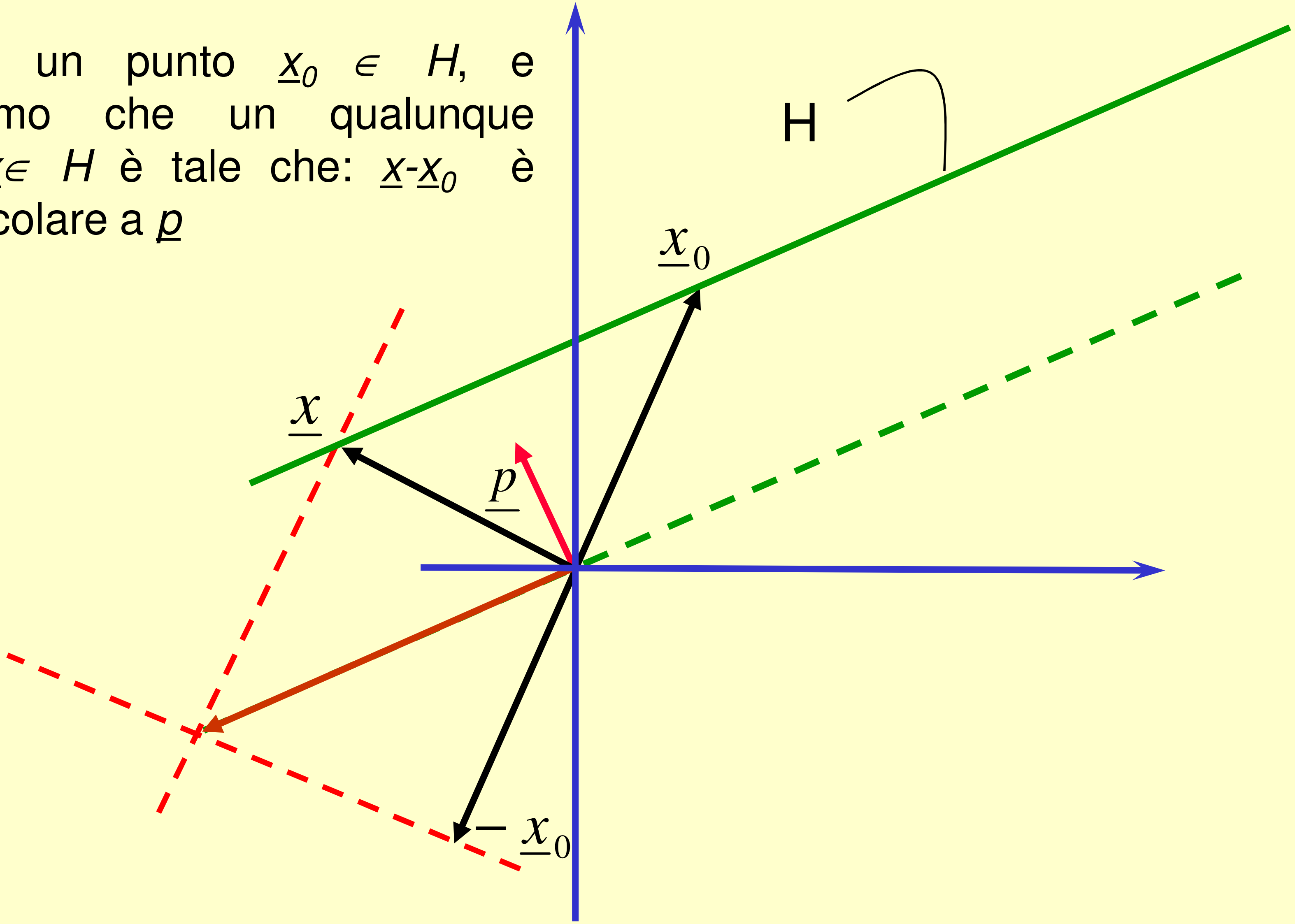
$$\underline{p}^T (\underline{x} - \underline{x}_0) = 0$$

se due vettori hanno prodotto interno nullo allora sono perpendicolari

Esempio in E^2

$$H = \left\{ (x_1, x_2) : p_1 x_1 + p_2 x_2 = k \right\}$$

Fissiamo un punto $\underline{x}_0 \in H$, e verifichiamo che un qualunque vettore $\underline{x} \in H$ è tale che: $\underline{x}$-$\underline{x}_0$ è perpendicolare a $\underline{p}$

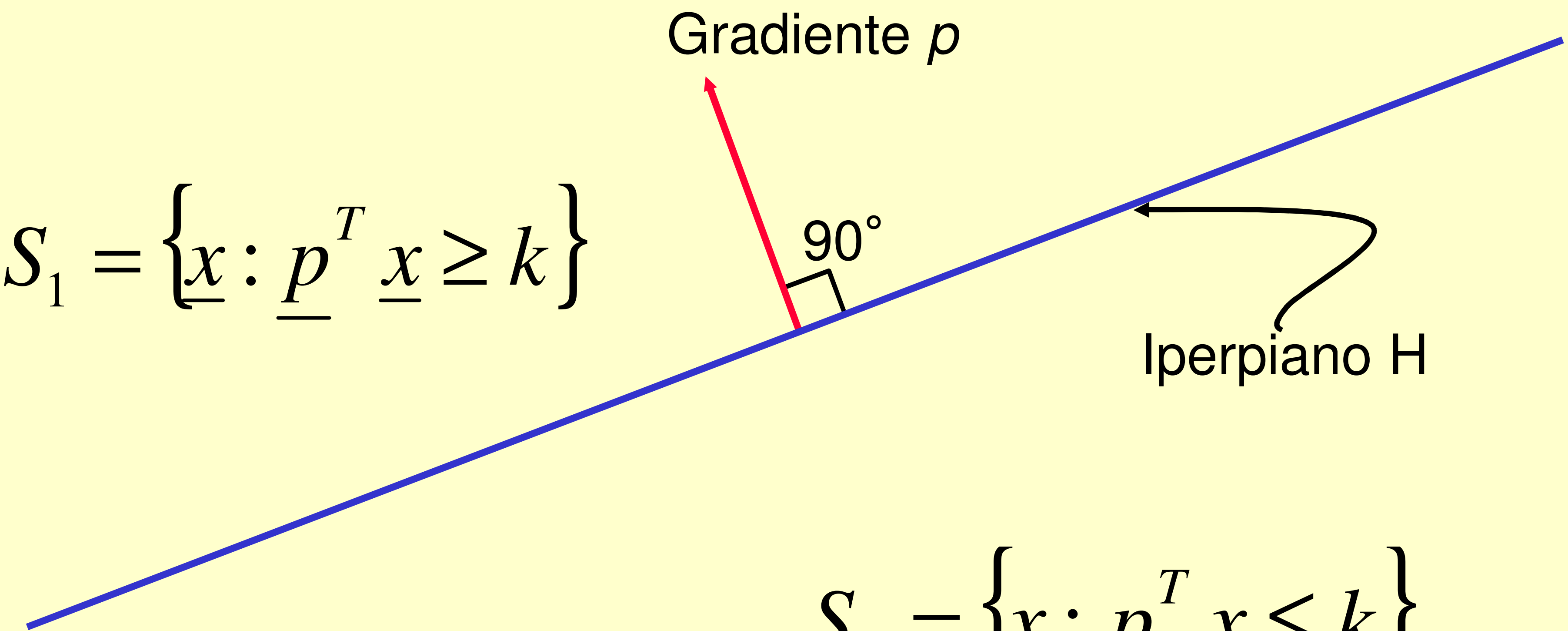


Un iperpiano H divide lo spazio E^n cui appartiene in due semispazi

$$H = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} = k\}$$

$$S_1 = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \geq k\} \qquad S_2 = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \leq k\}$$

Esempio



$$S_1 = \left\{ \underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \geq k \right\}$$

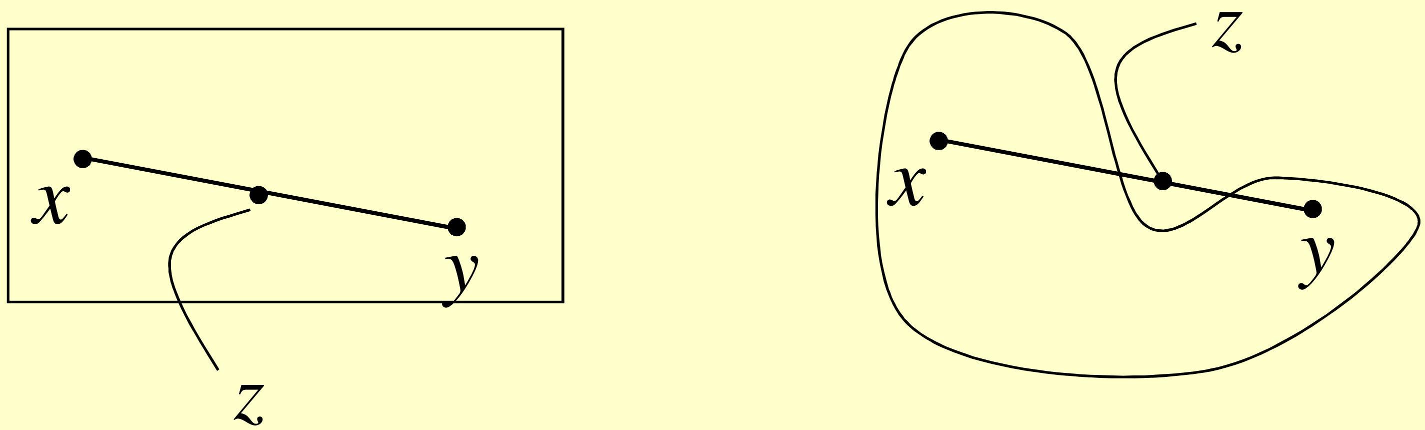
$$S_2 = \left\{ \underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \leq k \right\}$$

Insieme convesso

Def: Un insieme X è convesso se e solo se dati due punti, $x,y \in X$ ogni punto z generato come loro combinazione convessa:

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \qquad \lambda \in [0,1]$$

è tale che $z \in X$



Alcuni insiemi convessi

$$X = \{ \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b} \}$$

Dim.
Dobbiamo dimostrare che un qualunque punto $y \in X$ può essere espresso come combinazione convessa di due altri punti di X

Consideriamo x, $y \in X$ generici.

$$\underline{x} \in X \Rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{y} \in X \Rightarrow A\underline{y} = \underline{b}$$

Considero il punto z espresso come combinazione convessa di x ed y

$$\underline{z} = \lambda \underline{x} + (1 - \lambda)\underline{y} \qquad \lambda \in [0,1]$$

Dobbiamo verificare che z appartiene ad X

Alcuni insiemi convessi: $X = \{ \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b} \}$

$$\underline{z} = \lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$$

Premoltiplico per la matrice A

$$A\underline{z} = \lambda A\underline{x} + (1-\lambda) A\underline{y}$$

Poiché $\underline{x}$ ed $\underline{y}$ appartengono ad X

$$A\underline{z} = \lambda \underline{b} + (1-\lambda)\underline{b} = \lambda \underline{b} + \underline{b} - \lambda \underline{b} = \underline{b}$$

Altri insiemi convessi

- Un **Iperpiano** è un insieme convesso
- Un **Semispazio** è un insieme convesso
- L'**intersezione** di iperpiani/semispazi produce un insieme convesso

---

Un **poliedro** è l'intersezione di un numero finito di <u>semispazi</u>

⬇

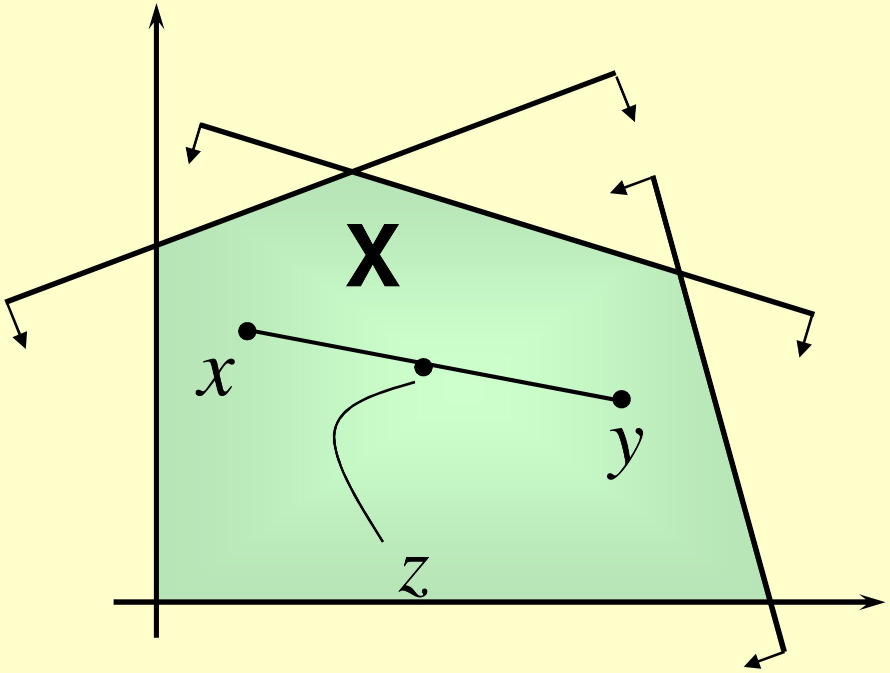
Un poliedro X è un **insieme convesso**

poliedro chiuso e limitato

(Politopo)

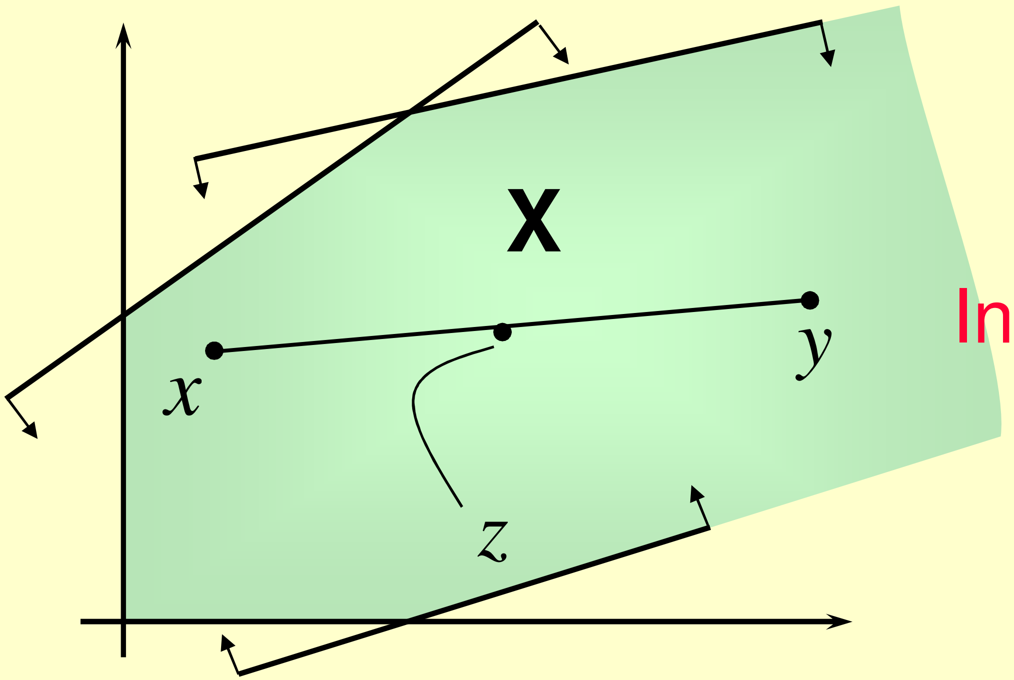
poliedro illimitato

Esempio: politopo



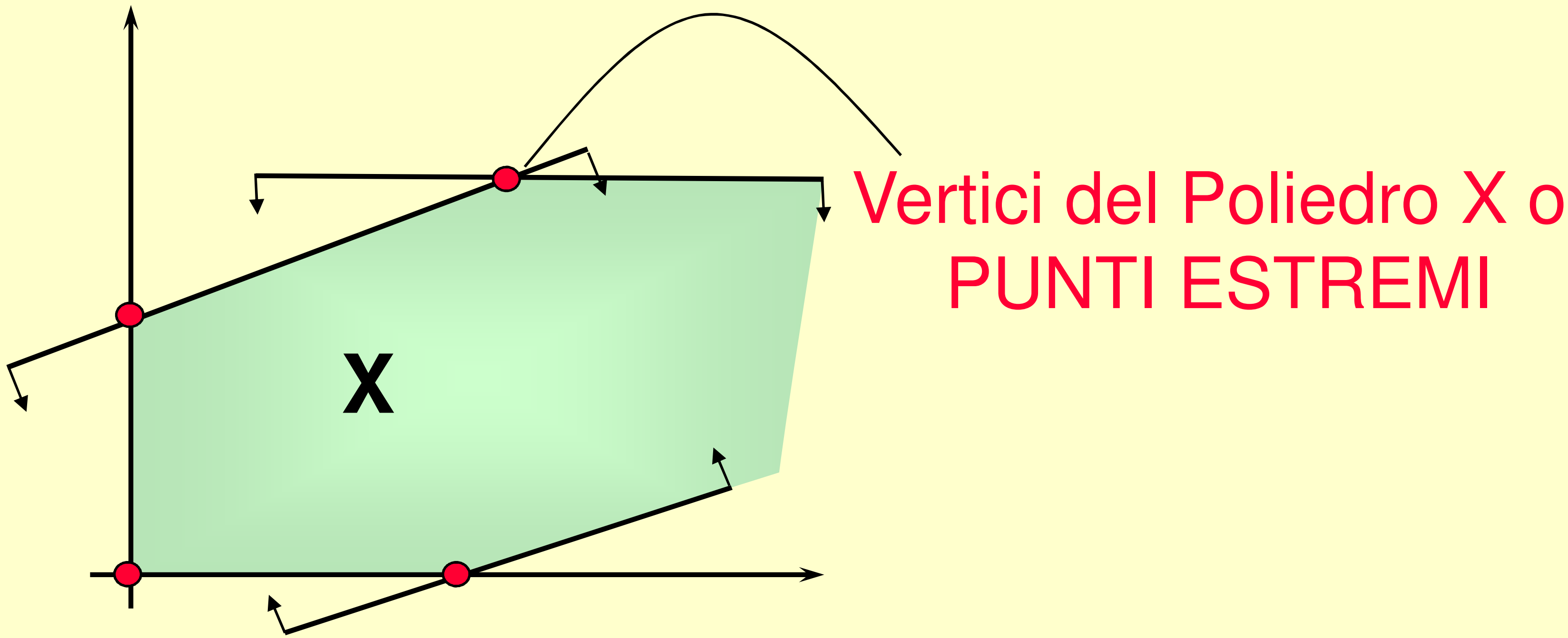
Insieme convesso

Esempio: poliedro illimitato



Insieme convesso

Vertici di un poliedro



Definizione

Un punto di un poliedro X è un **punto estremo** se e solo se non può essere espresso come combinazione convessa STRETTA di altri punti di X.

Teorema (no dim.)

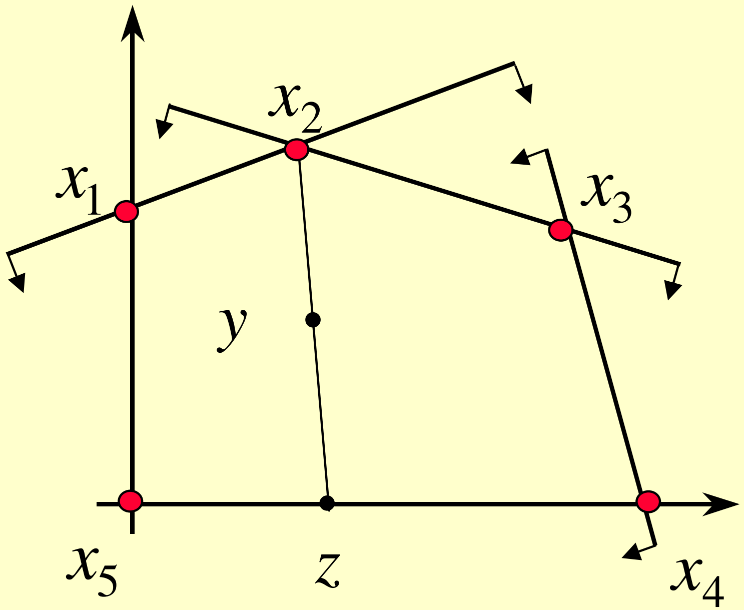
(Proprietà dei punti estremi di un poliedro limitato)

Dato X poliedro limitato e chiuso non vuoto con punti estremi $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$ ogni punto $\underline{y} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X, cioè:

$\underline{y} = \sum_{j=1 \dots k} \lambda_j \underline{x}_j$ con $\sum_{j=1 \dots k} \lambda_j = 1$ e $\lambda_j \geq 0 \; \forall j = 1, \dots, k$

Esempio Teorema

Voglio esprimere $\underline{y}$ come combinazione convessa dei vertici del politopo



$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + (1-\lambda)\underline{z} \qquad \lambda \in (0,1)$$

$$\underline{z} = \mu \underline{x}_5 + (1-\mu)\underline{x}_4 \qquad \mu \in (0,1)$$

sostituisco:

$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + \mu(1-\lambda)\underline{x}_5 + (1-\mu)(1-\lambda)\underline{x}_4$$

Nota che :

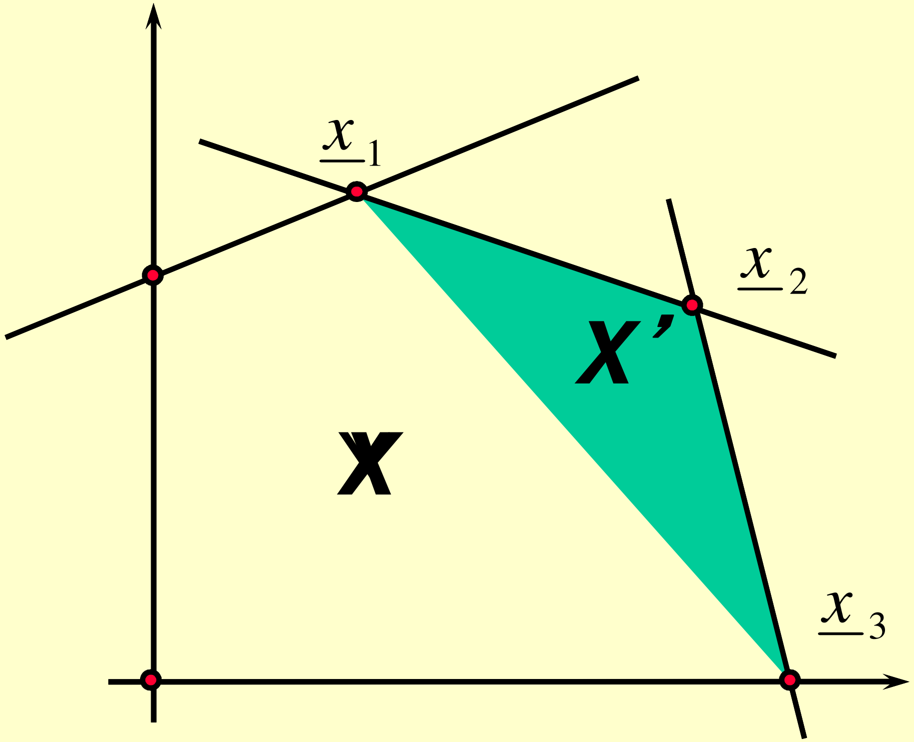
1. $\lambda \geq 0 \qquad \mu(1-\lambda) \geq 0 \qquad (1-\mu)(1-\lambda) \geq 0$

2. $\lambda + \mu(1-\lambda) + (1-\mu)(1-\lambda) = \lambda + (1-\lambda)(\mu + 1 - \mu) = 1$

c.v.d.

In generale:

la combinazione convessa di $\underline{x}_1$ $\underline{x}_2$ $\underline{x}_3$ permette di ottenere tutti i punti di X' $\subset$ X



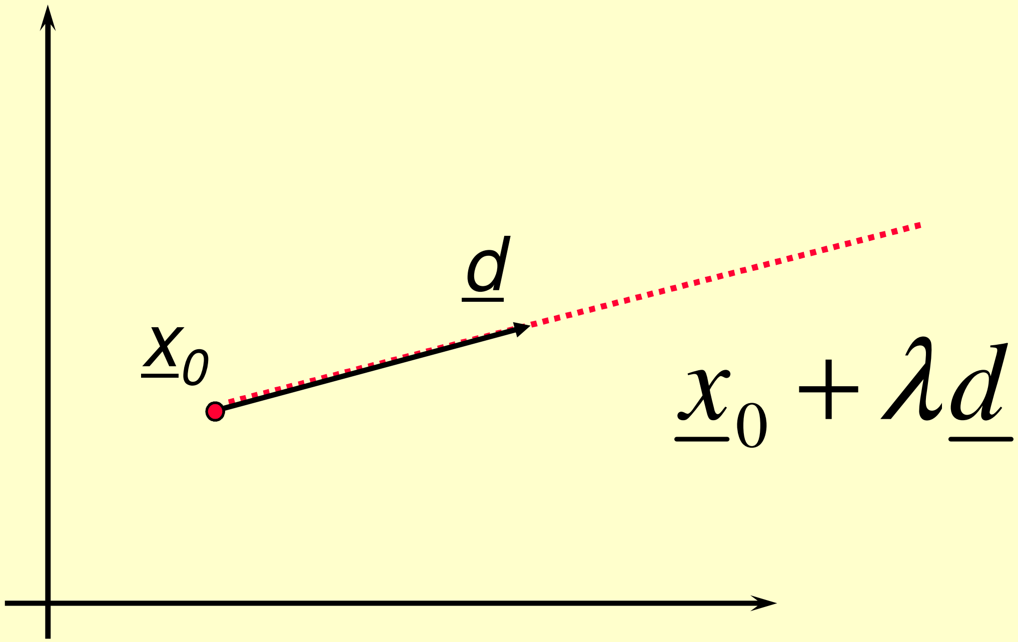
Quando un poliedro è illimitato?

Bisogna considerare le sue direzioni estreme

Raggi e direzioni di un poliedro

Def. Un RAGGIO di vertice $\underline{x}_0$ e di direzione $\underline{d}$ è un insieme di punti della forma:

$$R = \{\ \underline{x} = \underline{x}_0 + \lambda \underline{d} : \lambda \geq 0\}$$



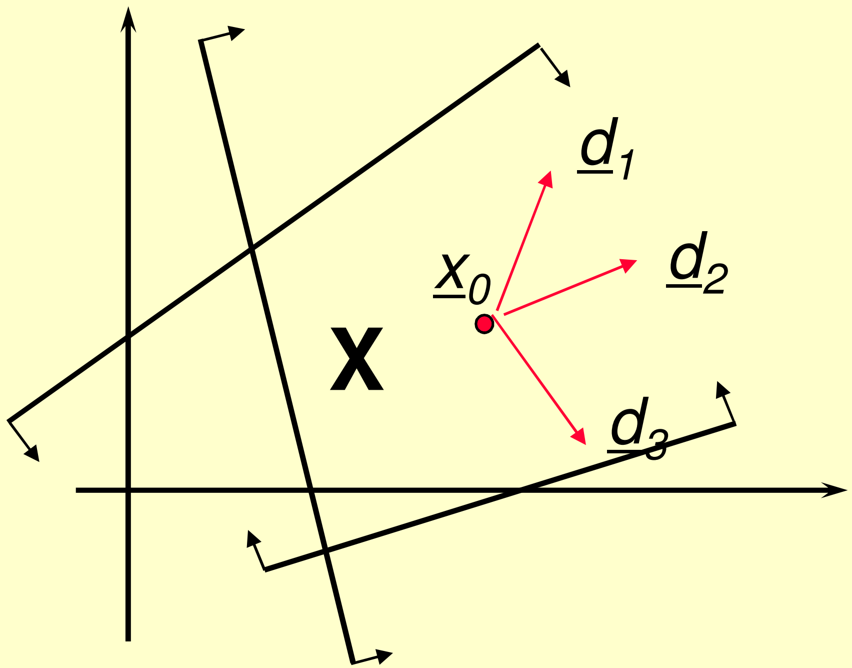
Raggi e direzioni di un poliedro

Definizione

Dato un poliedro X, il vettore $\underline{d}$ è una **direzione** di X se e solo se per ogni punto $\underline{x}_0$ nell'insieme, il raggio

$$\underline{x}_0 + \lambda \underline{d}, \ \lambda \geq 0$$

appartiene a X



$\underline{d}_1$ NON è direzione

$\underline{d}_2$ è direzione

$\underline{d}_3$ NON è direzione

Come si calcolano le direzioni di un poliedro?

(Procedimento algebrico)

$$X = \left\{ \underline{x} : A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \right\}$$ (poliedro)

Considerato un qualunque punto $\underline{x} \in X$:

$\underline{d}$ è una direzione del poliedro se

$$(i) \quad A(\underline{x} + \lambda \underline{d}) \leq \underline{b}$$

$$(ii) \quad \underline{x} + \lambda \underline{d} \geq \underline{0}$$

$$(iii) \quad \underline{d} \neq \underline{0}$$

da cui:

$$(i)\quad A(\underline{x}+\lambda\underline{d})\le\underline{b}$$
$$(ii)\quad \underline{x}+\lambda\underline{d}\ge\underline{0}$$
$$(iii)\quad \underline{d}\ne\underline{0}$$

(i) poiché $\underline{x}\in X$:

$$A(\underline{x}+\lambda\underline{d})\le\underline{b}\Leftrightarrow A\underline{x}+\lambda A\underline{d}\le\underline{b}\Leftrightarrow \lambda A\underline{d}\le 0\Leftrightarrow A\underline{d}\le\underline{0}$$

$$(ii)\quad \underline{x}+\lambda\underline{d}\ge\underline{0}\Leftrightarrow \underline{d}\ge\underline{0}$$

Quindi le direzioni $\underline{d}$ del poliedro X sono tutti e soli i vettori tali che:

$$A\underline{d}\le\underline{0}$$
$$\underline{d}\ge\underline{0}$$
$$\underline{d}\ne\underline{0}$$

Adesso vediamo un esempio poi vediamo come si interpretano geometricamente

Esempio 1

$$X = \begin{cases} (x_1, x_2) : -3x_1 + x_2 \le -2,\ -x_1 + x_2 \le 2, -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

L'insieme delle direzioni di X è dato dai vettori

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{cases} (d_1, d_2) : -3d_1 + d_2 \le 0,\ -d_1 + d_2 \le 0, -d_1 + 2d_2 \le 0 \\ d_1 + d_2 = 1,\ d_1 \ge 0,\ d_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\underline{d}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \underline{d}'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 2

$$X = \{ (x_1, x_2) : x_1 - 2x_2 \geq -6 \quad x_1 - x_2 \geq -2 \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 1 \}$$

L'insieme delle direzioni di X è dato dai vettori

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} d_1 - 2d_2 \geq 0 \\ d_1 - d_2 \geq 0 \\ d_1 \geq 0 \\ d_2 \geq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} d_1 \geq 2d_2 \\ d_1 \geq d_2 \\ d_1 \geq 0 \\ d_2 \geq 1 \end{cases}$$