IV Appello — Traccia A

20 giugno 2013

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

Esercizio A.1 *Data la formula*

$$(A \to (B \wedge \neg A)) \vee B$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale disgiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale congiuntiva.*

1.

A	B	$\neg A$	$(B \wedge \neg A)$	$(A \to (B \wedge \neg A))$	$(A \to (B \wedge \neg A)) \vee B$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1

2. $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee B)$.

3.

$$\begin{aligned}
&(A \to (B \wedge \neg A)) \vee B \equiv \\
&(\neg A \vee (B \wedge \neg A)) \vee B \equiv \\
&(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg A)) \vee B \equiv \\
&((\neg A \vee B) \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \equiv \\
&(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \equiv \\
&(\neg A \vee B)
\end{aligned}$$

Esercizio A.2 *Si consideri la formula*

$$(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \to (\forall x \exists y (\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \ .$$

i) Fissata l'interpretazione

$$D = \mathbb{N}, \quad P(n) \Leftrightarrow n \text{ è pari}, \quad Q(n) \Leftrightarrow n \text{ è dispari}$$

dare l'interpretazione della formula e dire se è vera,

ii) Trasformare la formula del primo ordine sopra in forma normale prenessa.

iii) Utilizzando il metodo degli alberi semantici ***dire*** *se la formula è una tautologia del primo ordine.*

i)

$\mathbb{N} \models (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y)))$ sse

$\mathbb{N} \models \neg (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \vee (\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y)))$ sse

$\mathbb{N} \models \neg (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$ oppure $\mathbb{N} \models (\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y)))$ sse

$\mathbb{N} \not\models (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$ oppure per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \models (\exists y(\neg P(n) \vee \neg Q(y)))$ sse

$\mathbb{N} \not\models \exists x P(x)$ oppure $\mathbb{N} \not\models \exists x Q(x)$ oppure per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \models (\exists y(\neg P(n) \vee \neg Q(y)))$ sse

C'è un $m \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \not\models P(m)$ oppure c'è un $l \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \not\models Q(l)$
oppure per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \models \neg P(n) \vee \neg Q(k)$ sse

C'è un $m \in \mathbb{N}$ tale che m non è pari oppure c'è un $l \in \mathbb{N}$ tale che l non è dispari
oppure per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbb{N} \models \neg P(n)$ oppure $\mathbb{N} \models \neg Q(k)$ sse

C'è un $m \in \mathbb{N}$ tale che m non è pari oppure c'è un $l \in \mathbb{N}$ tale che l non è dispari
oppure per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che n non è pari oppure k non è dispari .

Ovviamente vera.

ii)

$$
\begin{aligned}
&(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&(\exists x P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&(\exists x P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall z \exists y(\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&\neg (\exists x P(x) \vee Q(x)) \vee (\forall z \exists y(\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&(\forall x \neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z \exists y(\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&\forall x \forall z(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\exists y(\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&\forall x \forall z \exists y(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(z) \vee \neg Q(y) \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}((\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \to (\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))))^* \\
| \\
\mathrm{V}(\exists x\,(P(x) \vee Q(x)))^* \\
| \\
\mathrm{F}((\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))))^* \\
| \\
\mathrm{V}(P(c) \vee Q(c))^* \\
| \\
\mathrm{F}(\exists y(\neg P(d) \vee \neg Q(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\mathrm{V}(P(c)) & \mathrm{V}(Q(c)) \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg P(d) \vee \neg Q(c)))^* & \mathrm{F}(\neg P(d) \vee \neg Q(c)))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg P(d))^* & \mathrm{F}(\neg P(d))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg Q(c))^* & \mathrm{F}(\neg Q(c))^* \\
| & | \\
\mathrm{V}(P(d)) & \mathrm{V}(P(d)) \\
| & | \\
\mathrm{V}(Q(c)) & \mathrm{V}(Q(c)) \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg P(d) \vee \neg Q(d)))^* & \mathrm{F}(\neg P(d) \vee \neg Q(d)))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg P(d))^* & \mathrm{F}(\neg P(d))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg Q(d))^* & \mathrm{F}(\neg Q(d))^* \\
| & | \\
\mathrm{V}(P(d)) & \mathrm{V}(P(d)) \\
| & | \\
\mathrm{V}(Q(d)) & \mathrm{V}(Q(d))
\end{array}
$$

iii)

Non è una tautologia perché non si chiudono tutti i rami.

Esercizio A.3 *Sia* $W := \{5k+1 | k \in \mathbb{N}_0\}$ *l'insieme dei numeri naturali che sono successivi di un multiplo di* 5.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$5k+1 \mathcal{R} 5h+1 :\iff \textit{il valore assoluto } |k-h| \in 3\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi [1], [6], [11], [16], [21], [26] *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ *definita da:*

$$5k+1 \mathcal{R}^* 5h+1 :\iff k \textit{ divide } h$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ *è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali. Si dica infine se* $(W, \mathcal{R}^*)$ *è un reticolo.*

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W: $A = \{6, 11, 16, 31\}$ e $B = \{11, 16, 21\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

ii) $[1] = \{5k+1 | k \in 3\mathbb{N}_0\} = [16]$, $[6] = \{5k+1 | k \equiv 1 (mod 3)\} = [21]$, $[11] = \{5k+1 | k \equiv 2 (mod 3)\} = [26]$. Le classi sono tre.

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 11 e 16 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Il minimo è 6 che quindi è anche l'unico elemento minimale. Il massimo è 1 che quindi è anche l'unico elemento massimale. $(W, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo , $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo (ad esempio non esiste in B $inf\{11, 16\}$).

Esercizio A.4

– *Sia $f : S \to T$ una applicazione; si dimostri che $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.*

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 5\mathbb{N}_0 \to \frac{10 - x}{5} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : z \in \mathbb{Z} \to 5|z - 2| \in 5\mathbb{N}_0$$

i) si calcolino: $f(\{0, 5, 10, 15, 20\})$, $f(5\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, -1, -3, 2, 7\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0, 5, 10, 15\})$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0)$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono biettive e si calcolino, in caso affermativo le inverse.

i) $f(\{0, 5, 10, 15, 20\}) = \{0, 1, -1, 2, -2\}$, $f(5\mathbb{N}_0) = \{z \in \mathbb{Z} | z \leq 2\}$, $f^{-1}(\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}) = \{10, 5, 15, 0, 20, 25\}$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = \{0, 5, 10\}$, $g(\{-3, 2, -1, 0, 7\}) = \{0, 15, 10, 25\}$, $g(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0, 5, 10, 15\}) = \{2, 1, 3, 0, 4, -1, 5\}$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) f è iniettiva ma non è suriettiva (ad esempio non esiste alcun $x \in 5\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = 3$) , g non è iniettiva (infatti ad esempio $g(-3) = 25 = g(7)$) ma è suriettiva.

iii) $gof : x \in 5\mathbb{N}_0 \to x \in 5\mathbb{N}_0$, dunque è l'applicazione identica ed ha per inversa sè stessa, $fog : z \in \mathbb{Z} \to 2 - |z - 2| \in \mathbb{Z}$ non è biettiva.

Esercizio A.5

– *Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z:*

$$\begin{cases} 3x - y + z - 2t = 1 \\ 2y - 3z - t = -2 \\ x + y - 4t = 3 \end{cases}$$

– *Si consideri la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(\frac{11t+4}{10}, \frac{29t+26}{10}, \frac{8t+12}{5}, t) | t \in \mathbb{R}\}$; i) $det B = 6$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6$, gli autovalori sono $-3, -1, 2$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a -1 $\{(x, -23x, 2x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 2 $\{(0, x, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio A.6 *Si considerino i punti A e B dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 5)$, rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB *contiene il punto* P *di coordinate* $(0, 0, 2)$.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $11x \equiv 7(mod 29)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1100101)_2$, $(212201)_3$;

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, *che per ogni* $n \geq 0$ *si ha:*

$$1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^n = \frac{6^{n+1} - 1}{5}$$

i) La retta AB ha equazioni $x = 1, y = 1 - t, z = 5t$; ii) La retta non contiene il punto P. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[27]_{29}$ iv) 101,640.