Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 2: Richiami di Algebra vettoriale.

- Operazioni sui vettori
- Combinazione lineare, combinazione conica, combinazione convessa
- Indipendenza lineare tra vettori
- Base di uno spazio

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Vettori

Definizione (Vettore): Prende il nome di vettore ad *n* componenti reali una *n*-pla ordinata di numeri reali.

Esempio: La coppia *(-1, 4)* è un esempio di vettore a 2 componenti, la prima è *-1* e la seconda è *4*.

Definizione (Vettore colonna): Prende il nome di vettore colonna il vettore le cui componenti sono disposte lungo una linea verticale (colonna). Lo si indica con la seguente notazione:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

vettore colonna di dimensione *n=3*

Vettori

Definizione (Vettore riga): Prende il nome di vettore riga il vettore le cui componenti sono disposte lungo una linea orizzontale (riga). Lo si indica con la seguente notazioni:

$$\underline{x}^T = (3,-1,7)$$

vettore riga di dimensione *n=3*

Definizione (Trasposizione): Si chiama trasposizione l'operazione unaria che trasforma un vettore riga (colonna) in un vettore colonna (riga).

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \underline{x}^T = (1,2,3,-4,-6,7)$$

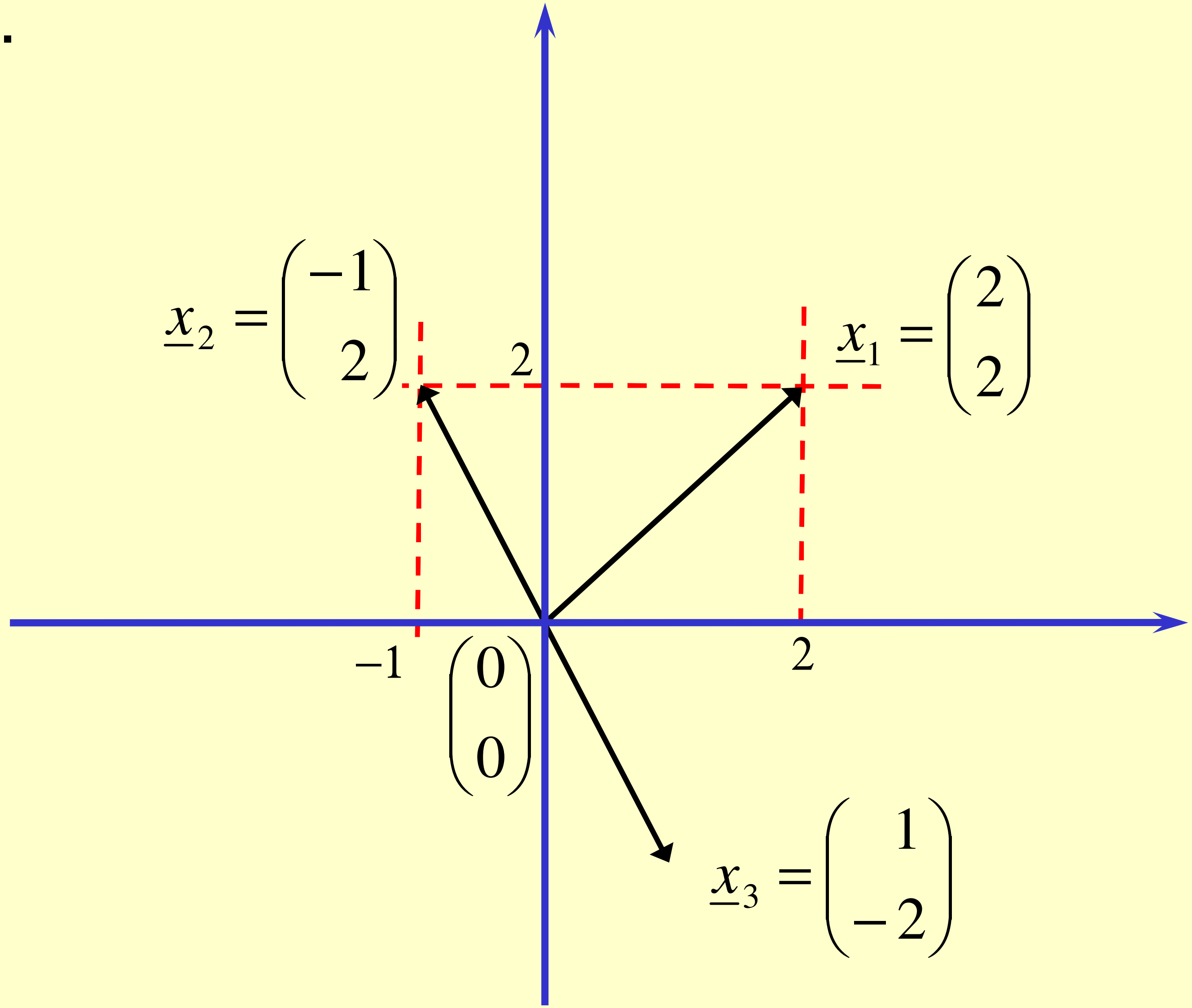
Vettori

Definizione (Vettore nullo): Prende il nome di vettore nullo, e lo si indica con $\underline{0}^T = (0, 0, ..., 0)$, il vettore le cui componenti sono tutte nulle.

Definizione (Scalare): Prende il nome di scalare un qualsiasi numero reale.

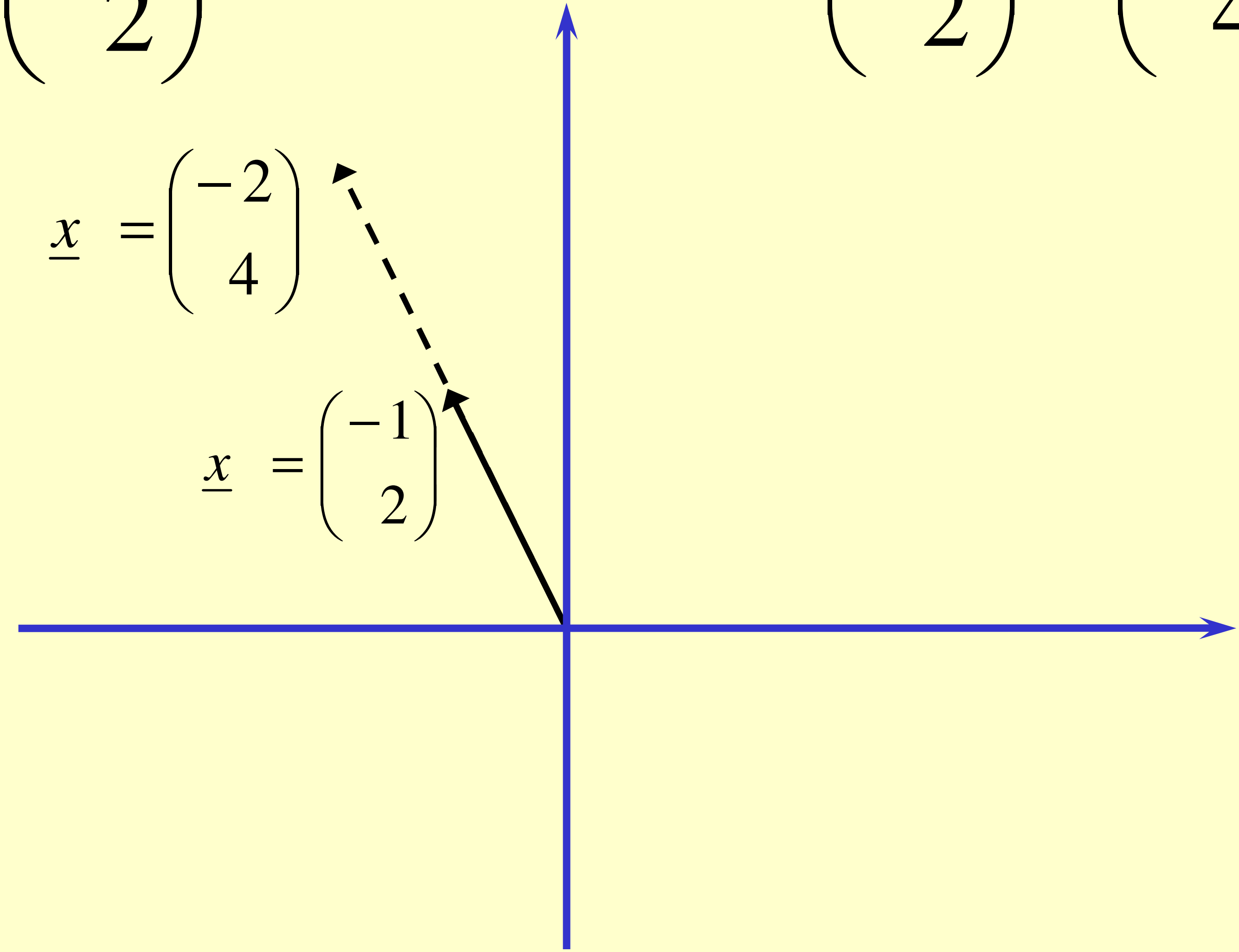
Esempio: vettori di dimensione 2

Ogni vettore può essere rappresentato tramite un punto o da una linea che connette l'origine al punto.



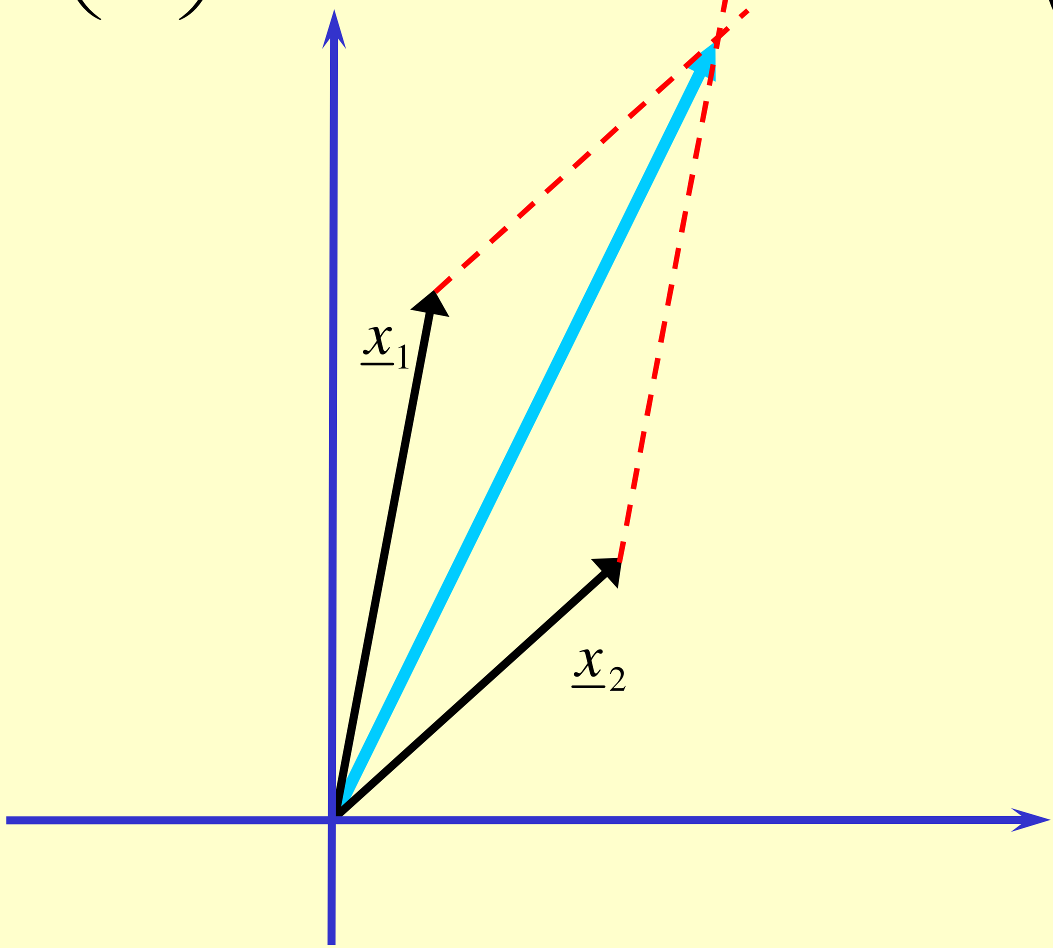
Moltiplicazione per uno scalare

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\underline{x} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Addizione di vettori: regola del parallelogramma

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Prodotto Interno

$$\underline{x}^T \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

$$\underline{x}^T = (0, 2) \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^T \underline{y} = 8$$

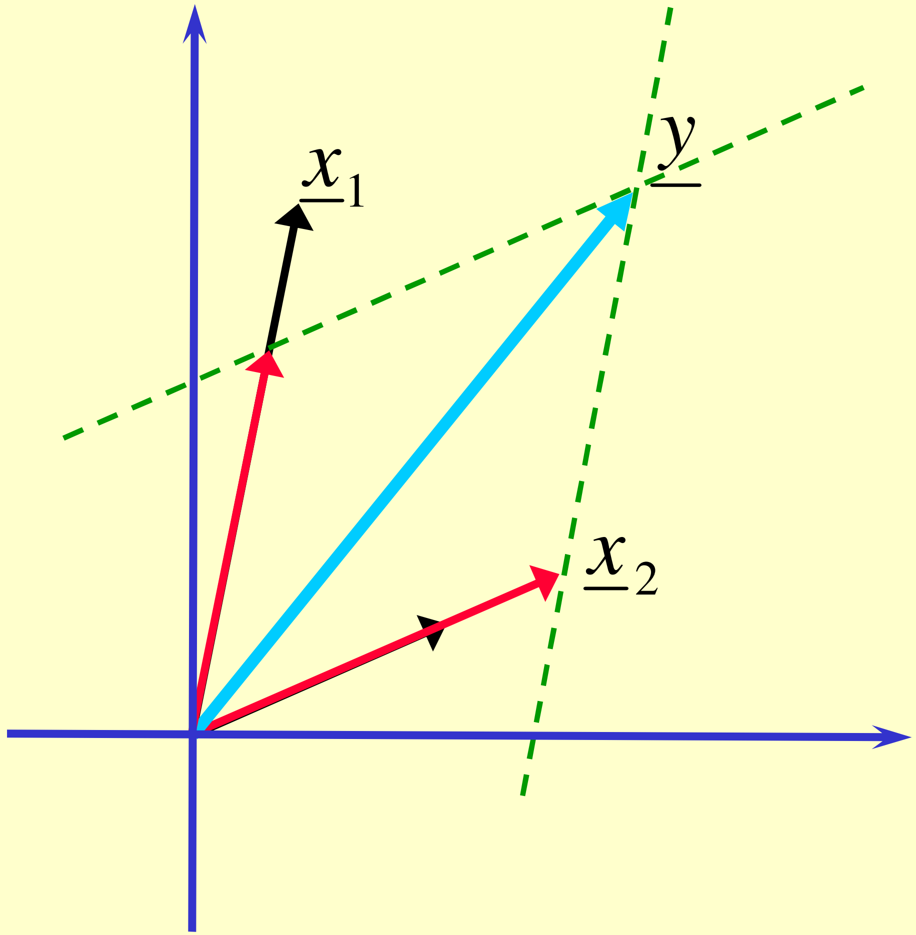
Combinazione LINEARE tra vettori

Un vettore $\underline{y}$ è combinazione LINEARE dei vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, …, $\underline{x}_n$ se esistono λ_1, λ_2, … , λ_n numeri reali tali che:

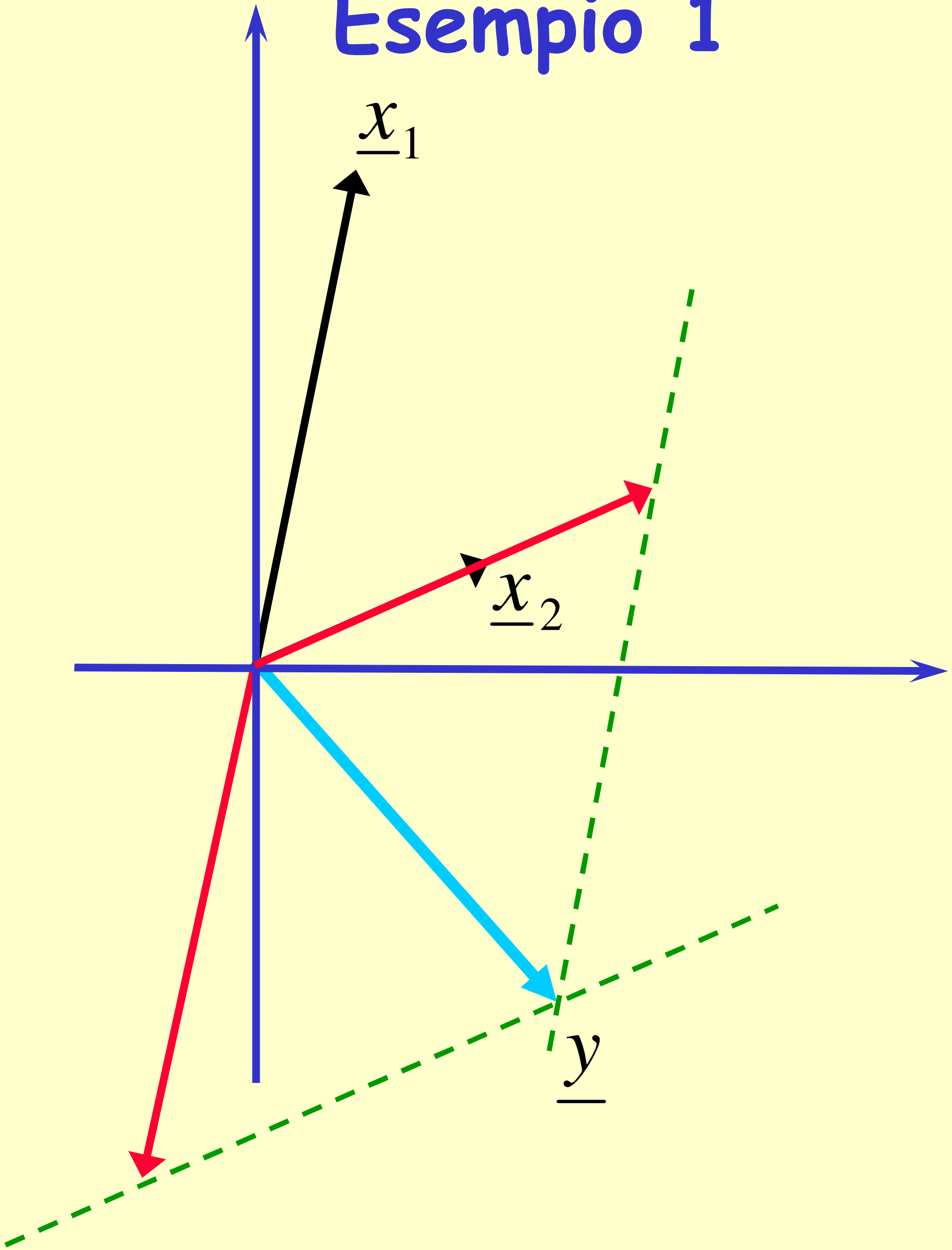
$$\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{x}_n$$

y è combinazione lineare di $\underline{x}_1$ ed $\underline{x}_2$?

Quanto valgono λ_1 e λ_2 ?



Esempio 1

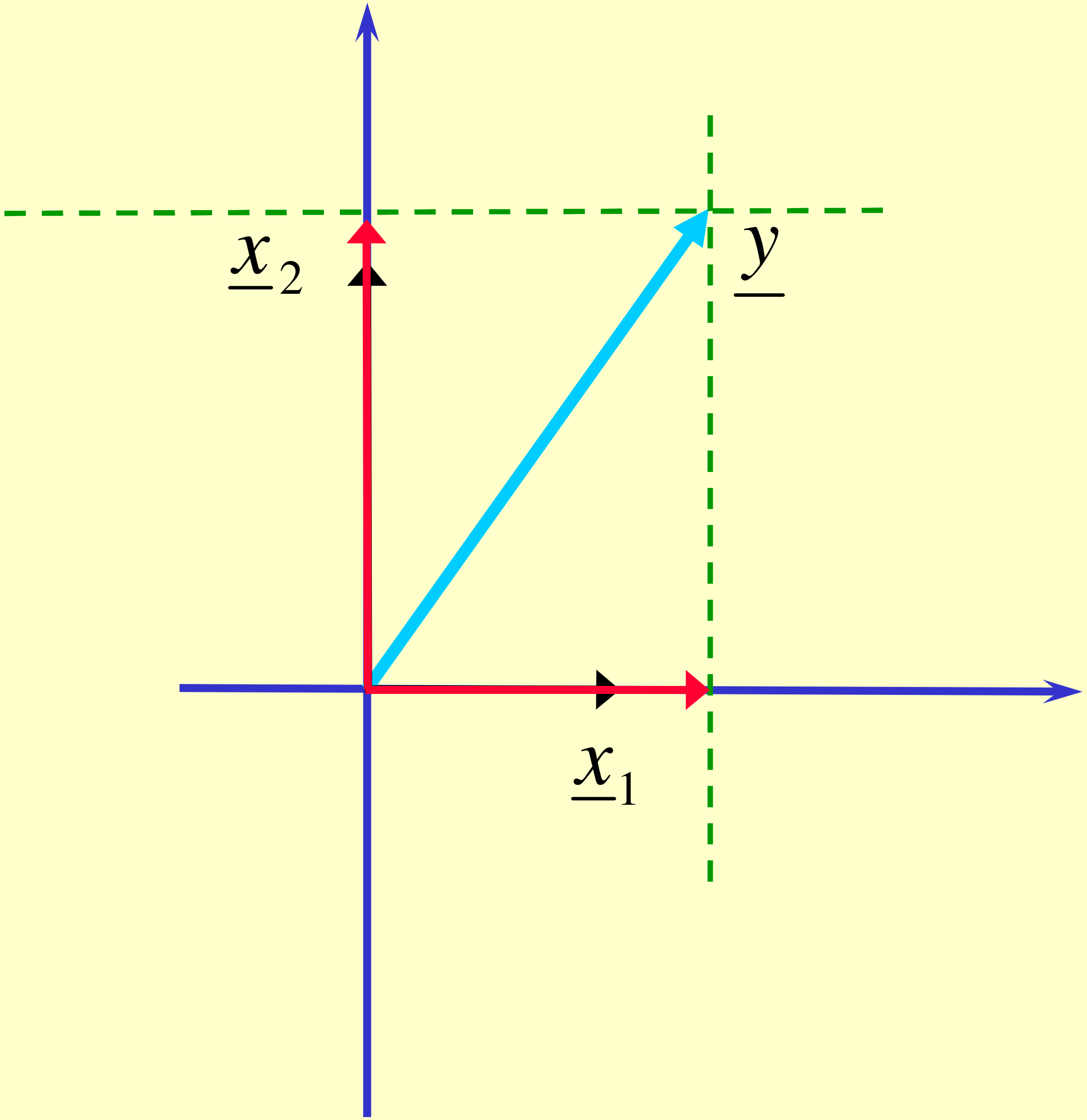


$$\underline{y} = \lambda_1 \, \underline{x}_1 + \lambda_2 \, \underline{x}_2$$

$\lambda_1 < 0$

$\lambda_2 > 1$

Esempio 2

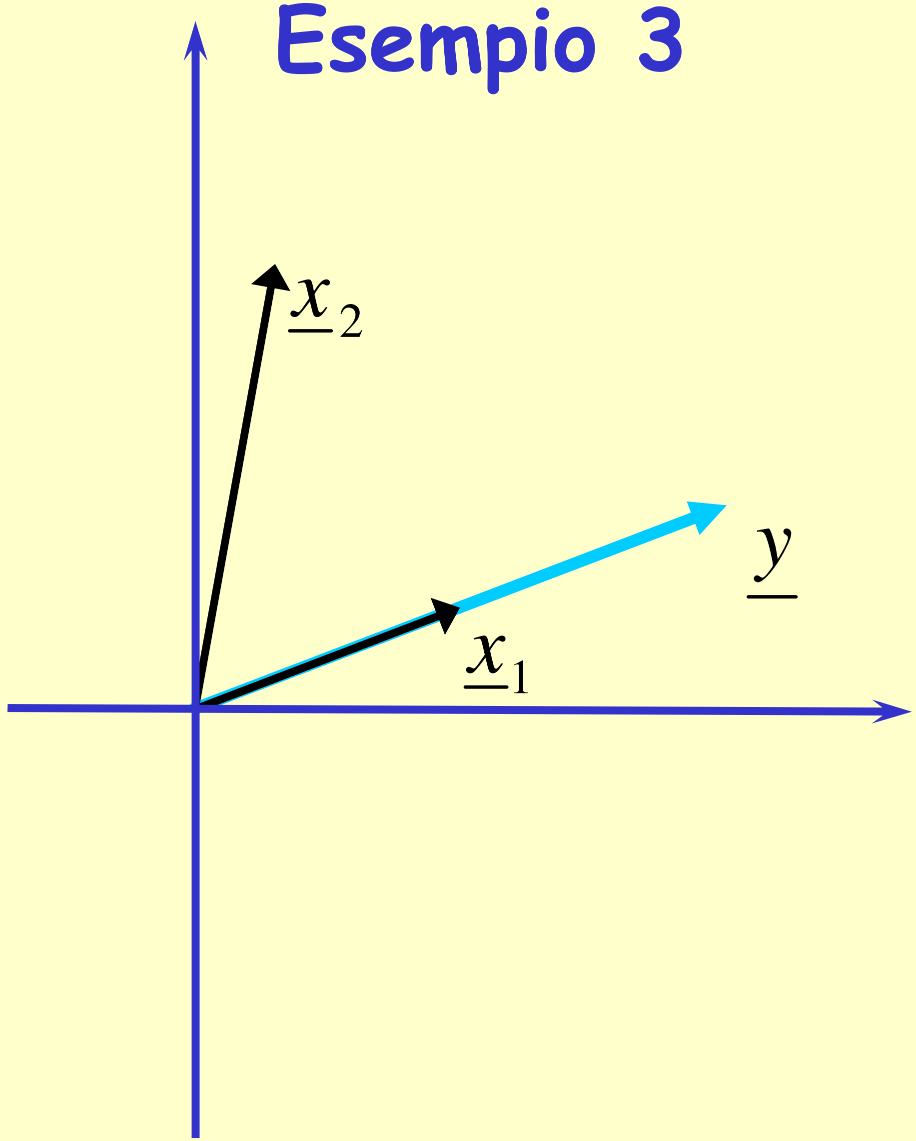


$\underline{y} = \lambda_1 \, \underline{x}_1 + \lambda_2 \, \underline{x}_2$

$\lambda_1 > 1$

$\lambda_2 > 1$

Esempio 3



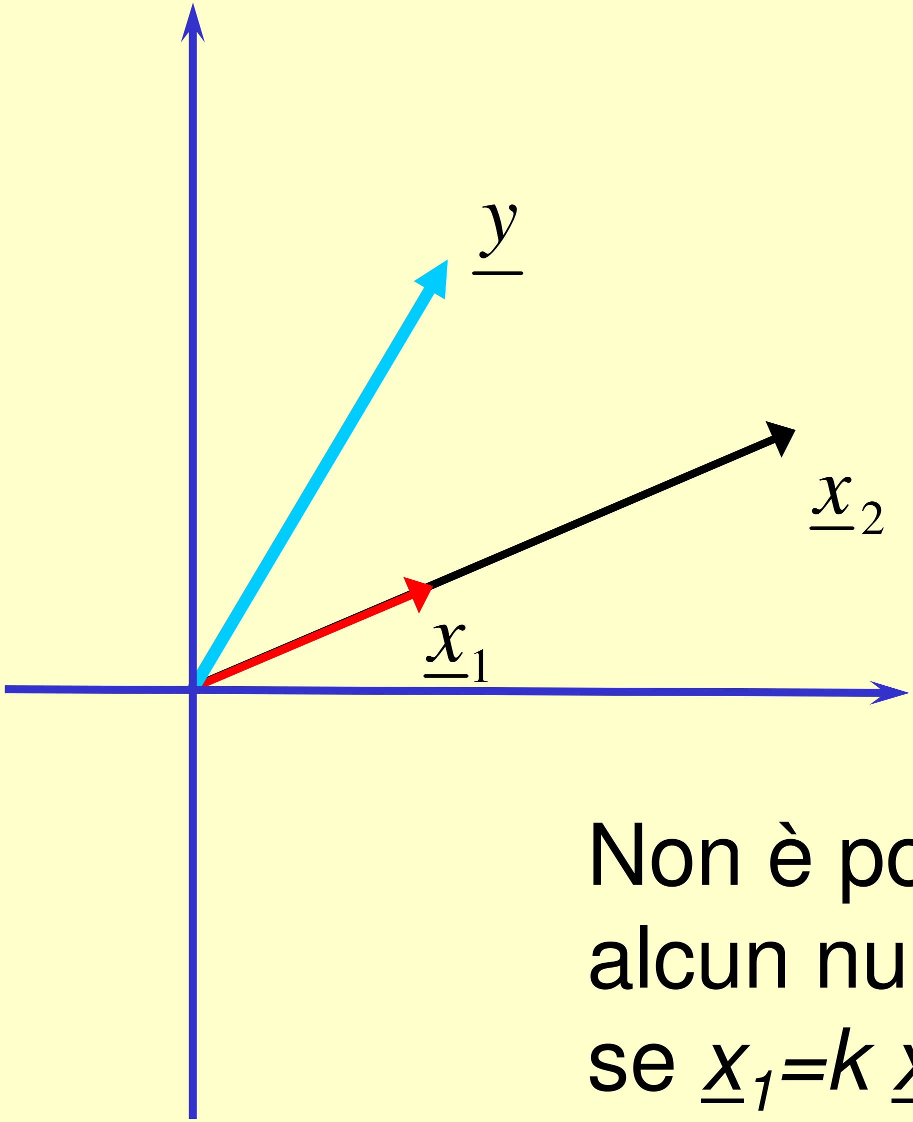
$\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2$

$\lambda_1 > 1$

$\lambda_2 = 0$

Esempio 4

$\underline{y} = \lambda_1\, \underline{x}_1 + \lambda_2\, \underline{x}_2$



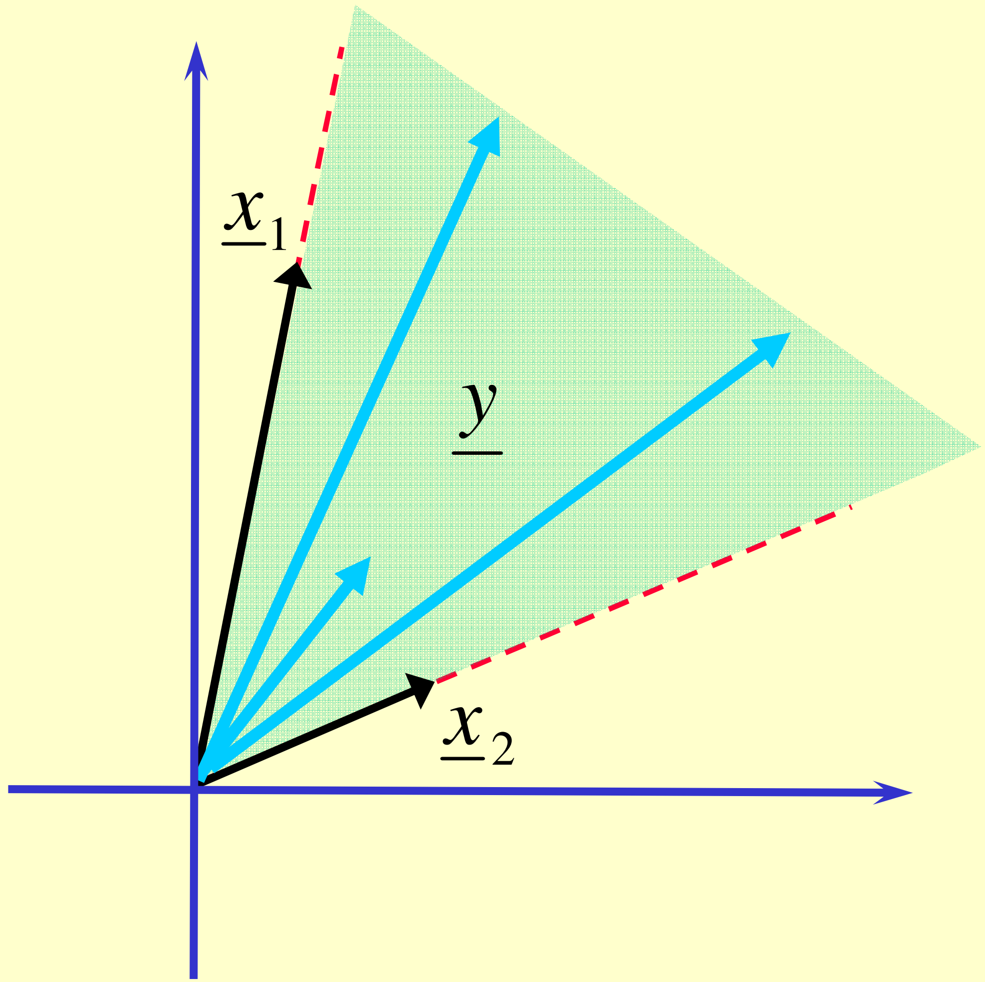
Non è possibile trovare alcun numero reale λ_1 e λ_2 se $\underline{x}_1 = k\, \underline{x}_2$

Combinazione CONICA tra vettori

Un vettore $\underline{y}$ è combinazione CONICA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali tali che

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$

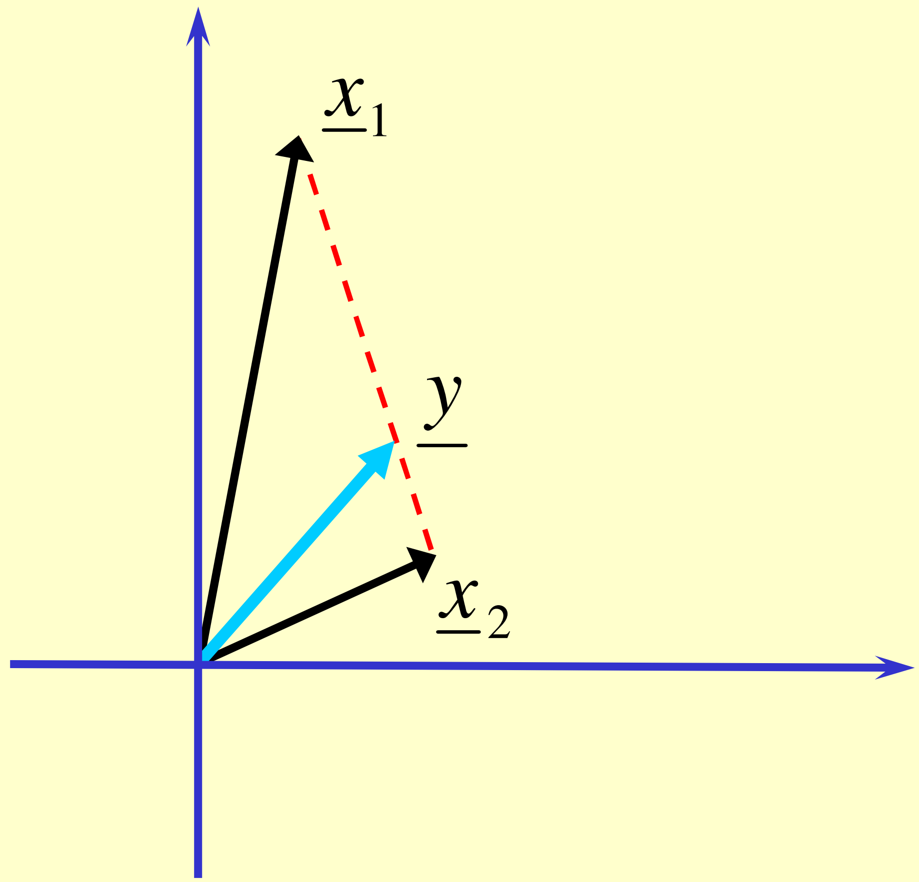
2. $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{x}_n$



Combinazione CONVESSA tra vettori

Un vettore $\underline{y}$ è combinazione CONVESSA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali tali che

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$
3. $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{x}_n$



Lineare indipendenza tra vettori

I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{x}_n = \underline{0}$$

implica che

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$$

I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{x}_n = \underline{0}$$

Lineare indipendenza tra vettori
ESEMPIO

$\underline{x}_1^T=(1,2,3)$ $\underline{x}_2^T=(-1,1,-1)$ $\underline{x}_3^T=(0,3,2)$

sono linearmente dipendenti perché

$$\lambda_1\,\underline{x}_1+\lambda_2\,\underline{x}_2+\lambda_3\,\underline{x}_3=\underline{0}$$

quando

$$\lambda_1=\lambda_2=1 \quad e \quad \lambda_3=-1$$

$$1*\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+1*\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}-1*\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Lineare indipendenza tra vettori in particolare...

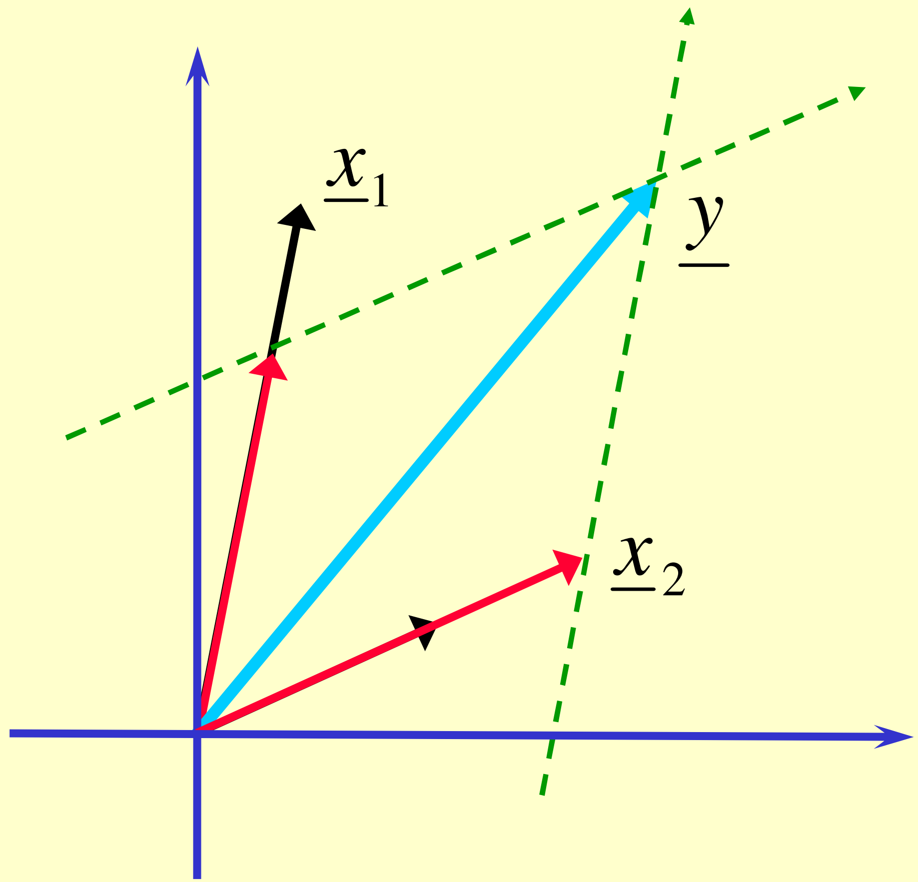
I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri

$$\underline{x}_1^T=(1,2,3)$$
$$\underline{x}_2^T=(-1,1,-1)$$
$$\underline{x}_3^T=(0,3,2)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}_1+\underline{x}_2=\underline{x}_3$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

$\underline{y}$, $\underline{x}_1$ ed $\underline{x}_2$ sono linearmente DIPENDENTI



Spazio generato

Un insieme di vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, … , $\underline{x}_k$ di dimensione *n* genera l'insieme di vettori E^n, se ogni vettore in E^n può essere rappresentato come combinazione lineare dei vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, … , $\underline{x}_k$

Esempio: *n=2 k=3*

$$\underline{x}_1^T=(1, 0) \quad \underline{x}_2^T=(-1, 3) \quad \underline{x}_3^T=(2, 1)$$

I vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ generano l'insieme di vettori di dimensione 2.

Base di uno spazio

Def.

Un insieme di vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, … , $\underline{x}_k$ in E^n è una BASE di E^n se valgono le due seguenti condizioni:

1. $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, … , $\underline{x}_k$ generano E^n

2. Se uno solo dei vettori è rimosso, allora i rimanenti *k-1* vettori non generano E^n

Base di uno spazio

Proprietà 1. *(no dim)*

Un insieme di vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots , \underline{x}_k$ in E^n è una BASE di E^n se e solo se:

1. $k = n$

2. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots , \underline{x}_k$ sono lin. indipendenti

Def.

Il numero di vettori che formano una base per E^n è detto ***dimensione*** dello spazio E^n

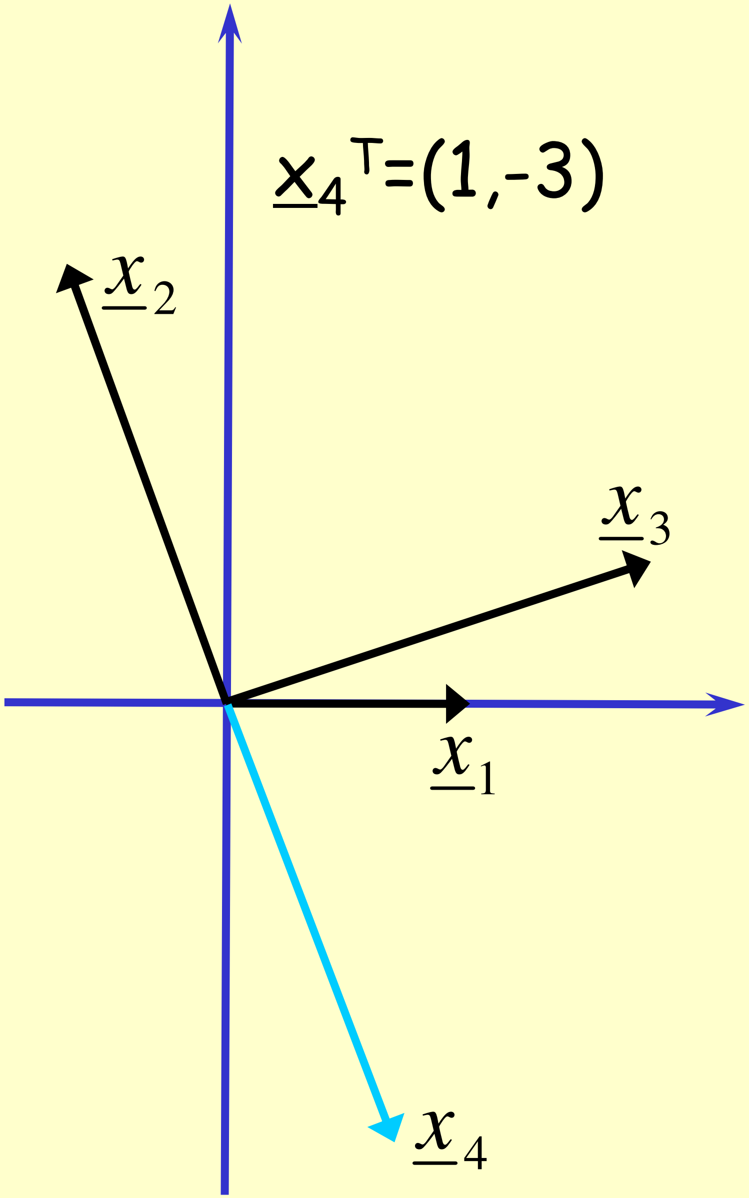
Base di uno spazio
Esempio

Cerchiamo una base per lo spazio *E^2* *(dei vettori di dimensione due)*

⇓

Dobbiamo cercare 2 vettori in *E^2* linearmente indipendenti

$\underline{x}_1^T=(1, 0)$ $\underline{x}_2^T=(-1, 3)$ $\underline{x}_3^T=(2, 1)$



Dom. : $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3$ generano E^2?

Dom. : $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3$ sono una base per E^2?

Dom. : $\underline{x}_1,\underline{x}_2$ sono una base per E^2?

Dom. : $\underline{x}_2,\underline{x}_3$ sono una base per E^2?

Dom. : $\underline{x}_2,\underline{x}_4$ sono una base per E^2?

Esercizio

Dati i seguenti vettori in R^3

$\underline{x}_1^T = (1, 3, 0)$

$\underline{x}_2^T=(2, 0, 1)$

$\underline{x}_3^T=(0, 1, 0)$

1. Verificare che costituiscono una base
2. Determinare le coordinare del vettore $\underline{y}^T=(2,4,1)$ in termini della base.

Libro di testo

Linear Programming and Network Flows

Seconda Edizione

Paragrafo 2.1 - pag. 38 – 44

(escluso ‘’Replacing a Vector in the basis with another vector”)