

Prova in itinere n. 3— Traccia A

9 gennaio 2013

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

Esercizio A.1 Per ogni intero positivo $n \in \mathbb{N}$ si denoti con $h(n)$ l'esponente della massima potenza di 2 che divide n ; sia cioè $n = 2^{h(n)}t_n$ con t_n dispari.

i) Si dimostri che la relazione \mathcal{R}^* definita da:

$$n\mathcal{R}^*m : \iff h(n) = h(m) \text{ e } t_n \leq t_m$$

è una relazione d'ordine in \mathbb{N} .

ii) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

iii) Considerati i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{N} : $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 12, 24\}$ si disegnano i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati (A, \mathcal{R}^*) e (B, \mathcal{R}^*) e si stabilisca se sono reticoli.

ii) l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 2 e 4 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutte le potenze di 2. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. iii) (A, \mathcal{R}^*) è un reticolo perchè è totalmente ordinato, (B, \mathcal{R}^*) non è un reticolo ad esempio non esiste $\sup\{2, 4\}$.

Esercizio A.2 Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ degli interi modulo 15 strutturato con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione.

i) Quali sono gli elementi invertibili, cioè simmetrizzabili rispetto alla moltiplicazione?

ii) Si determinino l'opposto di $[7]_{15}$ e l'opposto di $[3]_{15}$ e si dica che tipo di struttura algebrica è $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $7x \equiv 3 \pmod{15}$.

i) modulo 15 sono invertibili 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 e 14; ii) modulo 15 si ha che $-7=8$ e $-3=12$, la struttura considerata è un gruppo abeliano. ii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[9]_{15}$

Esercizio A.3 Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(1, -3, 5), (0, -6, 17), (2, 0, -7), (1, 1, 1)$ rispettivamente.

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD .

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti determinando, in quest'ultimo caso, le coordinate del punto di intersezione.

i) La retta AB ha equazioni $x=1-t, y=-3-3t, z=5+12t$; la retta CD ha equazioni $x=2-t, y=t, z=-7+8t$.

ii) Le due rette sono incidenti e il punto comune alle due rette è C .

Esercizio A.4

i) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori ed i relativi autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Considerato il sottoinsieme $X = \{(-2, 1, 3), (0, -4, 0), (0, 0, 5), (0, -1, -2)\}$ dello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 su \mathbb{R} , si stabilisca se X è un sistema di generatori di \mathbb{R}^3 e se è una base.

i) $p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 4)(1 - \lambda)$; autovalori: $1, 2, -2$; autovettori relativi a 1 : $(x, 0, 0)$ con $0 \neq x \in \mathbb{R}$, autovettori relativi a 2 : $(-2y, y, -y)$ con $0 \neq y \in \mathbb{R}$, autovettori relativi a -2 : $(\frac{-8}{3}z, z, z)$ con $0 \neq z \in \mathbb{R}$. ii) X è un sistema di generatori ma non una base.

CORSO DI MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Prova in itinere n. 3— Traccia B
9 gennaio 2013

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

Esercizio B.1 Per ogni intero positivo $n \in \mathbb{N}$ si denoti con $h(n)$ l'esponente della massima potenza di 3 che divide n ; sia cioè $n = 3^{h(n)}t_n$ con $t_n \notin 3\mathbb{N}$.

i) Si dimostri che la relazione \mathcal{R}^* definita da:

$$n\mathcal{R}^*m : \iff h(n) = h(m) \text{ e } t_n \leq t_m$$

è una relazione d'ordine in \mathbb{N} .

ii) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

iii) Considerati i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{N} : $A = \{1, 2, 5, 7\}$ e $B = \{3, 9, 15, 27, 45, 135\}$ si disegnano i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati (A, \mathcal{R}^*) e (B, \mathcal{R}^*) e si stabilisca se sono reticoli.

ii) l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 3 e 9 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutte le potenze di 3 . Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. iii) (A, \mathcal{R}^*) è un reticolo perchè è totalmente ordinato, (B, \mathcal{R}^*) non è un reticolo ad esempio non esiste $\sup\{3, 9\}$.

Esercizio B.2 Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ degli interi modulo 21 strutturato con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione.

i) Quali sono gli elementi invertibili, cioè simmetrizzabili rispetto alla moltiplicazione?

ii) Si determinino l'opposto di $[13]_{21}$ e l'opposto di $[7]_{21}$ e si dica che tipo di struttura algebrica è $(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}, +)$.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $11x \equiv 2 \pmod{21}$.

i) modulo 21 sono invertibili $1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20$; ii) modulo 15 si ha che $-13=8$ e $-7=14$, la struttura considerata è un gruppo abeliano. ii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[4]_{21}$

Esercizio B.3 Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(-4, 2, 0), (1, 2, -1), (-9, 2, 1), (3, -5, 1)$ rispettivamente.

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD .

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti determinando, in quest'ultimo caso, le coordinate del punto di intersezione.

i) La retta AB ha equazioni $x=-4+5t, y=2, z=-t$; la retta CD ha equazioni $x=-9+12t, y=2-7t, z=1$.

ii) Le due rette sono incidenti e il punto comune alle due rette è C .

Esercizio B.4

i) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori ed i relativi autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Considerato il sottoinsieme $X = \{(-1, 0, 3), (0, 0, 1), (-2, 5, 1), (1, 1, 1)\}$ dello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 su \mathbb{R} , si stabilisca se X è un sistema di generatori di \mathbb{R}^3 e se è una base.

i) $p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 9)(-2 - \lambda)$; autovalori: $-2, 3, -3$; autovettori relativi a -2 : $(x, 0, 0)$ con $0 \neq x \in \mathbb{R}$, autovettori relativi a 3 : $(\frac{2}{5}z, -z, z)$ con $0 \neq z \in \mathbb{R}$, autovettori relativi a -3 : $(-4y, y, y)$ con $0 \neq y \in \mathbb{R}$.
ii) X è un sistema di generatori ma non una base.