Matematica Discreta e Logica Matematica
CdL in Informatica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Università degli Studi di Salerno
A.A. 2008/2009
Esercitazione Intercorso di Algebra Lineare

Esercizio 1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ -3/2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^4 \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot A \cdot A \cdot A.$$

Dimostrare che $A^4 = 0$ e dedurne (ricorrendo opportunamente al teorema di Binet) che A non è invertibile.

Esercizio 2. Discutere l'invertibilità delle seguenti matrici ed, eventualmente, calcolarne le inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1/2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Senza fare alcun conto, ma solo guardando le seguenti matrici, dedurre, argomentando opportunamente, che nessuna di esse è invertibile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1 & 1 \\ -1 & 1/3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti sistemi lineari con il metodo di Cramer, ove possibile, altrimenti, argomentando la scelta, ricorrere al metodo di eliminazione di Gauss. Per ogni sistema indicare esplicitamente il "numero" di soluzioni:

$$S_1 : \begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1 \\ -x + \sqrt{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 1 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases},$$

$$S_3 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}, \quad S_4 : \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ a - b - c + d = 1 \\ a + d = 1 \\ a + 3b + 3c + d = 1 \end{cases}.$$