II Appello — Traccia A

29 gennaio 2013

Nome ____________ Cognome ______________ Matricola ______________

Esercizio A.1 *Data la formula*

$$(\neg A \to (\neg B \vee \neg A)) \wedge B$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale disgiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale disgiuntiva.*

1.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg B \vee \neg A)$	$(\neg A \to (\neg B \vee \neg A))$	$(\neg A \to (\neg B \vee \neg A)) \wedge B$
0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1

2. $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B) \quad (\equiv B)$.

3.

$$\begin{aligned}
&(\neg A \to (\neg B \vee \neg A)) \wedge B \equiv \\
&(A \vee \neg B \vee \neg A)) \wedge B \equiv \\
&\top \wedge B \equiv \\
&B
\end{aligned}$$

Esercizio A.2 *Si consideri la formula*

$$(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to (\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y))) \;\; .$$

i) Fissata l'interpretazione

$$D = \mathbb{N}, \quad P(n) \Leftrightarrow n \textit{ è pari}, \quad Q(n) \Leftrightarrow n \textit{ è dispari}$$

scrivere tutti i passaggi che portano all'interpretazione della formula e dire se è vera o falsa.

ii) Trasformare la formula del primo ordine sopra in forma normale prenessa.

iii) Utilizzando il metodo degli alberi semantici ***dire*** *se la formula è una tautologia del primo ordine.*

i)

$\mathbb{N} \models (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to (\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y)))$ sse

$\mathbb{N} \models \neg (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \vee (\forall x(P(x) \vee \forall y Q(y)))$ sse

$\mathbb{N} \models \exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$ oppure $\mathbb{N} \models \forall x(P(x) \vee \forall y Q(y))$ sse

$\mathbb{N} \models \exists x \neg P(x)$ e $\mathbb{N} \models \exists x \neg Q(x)$ oppure per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \models P(n) \vee \forall y Q(y)$ sse

C'è un $m \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \not\models P(m)$ e c'è un $l \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \not\models Q(l)$
oppure per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \models P(n)$ oppure per ogni $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \models Q(k)$ sse

C'è un $m \in \mathbb{N}$ che non è pari e c'è un $l \in \mathbb{N}$ che non è dispari
oppure per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ n è pari oppure per ogni $k \in \mathbb{N}$ k è dispari.

La formula è vera perché la prima parte della disgiunzione è vera in $\mathbb{N}$. (Ma si noti che la formula è una tautologia del primo ordine, quindi vera in qualsiasi struttura).

ii)

$$
\begin{gathered}
(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to (\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y))) \equiv \\
\neg (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \vee (\forall x(P(x) \vee \forall y Q(y))) \equiv \\
(\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \vee (\forall x \forall y(P(x) \vee Q(y))) \equiv \\
(\exists x \neg P(x) \wedge \exists z \neg Q(z)) \vee (\forall u \forall y(P(u) \vee Q(y))) \equiv \\
\exists x \exists z \forall u \forall y \, (\neg P(x) \wedge \neg Q(z)) \vee (P(u) \vee Q(y)) \; .
\end{gathered}
$$

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}((\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to (\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y))))^* \\
| \\
\mathrm{V}(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))^* \\
| \\
\mathrm{F}(\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y)))^* \\
| \\
\mathrm{F}(\neg P(c_1) \to \forall y Q(y))^* \\
| \\
\mathrm{V}(\neg P(c_1))^* \\
| \\
\mathrm{F}(\forall y Q(y))^* \\
| \\
\mathrm{F}(P(c_1)) \\
| \\
\mathrm{F}(Q(c_2)) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\mathrm{V}(\forall x P(x)) & \mathrm{V}(\forall x Q(x)) \\
| & | \\
\mathrm{V}(P(c_1)) & \mathrm{V}(Q(c_1)) \\
| & | \\
\mathrm{V}(P(c_2)) & \mathrm{V}(Q(c_2)) \\
| & | \\
=== & ===
\end{array}
\end{array}
$$

iii)

È una tautologia perché si chiudono tutti i rami.

Esercizio A.3 *Si consideri l'insieme V costituito dai numeri naturali del tipo $3h + 1$ con $h \in \mathbb{N}_0$:*

$$V := \{3h + 1 | h \in \mathbb{N}_0\}$$

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ definita da:

$$3h + 1 \mathcal{R} 3k + 1 :\iff |h - k| \in 2\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in V.

ii) Si determinino le classi $[1]$, $[4]$, $[7]$, $[10]$ *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$.*

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ definita da:

$$3h + 1 \mathcal{R}^* 3k + 1 :\iff \exists t \in \mathbb{N}_0 : k = ht \;\; (h \textit{ divide } k)$$

è una relazione d'ordine in V.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(V, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$: $A = \{1, 4, 7, 10\}$ e $B = \{4, 7, 10, 13, 28\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

Esercizio A.4

– *Siano $f : S \to T$ e $g : T \to W$ applicazioni; si dimostri che se f e g sono iniettive, allora anche gof è iniettiva.*

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 5\mathbb{Z} \to \frac{|x|}{5} \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 5n - 15 \in 5\mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 5, -5, -15, 10\})$, $f(5\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 1, 2, 3, 4\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{0, 5, -5, -30, -25\})$, $g^{-1}(5\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive.

Esercizio A.5

– *Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z e t:*

$$\begin{cases} x - 3z - t = 1 \\ 3y + 5z + t = 0 \\ y + z + 3t = 2 \end{cases}$$

– *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$A^n = \begin{pmatrix} 7^n & 0 & \sum_{i=0}^{n-1} 7^i \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– *Si consideri la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 11 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

Esercizio A.6 *Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(3, -1, 5)$, $(-7, 0, 4)$, $(-6, 4, -3)$, $(4, 3, -2)$ rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD.

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $6x \equiv 7(mod 11)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1000)_2$, $(212)_3$;

v) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 286.

II Appello — Traccia B

29 gennaio 2013

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

Esercizio B.1 *Data la formula*

$$(\neg A \vee B) \to (A \wedge \neg B)$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale disgiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale congiuntiva.*

1.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee B)$	$(A \wedge \neg B)$	$(\neg A \vee B) \to (A \wedge \neg B)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

2. $A \vee \neg B$.

3.

$$\begin{aligned}
&(\neg A \vee B) \to (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\neg(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&(A \wedge \neg B)\ .
\end{aligned}$$

Esercizio B.2 *Si consideri la formula*

$$\forall x \exists y\, (P(x) \to Q(y)) \wedge (\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y)))\ \ .$$

i) Fissata l'interpretazione

$$D = \mathbb{N}, \quad P(n) \Leftrightarrow n \text{ è dispari}, \quad Q(n) \Leftrightarrow n \text{ è pari}$$

scrivere tutti i passaggi che portano all'interpretazione della formula e dire se è vera o falsa.

ii) Trasformare la formula del primo ordine sopra in forma normale prenessa.

iii) Utilizzando il metodo degli alberi semantici ***dire*** *se la formula è una tautologia del primo ordine.*

i)

$$
\begin{array}{lr}
\mathbb{N} \models \forall x \exists y\, (P(x) \to Q(y)) \wedge (\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y))) & \text{sse} \\
\mathbb{N} \models \forall x \exists y\, (P(x) \to Q(y)) \text{ e } \mathbb{N} \models (\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y))) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } m \in \mathbb{N}\ \mathbb{N} \models \exists y\, (P(m) \to Q(y)) \text{ e per ogni } n \in \mathbb{N}\ \mathbb{N} \models (\neg P(n) \to \forall y Q(y)) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } m \in \mathbb{N} \text{ esiste un } l \in \mathbb{N} \text{ tale che } \mathbb{N} \models P(m) \to Q(l) & \\
\qquad \text{e per ogni } n \in \mathbb{N}\ \mathbb{N} \models P(n) \vee \forall y Q(y) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } m \in \mathbb{N} \text{ esiste un } l \in \mathbb{N} \text{ tale che } \mathbb{N} \models \neg P(m) \vee Q(l) & \\
\qquad \text{e per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e ogni } k \in \mathbb{N}\ \mathbb{N} \models P(n) \vee Q(k) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } m \in \mathbb{N} \text{ esiste un } l \in \mathbb{N} \text{ tale che } \mathbb{N} \models \neg P(m) \text{ oppure } \mathbb{N} \models Q(l) & \\
\qquad \text{e per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e ogni } k \in \mathbb{N}\ \mathbb{N} \models P(n) \text{ oppure } \mathbb{N} \models Q(k) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } m \in \mathbb{N} \text{ esiste un } l \in \mathbb{N} \text{ tale che } \mathbb{N} \not\models P(m) \text{ oppure } l \text{ è pari} & \\
\qquad \text{e per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e ogni } k \in \mathbb{N}\ n \text{ è dispari oppure } k \text{ è pari} & \text{sse} \\
\text{Per ogni } m \in \mathbb{N} \text{ esiste un } l \in \mathbb{N} \text{ tale che } m \text{ non è dispari oppure } l \text{ è pari} & \\
\qquad \text{e per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e ogni } k \in \mathbb{N}\ \ n \text{ è dispari oppure } k \text{ è pari.} &
\end{array}
$$

La formula è falsa perché la prima parte della congiunzione è vera in $\mathbb{N}$, ma la seconda è falsa (ad esempio prendendo $n = 2$ e $k = 3$).

ii)

$$
\begin{array}{l}
\forall x \exists y\, (P(x) \to Q(y)) \wedge (\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y))) \equiv \\
\forall x \exists y\, (\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge (\forall x(P(x) \vee \forall y Q(y))) \equiv \\
\forall x(\exists y\, (\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall y\, ((P(x) \vee Q(y)))) \equiv \\
\forall x(\exists y\, (\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall z\, ((P(x) \vee Q(z)))) \equiv \\
\forall x \exists y \forall z((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge ((P(x) \vee Q(z)))) \equiv
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}(\forall x \exists y\, (P(x) \to Q(y)) \wedge (\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y))))^*} \\
\swarrow & \searrow \\
\mathrm{F}(\forall x \exists y\, (P(x) \to Q(y)))^* & \mathrm{F}((\forall x(\neg P(x) \to \forall y Q(y))))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(\exists y\, (P(c_1) \to Q(y)) & \mathrm{F}(\neg P(c_1) \to \forall y Q(y))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}((P(c_1) \to Q(c_1)) & \mathrm{V}(\neg P(c_1))^* \\
| & | \\
\mathrm{V}(P(c_1) & \mathrm{F}(\forall y Q(y))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(Q(c_1) & \mathrm{F}(P(c_1)) \\
 & | \\
 & \mathrm{F}(Q(c_1))
\end{array}
$$

iii)

Non è una tautologia perché non si chiudono tutti i rami.

Esercizio B.3 *Si consideri l'insieme V costituito dai numeri naturali del tipo $5h + 1$ con $h \in \mathbb{N}_0$:*

$$V := \{5h + 1 | h \in \mathbb{N}_0\}$$

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$5h + 1\mathcal{R}5k + 1 :\Longleftrightarrow |h - k| \in 2\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in V.

ii) Si determinino le classi $[1]$, $[6]$, $[11]$, $[16]$ *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ *definita da:*

$$5h + 1\mathcal{R}^*5k + 1 :\Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}_0 : k = ht \ \ (h \text{ divide } k)$$

è una relazione d'ordine in V.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(V, \mathcal{R}^*)$ *è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.*

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$*:* $A = \{1, 6, 11, 16\}$ *e* $B = \{6, 11, 16, 21, 46\}$ *si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati* $(A, \mathcal{R}^*)$ *e* $(B, \mathcal{R}^*)$ *e si stabilisca se sono reticoli.*

Esercizio B.4

– Siano $f : S \to T$ *e* $g : T \to W$ *applicazioni; si dimostri che se* f *e* g *sono suriettive, allora anche* gof *è suriettiva.*

– Considerate le applicazioni:

$$f : x \in 7\mathbb{Z} \to \frac{|x|}{7} \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 7n - 21 \in 7\mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 7, -7, -21, 14\})$, $f(7\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 1, 2, 3, 4\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{0, 7, -7, -42, -35\})$, $g^{-1}(7\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f *e* g *sono iniettive e se sono suriettive.*

iii) Si determinino le applicazioni composte gof *e* fog*, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive.*

Esercizio B.5

– Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z *e* t*:*

$$\begin{cases} x - 2z - t = 5 \\ 2y - z + t = 0 \\ 4y + z + t = -1 \end{cases}$$

– Sia

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ *si ha:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 11^n & 0 & \sum_{i=0}^{n-1} 11^i \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B *è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli* B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

Esercizio B.6

– Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(2, 1, -3)$, $(0, 0, 11)$, $(6, -1, -2)$, $(8, 2, -16)$ *rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD.

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $9x \equiv 21 (mod 23)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1011)_2$, $(222)_3$;

v) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 456.