Appello Straordinario — Traccia A

10 aprile 2013

Nome ____________________ Cognome __________________________ Matricola _______________________

Esercizio A.1 *Data la formula*

$$(A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale congiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale congiuntiva.*

1.

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$A \wedge B$	$(A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1

Non è una tautologia.

2. $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$.

3.

$$\begin{aligned}
&(A \vee \neg B) \to (A \wedge B) \equiv \\
&\neg(A \vee \neg B) \vee (A \wedge B) \equiv \\
&(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B) \equiv \\
&((\neg A \wedge B) \vee A) \wedge ((\neg A \wedge B) \vee B) \equiv \\
&(\neg A \vee A) \wedge (B \vee A) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (B \vee B) \equiv \\
&(B \vee A) \wedge (\neg A \vee B) \wedge B.
\end{aligned}$$

Esercizio A.2 *Si consideri la formula*

$$[\forall x(Q(x) \to P(x)) \wedge \forall x(C(x) \to \neg P(x))] \to \forall x(C(x) \to \neg Q(x)) \ .$$

i) *Fissata l'interpretazione*

$D =$ *esseri viventi,* $\quad P(a) \Leftrightarrow a$ *è una pianta,* $\quad Q(a) \Leftrightarrow a$ *è una quercia,* $\quad C(a) \Leftrightarrow a$ *è un cane.*

scrivere tutti i passaggi che portano all'interpretazione della formula e dire se è vera o falsa.

ii) *Rinominando il minor numero possibile di variabili, trasformare la formula del primo ordine sopra in forma normale prenessa.*

iii) *Utilizzando il metodo degli alberi semantici* ***dire*** *se la formula è una tautologia del primo ordine.*

i) Sia D l'insieme degli essere viventi.

$$D \models [\forall x(Q(x) \to P(x)) \land \forall x(C(x) \to \neg P(x))] \to \forall x(C(x) \to \neg Q(x)) \quad \text{sse}$$
$$D \models \neg\forall x(Q(x) \to P(x)) \lor \neg\forall x(C(x) \to \neg P(x)) \lor \forall x(C(x) \to \neg Q(x)) \quad \text{sse}$$
$$D \models \neg\forall x(Q(x) \to P(x)) \text{ oppure } D \models \neg\forall x(C(x) \to \neg P(x)) \text{ oppure } D \models \forall x(C(x) \to \neg Q(x)) \quad \text{sse}$$
$$D \models \exists x(Q(x) \land P(x)) \text{ oppure } D \models \exists x(C(x) \land \neg P(x)) \text{ oppure } D \models \forall x(\neg C(x) \lor \neg Q(x)) \quad \text{sse}$$

C'è un $m \in D$ $D \models Q(m) \land P(m)$ o c'è un $n \in D$ $D \models C(n) \land \neg P(n)$
o per qualsiasi $l \in D$ $D \models \neg C(l) \lor \neg Q(l)$ sse

C'è un $m \in D$ $D \models Q(m)$ e $D \models P(m)$ oppure c'è un $n \in D$ $D \models C(n)$ e $D \not\models P(n)$
o per qualsiasi $l \in D$ $D \not\models C(l)$ oppure $D \not\models Q(l)$ sse

Esiste un essere vivente che è una quercia ed è una pianta,
oppure esiste un essere vivente che è un cane e non è una pianta,
oppure ogni essere vivente non è un cane o non è una quercia.

La formula è vera perché la prima parte della disgiunzione è vera in D.

ii)

$$[\forall x(Q(x) \to P(x)) \land \forall x(C(x) \to \neg P(x))] \to \forall x(C(x) \to \neg Q(x)) \equiv$$
$$\neg[\forall x((Q(x) \to P(x)) \land (C(x) \to \neg P(x)))] \lor \forall x(C(x) \to \neg Q(x)) \equiv$$
$$[\exists x((Q(x) \land P(x)) \lor (C(x) \land \neg P(x)))] \lor \forall x(\neg C(x) \lor \neg Q(x)) \equiv$$
$$[\exists x((Q(x) \land P(x)) \lor (C(x) \land \neg P(x)))] \lor \forall y(\neg C(y) \lor \neg Q(y)) \equiv$$
$$\exists x \forall y[((Q(x) \land P(x)) \lor (C(x) \land \neg P(x)) \lor \neg C(y) \lor \neg Q(y)] \equiv$$

$$\mathrm{F}([\forall x((Q(x) \to P(x)) \wedge (C(x) \to \neg P(x)))] \to \forall x(C(x) \to \neg Q(x)))^*$$

$$\mathrm{V}([\forall x((Q(x) \to P(x)) \wedge (C(x) \to \neg P(x))))$$

$$\mathrm{F}([\forall x(C(x) \to \neg Q(x)))^*$$

$$\mathrm{F}(C(c_1) \to \neg Q(c_1))^*$$

$$\mathrm{V}(C(c_1))$$

$$\mathrm{F}(\neg Q(c_1))^*$$

$$\mathrm{V}(Q(c_1))$$

$$\mathrm{V}(((Q(c_1) \to P(c_1)) \wedge (C(c_1) \to \neg P(c_1))))^*$$

$$\mathrm{V}(Q(c_1) \to P(c_1))^*$$

$$\mathrm{V}(C(c_1) \to \neg P(c_1))^*$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}(Q(c_1)) & & \mathrm{V}(P(c_1))^* \\ | & & \\ === & \mathrm{F}(C(c_1)) & \mathrm{V}(\neg P(c_1)) \\ & | & | \\ & === & \mathrm{F}(P(c_1)) \\ & & | \\ & & === \end{array}$$

iii)

È una tautologia perché si chiudono tutti i rami.

Esercizio A.3 *Sia* $W := \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *l'insieme dei numeri naturali che possono essere scritti come prodotto di una potenza di* 2 *per una potenza di* 3.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$2^n 3^m \mathcal{R} 2^s 3^t :\iff (n = s, m = t) \textit{ oppure } (n = s = 0)$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi [1], [2], [3], [4], [6], [9] *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ *definita da:*

$$2^n 3^m \mathcal{R}^* 2^s 3^t :\iff (n + m < s + t) \textit{ oppure } (n = s, m = t)$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ *è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.*

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W*:* $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 6\}$ *si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati* $(A, \mathcal{R}^*)$ *e* $(B, \mathcal{R}^*)$ *e si stabilisca se sono reticoli.*

ii) $[1] = \{3^m | m \in \mathbb{N}_0\} = [3] = [9]$, $[2] = \{2\}$, $[4] = \{4\}$, $[6] = \{6\}$. Le classi sono infinite.

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 18 e 12 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Il minimo è 1 che quindi è anche l'unico elemento minimale. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo (ad esempio non esiste $sup\{6, 4\}$, $(B, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo.

Esercizio A.4

– Sia $f : S \to T$ una applicazione; si dimostri che $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

– Considerate le applicazioni:

$$f : x \in 7\mathbb{N}_0 \to \frac{x}{7} + 2 \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 2|n-2| \in 2\mathbb{N}_0$$

i) si calcolino: $f(\{0, 7, 21\})$, $f(14\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0, 2, 9, 13\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{0, 2, 4, 6, 8, 30\})$, $g^{-1}(2\mathbb{N}_0)$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determini l' applicazione composta gof, si dimostri che è biettiva e si calcoli l'inversa $(gof)^{-1}$.

i) $f(\{0, 7, 21\}) = \{2, 3, 5\}$, $f(14\mathbb{N}_0) = 2\mathbb{N}$, $f^{-1}(\{0, 2, 9, 13\}) = \{0, 49, 77\}$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = 7\mathbb{N}_0$, $g(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) = \{0, 2, 4, 6\}$, $g(\mathbb{N}_0) = 2\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0, 2, 4, 6, 8, 30\}) = \{0, 2, 4, 5, 6, 17\}$, $g^{-1}(2\mathbb{N}_0) = \mathbb{N}_0$

ii) f è iniettiva ma non è suriettiva (ad esempio non esiste alcun $x \in 7\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = 0$) , g non è iniettiva (infatti ad esempio $g(0) = 4 = g(4)$) ma è suriettiva.

iii) $gof : x \in 7\mathbb{N}_0 \to \frac{2x}{7} \in 2\mathbb{N}_0$ e $(gof)^{-1} : y \in 2\mathbb{N}_0 \to \frac{7y}{2} \in 7\mathbb{N}_0$.

Esercizio A.5

– Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - 2y = -3 \\ -3y + 5z = 2 \end{cases}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(-\frac{24}{23}, \frac{21}{46}, \frac{31}{46})\}$; i) $detB = -45$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{11}{45} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = -(\lambda + 3)(3 - \lambda)(5 - \lambda)$, gli autovalori sono $-3, 3, 5$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(-3x, x, -\frac{7}{8}x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a 3 $\{(0, x, -2x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 5 $\{(0, 0, x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio A.6 *Si considerino i punti A e B dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(-3, 1, 0)$ e $(1, -2, 5)$, rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB contiene il punto P di coordinate $(7, 1, 2)$.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $17x \equiv 2(mod 29)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1101)_2$, $(431)_5$;

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che per ogni $n \geq 0$ si ha:

$$1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

i) La retta AB ha equazioni $x = -3 + 5t, y = 1, z = t$; ii) La retta non contiene il punto P. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[24]_{29}$ iv) 13,116.