Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

Lezione n° 5: Esercitazione

- Vettori linearmente dipendenti e indipendenti
- Combinazioni lineari, coniche e convesse
- Formulazioni

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti.

I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n = \underline{0}$ implica che $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti.

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 - 14\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 6\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases}$$

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti.

$$\begin{cases} -10\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 2/5\ \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10\ (2/5\ \lambda_3) + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 2/5\ \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4\lambda_3 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 2/5\ \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 2/5\ \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Sono linearmente indipendenti

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti. Metodo alternativo

Costruiamo la matrice $A=(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. A è invertibile sse le sue righe (le sue colonne) sono linearmente indipendenti
2. A è invertibile sse il suo determinante è diverso da zero.

Se $\det(A)\neq 0$ le righe (le colonne) di A sono linearmente indipendenti.

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T$=(4, 1, 2), $\underline{x}_2^T$=(7, 3, 1) e $\underline{x}_3^T$ = (3, 2, 0)

sono linearmente indipendenti o dipendenti. Metodo alternativo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot (14 - 9) - 1 \cdot (8 - 3) + 0 \cdot (12 - 7)$$

$$= 10 - 5 = 5 \neq 0$$ Sono linearmente indipendenti

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Cambiare, ora, il vettore $\underline{x}_1^T = (4, 1, 2)$ con $\underline{x}_1^T = (4, 1, 1)$ e verifichiamo se:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 1)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti.

$$\lambda_1\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 = -\lambda_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4\lambda_2 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0\\ -\lambda_2 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 = -\lambda_2\end{cases}$$

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

$$\begin{cases} -4\lambda_2 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases}$$

Fissiamo $\lambda_3 = 1$ ottenendo $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_1 = 1$.

$$1\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poichè la combinazione lineare dei tre vettori con questi coefficienti restituisce il vettore nullo, $\underline{x}_1^T$, $\underline{x}_2^T$, $\underline{x}_3^T$ non sono lineamente indipendenti.

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare che I tre vettori sono linearmente dipendenti con il metodo alternativo.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante di A è zero?

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

1) Fornire un esempio di vettori in R^3 linearmente indipendenti e linearmente dipendenti.
2) Verificare se i seguenti vettori:

   $\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$ e $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$

   e

   $\underline{x}_3^T=(4, 1)$, $\underline{x}_4^T=(7/2, 5)$ e $\underline{x}_5^T = (3, 2)$

   sono linearmente indipendenti o dipendenti.
3) I vettori $\underline{x}_1^T$ e $\underline{x}_2^T$ formano una base di R^3?
4) I vettori $\underline{x}_3^T$, $\underline{x}_4^T$ e $\underline{x}_5^T$ formano una base di R^2?
5) I vettori $\underline{x}_3^T$, e $\underline{x}_5^T$ formano una base di R^2?

Combinazioni lineari, coniche e convesse

- *Un vettore y è combinazione LINEARE dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$*

- *Un vettore y è combinazione CONICA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ e $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$*

- *Un vettore y è combinazione CONVESSA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ e $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$*

Esercizi:

Determinare **geometricamente** se:

1)il vettore $\underline{y}^T=(8/3, 5/3)$ è combinazione **conica** dei vettori $\underline{x}_1^T=(1, 1)$ e $\underline{x}_2^T = (2, -1)$.

2)il vettore $\underline{y}^T=(1,3)$ è combinazione **convessa** dei vettori $\underline{x}_1^T=(1, 1)$ e $\underline{x}_2^T = (2, -1)$.

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare analiticamente se il vettore $\underline{y}^T=(1, 3)$ è combinazione convessa dei vettori $\underline{x}_1^T=(1, 1)$ e $\underline{x}_2^T = (2, -1)$.

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1+\lambda_2=1$$

$$\lambda_1,\lambda_2\geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1\\ \lambda_1 - \lambda_2 = 3\\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1\\ \lambda_1 - \lambda_2 = 3\\ \lambda_1 = 1 - \lambda_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-\lambda_2 + 2\lambda_2 = 1\\ 1-\lambda_2 - \lambda_2 = 3\\ \lambda_1 = 1 - \lambda_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_2 = 0\\ -2\lambda_2 = 2\\ \lambda_1 = 1 - \lambda_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_2 = 0\\ \lambda_2 = -1\\ \lambda_1 = 1 - \lambda_2\end{cases}$$

Il sistema non ammette soluzioni quindi $\underline{y}^T$ NON è combinazione convessa di $\underline{x}_1^T$ e $\underline{x}_2^T$.

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare analiticamente se il vettore $\underline{y}^T=(5/3, -1/3)$ è combinazione convessa dei vettori $\underline{x}_1^T=(1, 1)$ e $\underline{x}_2^T = (2, -1)$.

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3\\-1/3\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1+\lambda_2=1$$

$$\lambda_1,\lambda_2\geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 = 5/3\\ \lambda_1 - \lambda_2 = -1/3\\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 = 5/3\\ \lambda_1 - \lambda_2 = -1/3\\ \lambda_1 = 1 - \lambda_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-\lambda_2 + 2\lambda_2 = 5/3\\ 1-\lambda_2 - \lambda_2 = -1/3\\ \lambda_1 = 1 - \lambda_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1+\lambda_2 = 5/3\\ -2\lambda_2 = -4/3\\ \lambda_1 = 1 - \lambda_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_2 = 2/3\\ \lambda_2 = 2/3\\ \lambda_1 = 1 - \lambda_2=1/3\end{cases}$$

Il sistema ammette soluzioni quindi $\underline{y}^T$ è combinazione convessa di $\underline{x}_1^T$ e $\underline{x}_2^T$.

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare che tipo di combinazione (lineare, conica o convessa) è il vettore $\underline{y}^T = (5/3, 2/3, 4)$ rispetto ai vettori:

$\underline{x}_1^T=(2, 1, 8)$, $\underline{x}_2^T=(1, 0, 3)$ e $\underline{x}_3^T = (2, 1, 1)$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3\\2/3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=5/3\\ \lambda_1+\lambda_3=2/3\\ 8\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=5/3\\ \lambda_1=2/3-\lambda_3\\ 8\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2(2/3-\lambda_3)+\lambda_2+2\lambda_3=5/3\\ \lambda_1=2/3-\lambda_3\\ 8(2/3-\lambda_3)+3\lambda_2+\lambda_3=4\end{cases}$$

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare che tipo di combinazione (lineare, conica o convessa) è il vettore $\underline{y}^T = (5/3, 2/3, 4)$ rispetto ai vettori:

$\underline{x}_1^T=(2, 1, 8)$, $\underline{x}_2^T=(1, 0, 3)$ e $\underline{x}_3^T = (2, 1, 1)$

$$\begin{cases} 2(2/3 - \lambda_3) + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 5/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ 8(2/3 - \lambda_3) + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4/3 - 2\lambda_3 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 5/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ 16/3 - 8\lambda_3 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 5/3 - 4/3 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ -7\lambda_3 + 3\lambda_2 = 4 - 16/3 = -4/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ -7\lambda_3 + 1 = -4/3 \end{cases}$$

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare che tipo di combinazione (lineare, conica o convessa) è il vettore $\underline{y}^T = (5/3, 2/3, 4)$ rispetto ai vettori:

$\underline{x}_1^T=(2, 1, 8)$, $\underline{x}_2^T=(1, 0, 3)$ e $\underline{x}_3^T = (2, 1, 1)$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ -7\lambda_3 + 1 = -4/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ -7\lambda_3 = -1 - 4/3 = -7/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ \lambda_3 = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 1/3 \\ \lambda_3 = 1/3 \end{cases}$$

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare che tipo di combinazione (lineare, conica o convessa) è il vettore $\underline{y}^T = (5/3, 2/3, 4)$ rispetto ai vettori:

$\underline{x}_1^T=(2, 1, 8)$, $\underline{x}_2^T=(1, 0, 3)$ e $\underline{x}_3^T = (2, 1, 1)$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3\\2/3\\4\end{pmatrix}$$

Combinazione convessa

- *Un vettore y è combinazione LINEARE dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\underline{y}= \lambda_1 \underline{x}_1+ \lambda_2 \underline{x}_2+\ldots+ \lambda_n \underline{x}_n$*

- *Un vettore y è combinazione CONICA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n \geq 0$ e $\underline{y}= \lambda_1 \underline{x}_1+ \lambda_2 \underline{x}_2+\ldots+ \lambda_n \underline{x}_n$*

- *Un vettore y è combinazione CONVESSA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n \geq 0$ e $\lambda_1+ \lambda_2+\ldots+\lambda_n = 1$ e $\underline{y}= \lambda_1 \underline{x}_1+ \lambda_2 \underline{x}_2+\ldots+ \lambda_n \underline{x}_n$*

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Si determini un vettore che sia combinazione conica dei seguenti tre vettori:

$\underline{x}_1^T=(3, 0, 1)$, $\underline{x}_2^T=(5, 4, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (1, 3, 8)$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\3\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

Combinazione conica implica che
$\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n \geq 0$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\3\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}1+5 = y_1\\ 4 = y_2\\ 1/3 + 1 = y_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6 = y_1\\ 4 = y_2\\ 4/3 = y_3\end{cases}$$

Esempio 1: Piano di produzione aziendale

Un’azienda produce tre tipi di elettrodomestici: lavatrici, frigoriferi e forni.

Per produrre una lavatrice occorrono 9 ore di lavorazione sulla macchina M1 e 8 ore di lavorazione sulla macchina M2; mentre per produrre un frigorifero occorrono 11 ore di lavorazione sulla macchina M2; infine per produrre un forno occorrono 4 ore sulla macchina M1 e 6 sulla macchina M2.

La macchina M1 è disponibile per 137 ore settimanali, mentre la macchina M2 è disponibile per 149 ore settimanali. Il numero di forni prodotti non può essere superiore alla somma dei frigoriferi e delle lavatrici prodotte. Tuttavia devono essere prodotti almeno 20 forni. Inoltre il numero di lavatrici prodotte può essere superiore al numero di frigoriferi prodotti per al più 5 unità.

Il guadagno ottenuto dalla vendita di una lavatrice è di 375 euro, quello ottenuto per un frigorifero è 320 euro e quello per un forno è 170 euro. Si vuole conoscere la quantità di lavatrici, frigoriferi e forni da produrre settimanalmente per massimizzare il guadagno totale nel rispetto dei vincoli di produzione.

a) Si formuli il corrispondente modello di programmazione.

Esempio 1: Piano di produzione aziendale

La prima cosa da fare per poter formulare un problema è individuare le variabili decisionali.

Poiché il nostro obiettivo è quello di definire il numero di lavatrici, frigoriferi e forni da produrre, associamo ad ogni tipo di elettrodomestico una variabile distinta:

x_1 = numero di lavatrici da produrre

x_2 = numero di frigoriferi da produrre

x_3 = numero di forni da produrre

$$\max \; 375x_1 + 320x_2 + 170x_3$$

$$\begin{array}{rcl} 9x_1 + 4x_3 & <= & 137 \\ 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 & <= & 149 \\ x_3 & <= & x_1 + x_2 \\ x_3 & >= & 20 \\ x_1 & <= & 5 + x_2 \\ x_1, x_2, x_3 & >= & 0, intere \end{array}$$

Esempio 2

Supponiamo che ci siano tre lavori da svolgere: **stuccare, imbiancare e levigare**. Abbiamo a disposizione tre persone **Mario, Luca ed Andrea** che sanno svolgere questi tre lavori ma con differenti tempistiche come indicato nella seguente tabella (i valori rappresentano le ore necessarie ad ogni persona per portare a termine il rispettivo lavoro).

	STUCCA	IMBIANCA	LEVIGA
MARIO	3	1	2
LUCA	2	1.5	1.5
ANDREA	3	1.5	3

Il nostro obiettivo è quello di assegnare ad ogni persona un lavoro e ad ogni lavoro una persona al fine di minimizzare le ore totali necessarie per svolgere i tre lavori.

Esempio 2

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se assegnamo alla persona } i \text{ il lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Min $3X_{11}+1X_{12}+2X_{13}+ 3X_{21}+1.5X_{22}+1.5X_{23}+3X_{31}+1.5X_{32}+3X_{33}$

$X_{11}+ \quad X_{12}+ \quad X_{13}= 1$ (Mario)

$X_{21}+ \quad X_{22}+ \quad X_{23}= 1$ (Luca)

$X_{31}+ \quad X_{32}+ \quad X_{33}= 1$ (Andrea)

$X_{11}+ \quad X_{21}+ \quad X_{31}= 1$ (Levigare)

$X_{12}+ \quad X_{22}+ \quad X_{32}= 1$ (Stuccare)

$X_{13}+ \quad X_{23}+ \quad X_{33}= 1$ (Imbiancare)

Esempio 2

Min $3X_{11}+1X_{12}+2X_{13}+3X_{21}+1.5X_{22}+1.5X_{23}+3X_{31}+1.5X_{32}+3X_{33}$

$$\left.\begin{array}{lll} X_{11}+ & X_{12}+ & X_{13}=1 \\ X_{21}+ & X_{22}+ & X_{23}=1 \\ X_{31}+ & X_{32}+ & X_{33}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{3} x_{ij}=1 \quad \text{per ogni } i=1,2,3$$

$$\left.\begin{array}{lll} X_{11}+ & X_{21}+ & X_{31}=1 \\ X_{12}+ & X_{22}+ & X_{32}=1 \\ X_{13}+ & X_{23}+ & X_{33}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} x_{ij}=1 \quad \text{per ogni } j=1,2,3$$

Esempio 2

$$\text{Min } 3X_{11}+1X_{12}+2X_{13}+3X_{21}+1.5X_{22}+1.5X_{23}+3X_{31}+1.5X_{32}+3X_{33}$$

$\boxed{c_{11}}$ $\boxed{c_{22}}$

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

Esempio 2

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } i = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } j = 1,2,3$$

Generalizzando…

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } i = 1,2,\ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } j = 1,2,\ldots n$$