Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 4

- Problemi di Programmazione Matematica
- Problemi Lineari e Problemi Lineari Interi
- Forma Canonica. Forma Standard
- Rappresentazione grafica della regione di ammissibilità

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Problema di Ottimizzazione

Data una funzione f : $R^n \longrightarrow R$ e $X \subseteq R^n$ un **problema di Ottimizzazione** (PO) può essere formulato come:

funzione obiettivo

vettore delle variabili decisionali

$$\min f(\underline{x})$$
s.t.
$$\underline{x} \in X$$

insieme delle soluzioni ammissibili

Quindi un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione f tra i punti dell'insieme X.

Problemi di Programmazione Matematica

Quando l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni, tale problema prende il nome di **problema di Programmazione Matematica** (PM).

i-esimo vincolo del sistema

$$\min f(\underline{x})$$
s.t.
$$g_i(\underline{x}) \geq b_i \qquad i=1,\ldots,m$$

i-esima componente del vettore dei termini noti

Problemi di Programmazione Lineare

Un problema di PM è **lineare** quando:

- la funzione obiettivo è lineare: $f(\underline{x}) = \underline{c}^T\underline{x}$
- l'insieme X è espresso in termini di relazioni (uguaglianze e disuguaglianze) lineari

$$\min f(\underline{x})$$
$$s.t.$$
$$g_i(\underline{x}) \geq b_i \qquad i=1,\ldots,m$$

Forma esplicita

$$\begin{array}{llllll}
\min & c_1x_1 & +\, c_2x_2 & +\ldots+ & c_nx_n & \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 & +\, a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & \geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 & +\, a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & \geq b_2 \\
 & a_{m1}x_1 & +\, a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & \geq b_m
\end{array}$$

Forma compatta

$$\begin{array}{ll}
\min & \underline{c}^T\underline{x} \\
\text{s.t.} & A\underline{x} \geq \underline{b}
\end{array}$$

$X \to \left\{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : A\underline{x} \geq \underline{b}\right\}$ variabili $\underline{x}$ continue

Programmazione Lineare Continua (PL)

$X \to \left\{\underline{x} \in \mathbf{Z}^n : A\underline{x} \geq \underline{b}\right\}$ variabili $\underline{x}$ intere

Programmazione Lineare Intera (PLI)

Problemi di Programmazione Lineare: Forma Canonica

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare (PL) con m vincoli ed n variabili in Forma Canonica di minimo:

$$\min z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{x} \in R^n$$

- $\underline{x}$ è il vettore n*x*1 delle **variabili decisionali**
- $\underline{c}$ è il vettore n*x*1 dei **coefficienti di costo** della funzione obiettivo
- $\underline{b}$ è il vettore m*x*1 dei **termini noti** dei vincoli
- A è la matrice m*x*n dei coefficienti dei vincoli; $A=[a_{ij}]$, i=1,...,n, j=1,...,m

Problemi di Programmazione Lineare: Forma Standard di minimo

$$\min \quad z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (1)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad (2)$$

$$\underline{x} \in R^n$$

Condizione: $\underline{b} \geq 0$

- I valori di $\underline{x}$ che soddisfano i vincoli (1) sono detti **soluzioni** del problema di PL.
- Inoltre, i valori di $\underline{x}$ che soddisfano anche i vincoli (2) sono detti **soluzioni ammissibili** del problema di PL.

Si assumono soddisfatte le seguenti ipotesi:

- $m<n$
- $m=\text{rango}(A)$

L'ipotesi $m<n$ (più variabili che vincoli) non rappresenta una perdita di generalità.

E' noto infatti che il sistema di equazioni lineari (1):

- può ammettere una soluzione unica se $m=n$
- può ammettere ∞^{n-m} soluzioni se $m<n$

Solo il secondo caso è significativo dal punto di vista dei problemi di ottimizzazione.

Definizione 1 (Problemi equivalenti)

Due problemi di programmazione lineare (P) e (P') sono **equivalenti** se, per ogni soluzione ammissibile di (P), possiamo costruire una soluzione ammissibile di (P') con lo stesso valore e, per ogni soluzione ammissibile di (P'), possiamo costruire una soluzione ammissibile di (P) con lo stesso valore.

Osservazione 1

Se due problemi di programmazione lineare sono equivalenti allora i valori delle rispettive soluzioni ottime coincidono.

Osservazione 2

Qualunque problema di PL può essere trasformato in un problema equivalente in forma canonica o standard.

Formulazioni equivalenti:

Funzione Obiettivo

$$\max \quad z = \underline{c}^T \underline{x} \quad \Leftrightarrow \quad -\min \quad -z = -\underline{c}^T \underline{x}$$

Esempio

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 \quad \Leftrightarrow \quad -\min \quad -z = -3x_1 - 5x_2$$

Formulazioni equivalenti:

Vincoli

$$A\underline{x} \geq \underline{b} \Leftrightarrow -A\underline{x} \leq -\underline{b}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} A\underline{x} \leq \underline{b} \\ A\underline{x} \geq \underline{b} \end{cases}$$

Formulazioni equivalenti:

Vincoli di disuguaglianza in vincoli di uguaglianza

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + (-) x_{n+1} = b_i$$

$x_{n+1} =$ Variabile di slack (variabile fittizia)

$$x_{n+1} \geq 0$$

$$x_{n+1} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Formulazioni equivalenti:

Variabili

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_j^{'} = -x_j$$

$$x_j \text{ non vincolata} \Leftrightarrow x_j = x_j^{'} - x_j^{''}$$

$$\text{Con } x_j^{'} \geq 0 \text{ e } x_j^{''} \geq 0$$

Esercizio

Scrivere la forma canonica e la forma standard per il seguente problema di programmazione lineare.

$$\max \; z = x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{array}{rcl}
-3x_1 - x_2 + x_3 & <= & -3 \\
2x1 - 3x_2 - 2x_3 & >= & 4 \\
x_1 - x_3 & = & 2 \\
x_1 > & = & 0 \\
x_2 & <= & 0 \\
x_3 & n.v. &
\end{array}$$

Rappresentazione grafica della regione di ammissibilità

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 \qquad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0 \qquad (2)$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 21 \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0$$

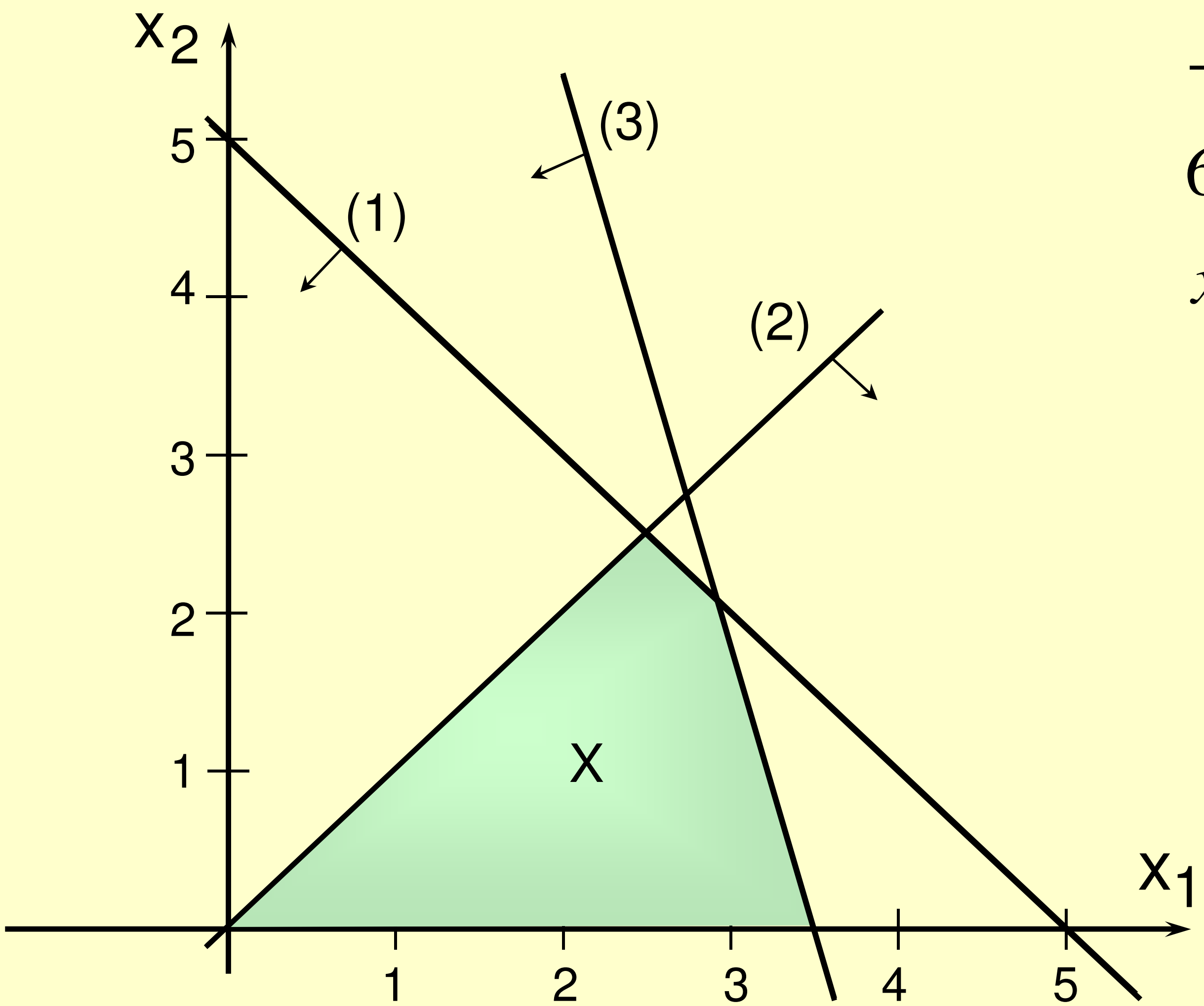
$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 \qquad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0 \qquad (2)$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 21 \quad (3)$$

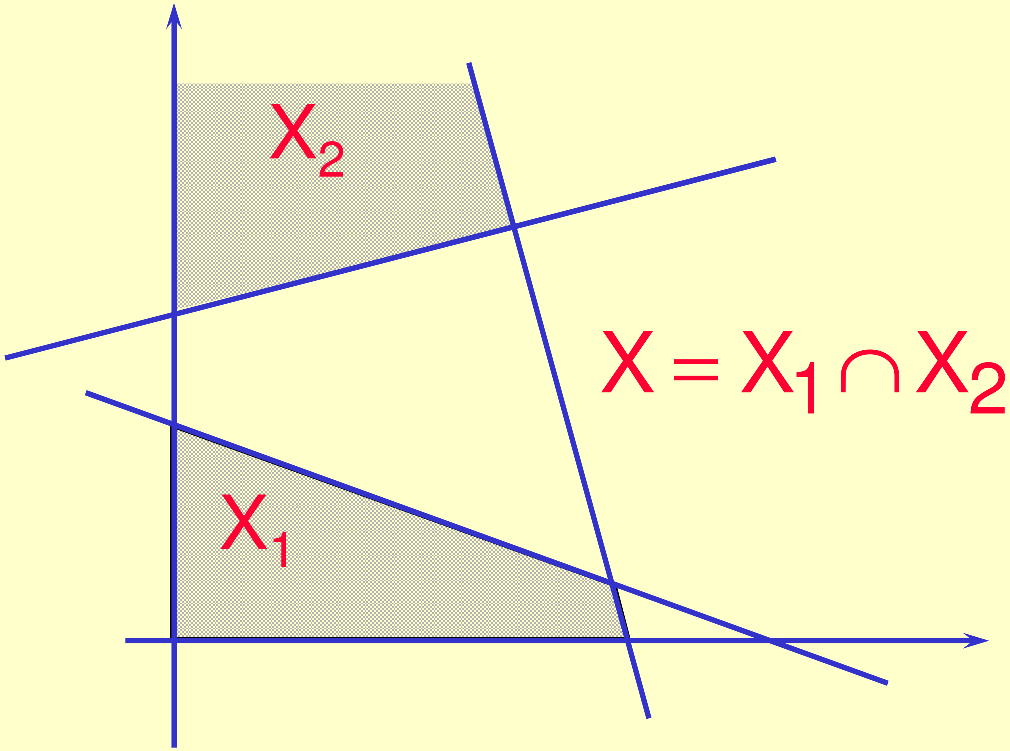
$$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0$$



Definizione 2 (Problema inammissibile)

Un problema di ottimizzazione si dice **inammissibile** se X= ∅, cioè non esistono soluzioni ammissibili.

Graficamente:



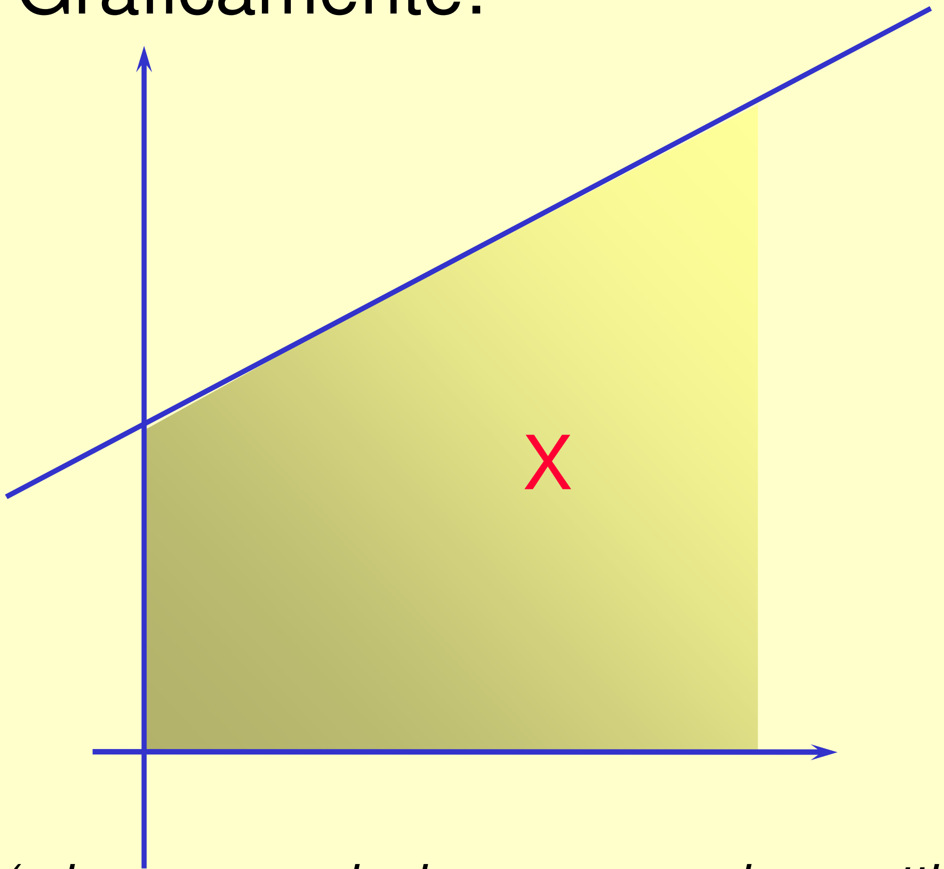
$$X = X_1 \cap X_2 = \emptyset$$

$$X = \emptyset \Rightarrow \nexists \underline{x} \in \mathbf{R}^n : A\underline{x} \geq \underline{b}, \ \underline{x} \geq 0$$

Definizione 3 (Problema illimitato)

Un problema di ottimizzazione si dice **illimitato (inferiormente)** se scelto un qualsiasi valore $M>0$, esiste un punto $x \in X$ tale che $f(x) < -M$.

Graficamente:



X illimitato

(n.b., una soluzione con valore ottimo illimitato implica un insieme di ammissibilità X illimitato, ma non è vero il viceversa)

Definizione 4 (Punto di minimo globale)

Un problema di ottimizzazione ammette **soluzione ottima finita** se esiste un $x^* \in X$ tale che:

$$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall x \in X$$

Il punto x^* è detto *soluzione ottima* (o minimo globale) ed il corrispondente valore $f(x^*)$ si dice *valore ottimo*.

Graficamente: