Prova in itinere n. 3— Traccia A

9 gennaio 2013

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

Esercizio A.1 *Trasformare la seguente formula del primo ordine in forma normale prenessa.*

$$(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\forall x \exists y (\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \ .$$

$$\begin{aligned}
&(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\forall x \exists y (\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&(\exists x P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x \exists y (\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&(\exists x P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall z \exists y (\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&\neg\, (\exists x P(x) \vee Q(x)) \vee (\forall z \exists y (\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&(\forall x \neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z \exists y (\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&\forall x \forall z (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\exists y (\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv \\
&\forall x \forall z \exists y (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(z) \vee \neg Q(y) \ .
\end{aligned}$$

Esercizio A.2 *Utilizzando il metodo degli alberi semantici* ***dire*** *se la seguente formula è una tautologia del primo ordine.*

$$(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \ .$$

$$\mathrm{F}((\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))))^*$$
$$|$$
$$\mathrm{V}(\exists x\,(P(x) \vee Q(x)))^*$$
$$|$$
$$\mathrm{F}((\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))))^*$$
$$|$$
$$\mathrm{V}(P(c) \vee Q(c))^*$$
$$|$$
$$\mathrm{F}(\exists y(\neg P(d) \vee \neg Q(y)))$$

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{V}(P(c)) & \mathrm{V}(Q(c)) \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg P(d) \vee \neg Q(c)))^* & \mathrm{F}(\neg P(d) \vee \neg Q(c)))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg P(d))^* & \mathrm{F}(\neg P(d))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg Q(c))^* & \mathrm{F}(\neg Q(c))^* \\
| & | \\
\mathrm{V}(P(d)) & \mathrm{V}(P(d)) \\
| & | \\
\mathrm{V}(Q(c)) & \mathrm{V}(Q(c)) \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg P(d) \vee \neg Q(d)))^* & \mathrm{F}(\neg P(d) \vee \neg Q(d)))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg P(d))^* & \mathrm{F}(\neg P(d))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(\neg Q(d))^* & \mathrm{F}(\neg Q(d))^* \\
| & | \\
\mathrm{V}(P(d)) & \mathrm{V}(P(d)) \\
| & | \\
\mathrm{V}(Q(d)) & \mathrm{V}(Q(d))
\end{array}$$

Non è una tautologia perché non si chiudono tutti i rami.

Esercizio A.3 *Per ogni intero positivo $n \in \mathbb{N}$ si denoti con $h(n)$ l'esponente della massima potenza di 2 che divide n; sia cioè $n = 2^{h(n)} t_n$ con t_n dispari.*

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ definita da:

$$n\mathcal{R}^*m :\Longleftrightarrow h(n) = h(m) \text{ e } t_n \leq t_m$$

è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$.

ii) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

iii) Considerati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 12, 24\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

ii) l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 2 e 4 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutte le potenze di 2. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. iii) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo perchè è totalmente ordinato, $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo ad esempio non esiste $sup\{2, 4\}$.

Esercizio A.4 *Si consideri l'insieme* $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ *degli interi modulo* 15 *strutturato con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione.*

i) Quali sono gli elementi invertibili, cioè simmetrizzabili rispetto alla moltiplicazione?

ii) Si determinino l'opposto di $[7]_{15}$ *e l'opposto di* $[3]_{15}$ *e si dica che tipo di struttura algebrica è* $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $7x \equiv 3(mod 15)$.

i) modulo 15 sono invertibili 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 e 14; ii) modulo 15 si ha che -7=8 e -3=12, la struttura considerata è un gruppo abeliano. ii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[9]_{15}$

Esercizio A.5 *Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate* $(1,-3,5)$, $(0,-6,17)$, $(2,0,-7)$, $(1,1,1)$ *rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD.

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti determinando, in quest'ultimo caso, le coordinate del punto di intersezione.

i) La retta AB ha equazioni x=1-t, y=-3-3t, z=5+12t; la retta CD ha equazioni x=2-t, y=t, z=-7+8t.
ii) Le due rette sono incidenti e il punto comune alle due rette è C.

Esercizio A.6

i) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori ed i relativi autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Considerato il sottoinsieme $X = \{(-2,1,3),(0,-4,0),(0,0,5),(0,-1,-2)\}$ *dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$ *su* $\mathbb{R}$*, si stabilisca se* X *è un sistema di generatori di* $\mathbb{R}^3$ *e se è una base.*

i)$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 4)(1-\lambda)$; autovalori: $1, 2, -2$; autovettori relativi a 1: $(x, 0, 0)$ con $0 \neq x \in \mathbb{R}$, autovettori relativi a 2: $(-2y, y, -y)$ con $0 \neq y \in \mathbb{R}$, autovettori relativi a -2: $(\frac{-8}{3}z, z, z)$ con $0 \neq z \in \mathbb{R}$. ii) X è un sistema di generatori ma non una base.

Prova in itinere n. 3— Traccia B

9 gennaio 2013

Nome __________________ Cognome ________________________ Matricola ______________________

Esercizio B.1 *Trasformare la seguente formula del primo ordine in forma normale prenessa.*

$$\exists x Q(x) \leftrightarrow (\forall x \neg P(x) \land \forall x \neg Q(x)) \ .$$

$$
\begin{aligned}
&\exists x Q(x) \leftrightarrow (\forall x(\neg P(x) \land x \neg Q(x))) \equiv \\
&(\neg \exists x Q(x) \lor (\forall x \neg P(x) \land \forall x \neg Q(x))) \land (\neg(\forall x \neg P(x) \land \forall x \neg Q(x)) \lor \exists x Q(x)) \equiv \\
&(\forall x \neg Q(x) \lor \forall x(\neg P(x) \land \neg Q(x))) \land \neg(\forall x(\neg P(x) \land \neg Q(x)) \lor \exists x Q(x)) \equiv \\
&(\forall x \neg Q(x) \lor \forall y(\neg P(y) \land \neg Q(y))) \land (\exists x(P(x) \lor Q(x)) \lor \exists x Q(x)) \equiv \\
&(\forall x \neg Q(x) \lor \forall y(\neg P(y) \land \neg Q(y))) \land (\exists x(P(x) \lor Q(x) \lor Q(x)) \equiv \\
&\forall x \forall y(\neg Q(x) \lor (\neg P(y) \land \neg Q(y))) \land (\exists z(P(z) \lor Q(z) \lor Q(z)) \equiv \\
&\forall x \forall y \exists z(\neg Q(x) \lor (\neg P(y) \land \neg Q(y))) \land ((P(z) \lor Q(z) \lor Q(z)) \ .
\end{aligned}
$$

Esercizio B.2 *Utilizzando il metodo degli alberi semantici* ***dire*** *se la seguente formula è una tautologia del primo ordine.*

$$(\forall x \exists y P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x))) \ .$$

$$\mathrm{F}((\forall x \exists y P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x))))^*$$
$$|$$
$$\mathrm{V}((\forall x \exists y P(x) \vee Q(x)))$$
$$|$$
$$\mathrm{F}((\forall x (P(x) \vee Q(x)))^*$$
$$|$$
$$\mathrm{F}(P(c) \vee Q(c))^*$$
$$|$$
$$\mathrm{F}(P(c))$$
$$|$$
$$\mathrm{F}(Q(c))$$
$$|$$
$$\mathrm{V}((\exists y P(c) \vee Q(x)))^*$$
$$|$$
$$\mathrm{V}(P(c) \vee Q(x))^*$$

$$\begin{array}{cc} \mathrm{V}(P(c)) & \mathrm{V}(Q(x)) \\ | & \\ == & \end{array}$$

Non è una tautologia perché non si chiudono tutti i rami.

Esercizio B.3 *Per ogni intero positivo $n \in \mathbb{N}$ si denoti con $h(n)$ l'esponente della massima potenza di 3 che divide n; sia cioè $n = 3^{h(n)} t_n$ con $t_n \notin 3\mathbb{N}$.*

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ definita da:

$$n\mathcal{R}^*m :\Longleftrightarrow\ h(n) = h(m)\ \text{ e } t_n \leq t_m$$

è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$.

ii) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

iii) Considerati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$: $A = \{1, 2, 5, 7\}$ e $B = \{3, 9, 15, 27, 45, 135\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

ii) l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 3 e 9 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutte le potenze di 3. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. iii) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo perchè è totalmente ordinato, $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo ad esempio non esiste $sup\{3, 9\}$.

Esercizio B.4 *Si consideri l'insieme* $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ *degli interi modulo* 21 *strutturato con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione.*

i) Quali sono gli elementi invertibili, cioè simmetrizzabili rispetto alla moltiplicazione?

ii) Si determinino l'opposto di $[13]_{21}$ *e l'opposto di* $[7]_{21}$ *e si dica che tipo di struttura algebrica è* $(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}, +)$.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $11x \equiv 2(mod21)$.

i) modulo 21 sono invertibili 1, 2, 4, 5, 8,10, 11, 13, 16,17,19,20; ii) modulo 15 si ha che -13=8 e -7=14, la struttura considerata è un gruppo abeliano. ii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[4]_{21}$

Esercizio B.5 *Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(-4, 2, 0)$, $(1, 2, -1)$, $(-9, 2, 1)$, $(3, -5, 1)$ rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD.

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti determinando, in quest'ultimo caso, le coordinate del punto di intersezione.

i) La retta AB ha equazioni x=-4+5t, y=2, z=-t; la retta CD ha equazioni x=-9+12t, y=2-7t, z=1.
ii) Le due rette sono incidenti e il punto comune alle due rette è C.

Esercizio B.6

i) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori ed i relativi autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Considerato il sottoinsieme $X = \{(-1,0,3),(0,0,1),(-2,5,1),(1,1,1)\}$ *dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$ *su* $\mathbb{R}$*, si stabilisca se* X *è un sistema di generatori di* $\mathbb{R}^3$ *e se è una base.*

i)$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 9)(-2 - \lambda)$; autovalori: $-2, 3, -3$; autovettori relativi a -2: $(x, 0, 0)$ con $0 \neq x \in \mathbb{R}$, autovettori relativi a 3: $(\frac{2}{5}z, -z, z)$ con $0 \neq z \in \mathbb{R}$, autovettori relativi a -3: $(-4y, y, y)$ con $0 \neq y \in \mathbb{R}$.
ii) X è un sistema di generatori ma non una base.