Matematica Discreta e Logica Matematica
Cl. 2 (matr. congrua 1 mod 3)
A.A. 2011/2012

Appello del 24 Febbraio 2012
Compito A

Cognome e Nome .... Matricola ....

1) Considerare il sistema lineare reale

$$S : \left\{ \begin{array}{cccccc} & -y & +2z & = & 3 \\ 2x & +2y & -z & = & -3 \\ x & & +\frac{3}{2}z & = & \frac{3}{2} \end{array} \right. .$$

Dimostrare che S è compatibile mediante il teorema di Rouché-Capelli e risolverlo con il metodo di Gauss.

2) Dimostrare che l'endomorfismo razionale

$$f : \mathbb{Q}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x & +\frac{5}{6}y & -\frac{1}{6}z \\ \frac{3}{2}x & +\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z \\ & & 3z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3$$

è diagonalizzabile e determinarne una base diagonalizzante.

3) Dopo aver richiamato la definizione di applicazione lineare, dimostrare che se $f : V \longrightarrow W$ e $g : W \longrightarrow Z$ sono applicazioni lineari, allora anche la composta $g \circ f : V \longrightarrow Z$ è un'applicazione lineare.

4) Sia φ la seguente formula:

$$x \to ((z \to y) \to \neg x).$$

(i) Scrivere la tavola di verità di φ, dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.

(ii) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ.

(iii) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

5) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (16)$ una valutazione della variabile v_1. Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come "a è un numero primo";

$P_2(a)$ interpretato come "a è un numero pari";

$P_3(a, b)$ interpretato come "a divide b".

Interpretare, nel dominio $\mathbb{N}$, mediante la valutazione e le interpretazioni assegnate, le seguenti formule e dire se sono vere o false motivando la risposta.

(*i*) $\mathbb{N} \models_x \forall v((P_2(v) \wedge P_3(v, v_1)) \rightarrow P_1(v))$.

(*ii*) $\mathbb{N} \models_x \exists v((P_2(v) \wedge P_3(v, v_1)) \rightarrow P_1(v))$.

6) Si dimostri per induzione su n che:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$

per ogni $n \geq 1$.

7) Si consideri la relazione R sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi definita, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se} \quad a = b \text{ oppure } ab = 15.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare

i) $[0]_R =$

ii) $[1]_R =$

iii) $[-3]_R =$

iv) $[15]_R =$

v) $[5]_R =$

Stabilire, infine, se è compatibile con l'addizione e con la moltiplicazione in $\mathbb{Z}$.

8) Si risolva in $\mathbb{Z}$ il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 5 \mod 11 \\ x \equiv -2 \mod 15 \end{cases}$$

Determinare, poi, utilizzando l'algoritmo di Euclide il MCD tra 660 e 4500.