Matematica Discreta e Logica Matematica
Classe 2: Matricola 1 mod 3
21 novembre 2011

Prova intercorso A

Cognome e Nome .... Matricola ....

1) Siano $A,\ B,\ C$ tre insiemi tali che $A \cap B = C$, $B \cap C = A$ e $C \cap A = B$.
Provare che $A = B = C$.
Enunciare le leggi di De Morgan per gli insiemi.

Cognome e Nome . . . . Matricola . . . .

2 Dimostrare che per ogni $n \geq 3$, si ha che $n^2 > 2n + 1$.

Cognome e Nome . . . . Matricola . . . .

3) Si consideri la funzione

$$f : x \in \mathbb{N} \to \frac{x-3}{3x} \in \mathbb{Q}.$$

Verificare se f è iniettiva e suriettiva. Calcolare, inoltre:

(i) $f(\{1, 2, 5, 10, 30\})$

(ii) $f^{-1}(\{-\frac{5}{3}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{10}\})$

Cognome e Nome . . . . Matricola . . . .

4) Si consideri la relazione R sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi definita, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se} \quad a = b \text{ oppure } ab = 18.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare

i) $[0]_R =$

ii) $[1]_R =$

iii) $[-3]_R =$

iv) $[-6]_R =$

v) $[18]_R =$

Cognome e Nome .... Matricola ....

5) Considerare le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che AB è invertibile e calcolarne l'inversa.

Cognome e Nome .... Matricola ....

6) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} & -y & +2z & +t & = & 0 \\ -x & +y & -z & & = & 0 \\ x & -2y & +z & -2t & = & -1 \end{cases},$$

con il metodo di eliminazione di Gauss.

Cognome e Nome .... Matricola ....

7) Richiamare la *regola di Laplace*. Si ricordi che una matrice triangolare è una matrice quadrata del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Quanto vale il determinante di una matrice triangolare. Perché?