- LEZIONE 8 DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA - A.A. 2006/2007

Silvio De Siena

1 Meccanica dei sistemi di punti materiali

Ovviamente, non sempre un sistema meccanico può essere ridotto ad un solo punto materiale. Infatti, possiamo trovarci in presenza di più corpi, *ciascuno dei quali* può essere considerato un punto materiale (se le dimensioni di ogni corpo sono trascurabili rispetto alla scala di osservazione). Oppure, possiamo trovarci nella situazione in cui le dimensioni di un corpo *non* sono trascurabili rispetto alla scala di osservazione ("corpo esteso"). Nel primo caso avremo a che fare con un *sistema di punti materiali*, cioè con un sistema costituito da un certo numero N di punti materiali, che potranno in principio interagire tra loro, oltre che con sistemi meccanici esterni. Ma anche nel secondo caso (corpo esteso) potremo considerare il corpo come costituito da *moltissimi* (al limite "infiniti") punti materiali. Potremo infatti dividere il corpo esteso in tanti volumetti "piccolissimi", contenenti un massa anch'essa, ovviamente "piccolissima", ciascuno dei quali può essere considerato un punto materiale; il corpo esteso può essere quindi trattato come un sistema costituito da tutti questi punti materiali.

A questo punto ci possiamo domandare: esistono delle leggi, analoghe a quelle che descrivono la meccanica di un punto materiale, che sono in grado di descrivere la meccanica di un sistema di punti materiali?

Per poter affrontare questo argomento, cominciamo con introdurre delle opportune definizioni e notazioni.

Innanzitutto, numeriamo arbitrariamente da 1 a N i punti materiali costituenti il nostro sistema, ed indichiamo con Indichiamo poi con P_1 il punto dello spazio in cui si trova il primo punto materiale, con P_2 il punto dello spazio in cui si trova il secondo punto materiale, ... , con P_N il punto dello spazio in cui si trova l'N-simo punto materiale. Conviene comunque usare la solita notazione sintetica, indicando con P_i $(i = 1, ..., N)$ il punto dello spazio in cui si trova il punto materiale i-esimo.

Inoltre, indichiamo con m_i $(i = 1, ..., N)$ la massa del punto materiale i-esimo.

Definiamo poi arbitrariamente, nella zona di spazio contenente il sistema di punti materiali, un sistema di riferimento Cartesiano, con origine in un punto O, e con assi X, Y, Z. In questo sistema di riferimento, ognuno degli N punti materiali sarà associato ad un vettore posizione. Indichiamo con $\vec{s}_i$ $(i = 1, ..., N)$ il vettore posizione del punto materiale i-esimo; questo vettore avrà modulo pari alla distanza $\overline{OP_i}$ che va dall'origine O del sistema di riferimento al punto P_i in cui si trova il punto materiale i-esimo, direzione e verso da O a P_i. Indicheremo anche con x_i, y_i, z_i $(i = 1, ..., N)$ le componenti lungo gli assi X, Y, Z di $\vec{s}_i$, cioè $\vec{s}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$.

Ovviamente, se il sistema di punti materiali è soggetto ad una dinamica, la posizione di ogni punto dipenderà dal tempo, e quindi potremo scrivere $\vec{s}_i(t) \equiv (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ $(i = 1, ..., N)$, intendendo che $\vec{s}_i(t)$ rappresenta la posizione del punto materiale i-esimo all'istante t.

Indichiamo, ancora, con $\vec{v}_i(t)$ $(i = 1, ..., N)$ la velocità del punto materiale i-esimo all'istante t. Essa sarà definita, ovviamente da

$$\vec{v}_i(t) \doteq \frac{d\vec{s}_i(t)}{dt} \; ; \; i = 1, ..., N \; . \tag{1}$$

La velocità del punto materiale i-esimo all'istante t avrà componenti lungo gli assi X, Y, Z $v_{i,x}(t), v_{i,y}(t), v_{i,z}(t)$, definite come le derivate temporali delle corrispondenti componenti di $\vec{s}_i(t)$:

$$\begin{aligned} v_{i,x}(t) &\doteq \frac{dx_i(t)}{dt} \; ; \; i = 1, ..., N \; , \\ v_{i,y}(t) &\doteq \frac{dy_i(t)}{dt} \; ; \; i = 1, ..., N \; , \\ v_{i,z}(t) &\doteq \frac{dz_i(t)}{dt} \; ; \; i = 1, ..., N \; . \end{aligned} \tag{2}$$

Introduciamo anche la quantità di moto $\vec{p}_i(t)$ $(i = 1, ..., N)$ del punto materiale i-esimo all'istante t, definita da

$$\vec{p}_i(t) \doteq m_i \; \vec{v}_i(t) \; ; \; i = 1, ..., N \; , \tag{3}$$

le cui componenti sono, ovviamente

$$\vec{p}_i(t) \equiv p_{i,x}(t), p_{i,y}(t), p_{i,z}(t) \equiv (m_i\ v_{i,x}(t), m_i\ v_{i,y}(t), m_i\ v_{i,z}(t))$$

$$\equiv \left(m_i\ \frac{dx_i(t)}{dt}, m_i\ \frac{dy_i(t)}{dt}, m_i\ \frac{dz_i(t)}{dt} \right).$$

Definiamo, infine, la *quantità di moto totale* $\vec{p}^{(tot)}$ del sistema all'istante t come

$$\vec{p}^{(tot)}(t) \doteq \sum_{i=1,\ldots,N} \vec{p}_i(t)\ . \tag{4}$$

Introdotte queste definizioni e notazioni, possiamo ora passare a stabilire i principi che regolano la dinamica dei sistemi di punti materiali.

1.1 Il principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato

Allo scopo di arrivare ad enunciare le leggi che regolano regolano la dinamica dei sistemi di punti materiali introduciamo innanzitutto il concetto di *sistema isolato di punti materiali*: *un sistema di N punti materiali si definisce isolato se le forze che agiscono su un qualsiasi punto del sistema sono esercitate esclusivamente dagli altri punti del sistema stesso.* Se definiamo *forze interne* le forze che si esercitano tra i soli punti del sistema, possiamo anche affermare che *un sistema di N punti materiali si definisce isolato se in esso sono presenti esclusivamente forze interne.* Un esempio di sistema isolato è un sistema di punti materiali tra i quali si esercita attrazione gravitazionale reciproca, e che si trova molto distante da qualsiasi altro sistema materiale.

Indichiamo ora con $\vec{F}_{ij}$ $(i, j = 1, ..., N\ ; i \neq j)$ la forza che il punto materiale i-esimo esercita sul punto materiale j-esimo; per esempio, $\vec{F}_{12}$ è la forza che il punto materiale 1 esercita sul punto materiale 2. Chiaramente, le forze $\vec{F}_{ij}$ sono le forze interne. Definiamo poi la *risultante delle forze interne, o forza totale interna,* $\vec{F}^{(int)}$ come la somma vettoriale di tutte le forze interne:

$$\vec{F}^{(int)} \doteq {\sum}^{(')}{}_{i,j=1,\ldots,N}\ \vec{F}_{ij}\ , \tag{5}$$

dove $\sum^{(')}$ indica che nella somma non viene incluso il caso $i = j$. Si noti che nella somma compaiono sia $\vec{F}_{ij}$ (la forza che i esercita su j) che $\vec{F}_{ji}$ (la forza che j esercita su i).

Adesso enunciamo un principio di conservazione che avrà un'importante conseguenza per le forze interne. Si ricorderà che un principio in Fisica è un assunzione dedotta dall'osservazione, e poi avvalorata controllandone la validità attraverso esperimenti.

Principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato: "in un sistema isolato la quantità di moto totale rimane costante nel tempo".

Espresso in formula, il principio dà

$$\vec{p}^{(tot)}(t) = cost. \tag{6}$$

Vediamo cosa significa esattamente, e quali conseguenze ha, questo principio. Il principio ci dice che, se il sistema di punti materiale rimane isolato, cioè, se in esso sono presenti solo forze interne, i punti materiali potranno anche cambiare le loro velocità *individuali*, e quindi le loro quantità di moto individuali, ma sempre in modo tale che, ad ogni istante, la somma di tutte le quantità di moto rimanga la stessa. Prendiamo, per semplicità, l'esempio semplice di un sistema isolato costituito da due soli punti materiali, di masse m_1 e m_2, di velocità $\vec{v}_1(t)$ e $\vec{v}_2(t)$ all'istante generico t, e, conseguentemente, di quantità di moto $\vec{p}_1(t) = m_1\,\vec{v}_1(t)$ e $\vec{p}_2(t) = m_2\,\vec{v}_2(t)$ all'istante generico t. Adesso consideriamo due diversi istanti di tempo $t^{'}$ e $t^{''} > t^{'}$ (per esempio, $t^{'} = 1\ s$ e $t^{''} = 2\ s$); indichiamo quindi con $\vec{p}_1(t^{'})$ e $\vec{p}_2(t^{'})$ le quantità di moto dei due punti all'istante $t^{'}$, e con $\vec{p}_1(t^{''})$ e $\vec{p}_2(t^{''})$ le quantità di moto dei due punti all'istante $t^{''}$. Supponiamo ancora che $\vec{p}_1(t^{''})$ sia *diverso* da $\vec{p}_1(t^{'})$, cioè che la quantità di moto del primo punto materiale *sia cambiata* passando dall'istante $t^{'}$ al successivo istante $t^{''}$; allora, il principio di conservazione ci dice che *deve essere cambiata anche la quantità di moto del secondo punto, in modo tale che*

$$\vec{p}_1(t^{'}) + \vec{p}_2(t^{'}) = \vec{p}_1(t^{''}) + \vec{p}_2(t^{''}).\ (*)$$

Diamo anche dei valori numerici in questo esempio per renderlo più chiaro. Supponiamo quindi che le masse dei due punti valgano $m_1 = 2\ Kg$ e $m_2 = 3\ Kg$. Assegnamo poi anche le velocità; qui interviene la complicazione che le velocità, e quindi le quantità di moto, sono *vettori*, e quindi le loro somme vanno eseguite vettorialmente, il che è un po' complicato. Allora, per semplificare la situazione, supponiamo che $\vec{v}_1(t^{'})$, $\vec{v}_2(t^{'})$, e $\vec{v}_1(t^{''})$ (e, quindi, anche $\vec{p}_1(t^{'})$, $\vec{p}_2(t^{'})$, e $\vec{p}_1(t^{''})$) *abbiano tutti la stessa direzione*; in altre parole, all'istante $t^{'}$ le velocità (e quindi le quantità di moto) dei due corpi sono dirette lungo la stessa retta, e all'istante successivo $t^{''}$ la velocità (e quindi la quantità di moto) del primo corpo ha cambiato al più il suo modulo e/o il suo verso, ma *è ancora diretta lungo la stessa direzione iniziale.* A questo punto, la condizione $(*)$ (che esprime la conservazione della quantità di moto totale in questo caso) ci dice innanzitutto *che anche $\vec{v}_2(t^{''})$ (e quindi $\vec{p}_2(t^{''})$) deve avere la direzione degli altri tre vettori quantità di moto*; infatti, se il primo membro della $(*)$ $(\vec{p}_1(t^{'}) + \vec{p}_2(t^{'}))$ è un vettore diretto lungo una certa direzione, ed anche il primo vettore a secondo membro della $(*)$ $(\vec{p}_1(t^{''}))$ è diretto lungo la stessa direzione, il secondo vettore del secondo membro $(\vec{p}_2(t^{''}))$ non può avere un'altra direzione, altrimenti la composizione vettoriale lungo la diagonale del rombo di lati $\vec{p}_1(t^{''})$ e $\vec{p}_2(t^{''})$ darebbe una direzione diversa. A questo punto, fissiamo un sistema di riferimento che ha un asse coincidente con la direzione comune dei quattro vettori; se sull'asse assegnamo un verso positivo, le quattro quantità di moto saranno assegnati dandone il modulo ed il segno (positivo se puntano nel verso positivo, negativo se puntano nel verso opposto). In base a queste considerazioni, fissiamo $v_1(t^{'}) = +15\ m/s$, $v_2(t^{'}) = +10\ m/s$, $v_1(t^{''}) = -5\ m/s$; quindi, vediamo che le velocità all'istante $t^{'}$ hanno tutte e due verso positivo, mentre all'istante $t^{''}$ la velocità del primo corpo ha cambiato non solo il modulo ma anche il verso. In base alle definizioni, le corrispondenti quantità di moto valgono $p_1(t^{'}) = +30\ kg \cdot m/s$, $p_2(t^{'}) = +30\ kg \cdot m/s$, e $p_1(t^{''}) = -10\ kg \cdot m/s$. La condizione $(*)$ ci dice allora quanto deve valere $p_2(t^{''})$; infatti, inserendo i precedenti dati numerici nella $(*)$ abbiamo:

$$(30 + 30)\ kg \cdot m/s = -10\ kg \cdot m/s + p_2(t^{''}),$$

da cui ricaviamo

$$p_2(t^{''}) = 70\ kg \cdot m/s.$$

Quindi il principio di conservazione della quantità di moto totale fornisce *un vincolo.*

Ma vedremo ora che tale principio ha un'importante conseguenza relativa alle forze interne. Per arrivare a questa conseguenza facciamo alcune considerazioni preliminari.

Innanzitutto, se deriviamo rispetto al tempo la quantità di moto $\vec{p}_i(t)$ del punto i-esimo, ed usiamo la definizione (3), otteniamo

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} \equiv m_i \, \frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = m_i \, \vec{a}_i(t) \; ; \; i = 1, ..., N \; ; \tag{7}$$

ma la derivata della velocità rispetto al tempo è l'accelerazione, e quindi *la derivata della velocità del punto i-esimo rispetto al tempo è l'accelerazione $\vec{a}_i(t)$ del punto i-esimo*, e quindi:

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = m_i \, \vec{a}_i(t) \; ; \; i = 1, ..., N \; . \tag{8}$$

D'altra parte, dal secondo principio della dinamica sappiamo che il prodotto della massa m_i del punto i-esimo per la sua accelerazione $\vec{a}_i(t)$ *è uguale alla forza totale $\vec{F}_i$ che si esercita sul punto i-esimo*; quindi, possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = \vec{F}_i \; ; \; i = 1, ..., N \; . \tag{9}$$

Ora, se il sistema è isolato la forza totale che si esercita sul punto i-esimo non può che essere uguale alla somma delle forze interne che *gli altri* punti materiali esercitano su di esso; avendo indicato, secondo le nostre notazioni, con $\vec{F}_{ji}$ ($j = 1, ..., N \; ; j \neq i$) la forza che il punto materiale j-esimo esercita sul punto i-esimo, la forza $\vec{F}_i$ è la somma di queste forze, e cioè

$$\vec{F}_i = \sum\nolimits^{(')}_{j=1,...,N} \; \vec{F}_{ji} \; , \tag{10}$$

dove $\sum^{(')}$ indica, come prima, che si somma solo sui $j \neq i$. Inserendo questa relazione nella Eq. (9) abbiamo anche

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = \sum\nolimits^{(')}_{j=1,...,N} \; \vec{F}_{ji} \; ; \; i = 1, ..., N \; . \tag{11}$$

Adesso, facciamo ancora un passo, e inseriamo nell'Eq. (11) la somma su tutti gli da 1 a N, ottenendo

$$\sum_{i=1,...,N} \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = \sum_{i=1,...,N} \sum\nolimits^{(')}_{j=1,...,N} \; \vec{F}_{ji} \equiv \sum\nolimits^{(')}_{i,j=1,...,N} \; \vec{F}_{ij} \; , \tag{12}$$

dove abbiamo unificato le due somme in un'unica somma doppia, con la solita condizione $i \neq j$. Ma, se guardiamo l'Eq. (5) vediamo che il secondo membro della (12) non è altro che la forza interna totale (somma di tutte le forze interne), e quindi abbiamo

$$\sum_{i=1,\ldots,N} \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = \vec{F}^{(int)} \ . \tag{13}$$

Torniamo ora al principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato, espresso dalla condizione (6); deriviamo i due membri di questa relazione, ottenendo

$$\frac{d\vec{p}^{(tot)}(t)}{dt} = 0 \ , \tag{14}$$

poichè la derivata della costante a secondo membro è, come sappiamo, nulla. Se ora ricordiamo la definizione (4) di $\vec{p}^{(tot)}(t)$ e la inseriamo al primo membro della (14), otteniamo

$$\frac{d\vec{p}^{(tot)}(t)}{dt} \equiv \frac{d(\sum_{i=1,\ldots,N} \ \vec{p}_i(t))}{dt} \equiv \sum_{i=1,\ldots,N} \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} \ ; \tag{15}$$

di conseguenza la relazione (14) si riscrive come

$$\sum_{i=1,\ldots,N} \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = 0 \ . \tag{16}$$

Ma l'Eq. (13) ci dice che il primo membro di questa relazione *è uguale alla forza interna totale* $\vec{F}^{(int)}$, e quindi, in definitiva,

$$\vec{F}^{(int)} = 0 \ . \tag{17}$$

Questa relazione, conseguenza del principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato, ci dice che

"*la forza interna totale, cioè la somma delle forze interne, di un sistema isolato è sempre nulla*".

Si noti che talvolta si enuncia questo come principio, e si ricava il principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato come sua conseguenza; di fatto, i due principi sono equivalenti.

Se ci riduciamo ancora al caso particolare di due soli punti materiali (punto 1 e punto 2), vediamo che in questo caso agiscono solo due forze interne: $\vec{F}_{12}$ (la forza che il punto materiale 1 esercita sul punto materiale 2), e $\vec{F}_{21}$ (la forza che il punto materiale 2 esercita sul punto materiale 1). La forza interna totale $\vec{F}^{(int)}$ sarà allora la somma di queste due forze

$$\vec{F}^{(int)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21},$$

e la condizione (17) darà allora

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0,$$

cioè

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \ . \tag{18}$$

Questa relazione è nota come *Principio di azione e reazione*, e si può enunciare nel modo seguente:

"*all'azione che il punto materiale* 1 *esercita sul punto materiale* 2 *(*$\vec{F}_{12}$*) corrisponde una reazione uguale (in modulo) e contraria (in verso) del punto materiale* 2 *sul punto materiale* 1 *(*$-\vec{F}_{21}$*)*".

Si noti, comunque, che la formulazione in termini di azione e reazione può essere estesa anche al caso generale. Infatti, dividiamo arbitrariamente il sistema di N punti materiali in due sottosistemi, costituiti da N_1 e N_2 punti, con $N_1 + N_2 = N$; indichiamo con $\vec{F}_{N_1,N_2}$ la forza totale che il sistema di N_1 punti esercita su quello di N_2 punti, e con $\vec{F}_{N_2,N_1}$ la forza totale che il sistema di N_2 punti esercita su quello di N_1 punti; allora, chiaramente,

$$\vec{F}^{(int)} = \vec{F}_{N_1,N_2} + \vec{F}_{N_2,N_1},$$

e la condizione (17) darà in questo caso

$$\vec{F}_{N_1,N_2} = -\vec{F}_{N_2,N_1} \ . \tag{19}$$

Questo spiega l'enunciato più noto e generale: "ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria".

1.2 Le forze esterne, il concetto di baricentro, e la legge del moto traslatorio di un sistema di punti materiali

Forze esterne

Abbiamo finora considerato sistemi isolati, cioè sistemi di punti materiali nei quali agiscono solo forze interne. Avendo stabilito che la somma delle forze interne è sempre nulla, è chiaro che il sistema *nel suo complesso* mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme; in altre parole, le forze interne non possono modificare il moto complessivo del sistema.

Supponiamo ora che il sistema di punti materiali *non sia isolato*, cioè che su di esso agiscano anche forze esercitate da altri sistemi; chiameremo queste forze *forze esterne*. Per esempio, possiamo pensare ad un sistema di punti materiali che interagiscono tra loro attraverso l'attrazione gravitazionale, ma che sono anche soggetti complessivamente all'attrazione gravitazionale di un corpo esterno al sistema. Consideriamo allora il punto materiale i-esimo ($i = 1, ..., N$), ed indichiamo con $\vec{F}_i^{(int)}$ la forza totale interna che agisce su questo punto (cioè, la somma delle forze che gli altri punti del sistema esercitano sul punto i-esimo), forza che ha ancora l'espressione data dal secondo membro della relazione (10). Indichiamo poi con $\vec{F}_i^{(ext)}$ la risultante delle forze esterne che agisce sullo stesso punto materiale i-esimo. Indicando ancora con $\vec{F}_i$ la forza totale che agisce sul punto materiale i-esimo, vediamo che ora essa è data dalla somma della risultante delle forze interne con la risultante delle forze esterne:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)}.$$

Ma, se $\vec{F}_i$ è la forza totale che agisce sul singolo punto materiale $i$esimo, il secondo principio della dinamica ci dice che

$$\vec{F}_i = m_i \, \vec{a}_i,$$

dove m_i è la massa del punto i-esimo, e $\vec{a}_i$ è la sua accelerazione.
Mettendo insieme le due ultime relazioni, otteniamo

$$\vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)} = m_i \, \vec{a}_i \; , \tag{20}$$

che rappresenta l'equazione del moto del punto i-esimo. Volendo ora trovare l'equazione del moto per l'intero sistema di punti materiali, procediamo a sommare su tutti i valori di i da 1 a N ambedue i membri della (20):

$$\sum_{i=1,\dots,N} \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_{i=1,\dots,N} m_i \; \vec{a}_i \; ; \tag{21}$$

ma al primo membro la somma delle forze interne, come abbiamo visto, è nulla, mentre la somma delle forze esterne su tutti i punti dà la forza totale $\vec{F}^{(ext)}$ che agisce sul sistema, e quindi abbiamo

$$\vec{F}^{(ext)} = \sum_{i=1,\dots,N} m_i \; \vec{a}_i \; . \tag{22}$$

Questa relazione costituisce l'equazione del moto per il sistema di punti materiali nel suo complesso; tuttavia, in questa forma non risulta molto semplice da usare. Passeremo quindi ora ad introdurro il concetto di *baricentro del sistema di punti materiali*, e ad usare questo concetto per arrivare ad una forma della (22) molto semplice da usare.

Il baricentro

Incominciamo col denotare con M la *massa totale del sistema di N punti materiali*, definita da

$$M = \sum_{i=1,\dots,N} m_i \; . \tag{23}$$

Definiamo il *baricentro del sistema di punti materiali* come il punto la cui posizione $\vec{s}_B$ è definita da

$$\vec{s}_B = \frac{1}{M} \sum_{i=1,\dots,N} m_i \; \vec{s}_i \; , \tag{24}$$

dove, ricordiamo, $\vec{s}_i$ denota il vettore-posizione del punto materiale i-esimo, e m_i la massa di tale punto. Vediamo che, nella determinazione della coordinata del baricentro, le posizioni dei singoli punti sono "pesate" con la loro massa: punti che hanno massa maggiore contano di più, nel senso che il baricentro sarà spostato verso di loro. Vediamo anche che essendo le componenti di $\vec{s}_i$ date da $\vec{s}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$, dove x_i, y_i, z_i rappresentano le coordinate lungo gli assi X, Y, Z del punto i-esimo ($i = 1, ..., N$), l'Eq. (24) ci dice che la posizione del baricento in termini di coordinate è data da

$$\begin{aligned}\vec{s}_B &\equiv (x_B, y_B, z_B) \\ &\equiv \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1,...,N} m_i\; x_i, \frac{1}{M} \sum_{i=1,...,N} m_i\; y_i, \frac{1}{M} \sum_{i=1,...,N} m_i\; z_i \right) \; . \end{aligned} \tag{25}$$

Questo rende possibile calcolare per componenti lungo gli assi del prescelto sistema di riferimento la posizione del baricentro.

Adesso, deriviamo due volte rispetto al tempo la posizione del baricentro; tale derivata, per definizione, ci darà *l'accelerazione* $\vec{a}_B$ del baricentro. Otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{s}_B}{dt^2} &\equiv \vec{a}_B \\ &= \frac{d^2((\sum_{i=1,...,N}\; m_i\vec{s}_i)/M)}{dt^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1,...,N} m_i \frac{d^2\vec{s}_i}{dt^2} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1,...,N} m_i\; \vec{a}_i \; ,\end{aligned} \tag{26}$$

dove abbiamo usato il fatto che $d^2\vec{s}_i/dt^2$ non è altro che l'accelerazione $\vec{a}_i$ del punto i-esimo. Confrontando questa relazione con l'Eq. (22), vediamo che il secondo membro della (22) coincide con l'ultimo membro della (26) moltiplicato per la massa totale M, e quindi con il prodotto $M\; \vec{a}_B$ della massa totale del sistema per l'accelerazione del baricentro. Possiamo quindi riscrivere l'Eq. (22) nella forma

$$\vec{F}^{(ext)} = M\; \vec{a}_B \; . \tag{27}$$

Vediamo che questa equazione rappresenta la legge di Newton per un *singolo* punto materiale posto nel baricentro e dotato di massa pari alla massa totale del sistema.

Possiamo quindi affermare che: *la dinamica complessiva di un sistema di punti materiali è equivalente a quella di un singolo punto materiale posto nel baricentro del sistema, dotato di massa pari alla massa totale del sistema, e soggetto alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.*

È ovvio che questo semplifica enormemente lo studio del moto traslazionale di un sistema di punti materiali, perchè, una volta calcolati banalmente il baricentro e la massa totale, lo riduce alllo studio del moto di un singolo punto materiale. È anche chiaro che avremo variazioni del moto complessivo del sistema solo se varia il moto del suo baricentro. Si noti che questo non esclude che i punti del sistema possano muoversi, anche se il sistema nel suo complesso non lo fa. Infatti, si pensi per esempio a due punti materiali attaccati ai due lati di una molla; supponiamo che il tutto sia posato sul ghiaccio (in modo che non ci sia attrito), e supponiamo di tirare in senso opposti i due punti dilatando la molla, e poi di lasciarli andare. I due punti cominceranno allora a muoversi oscillando, *ma il sistema nel suo complesso non si sposterà traslazionalmente sul ghiaccio*.

Adesso vediamo come questa legge ci semplifica anche lo studio dei corpi estesi. Abbiamo visto che anche in questo caso possiamo pensare a questi corpi come un sistema di moltissimi punti materiali, associati a picoli volumetti nei quali avremo diviso il corpo. Quindi, anche in questo caso possiamo calcolare il baricentro del corpo tramite la somma (24) che, entro un cero errore riducibile a piacere, approssimerà un limite nel quale diventerà un "integrale". Una volta calcolato il baricentro del corpo, e conoscendo la sua massa, di fatto potremo studiarne il moto (per esempio, lungo un piano inclinato) sostituendolo con un singolo punto materiale coincidente con il baricentro, e dotato della massa totale del corpo, *anche se le dimensioni del corpo non sono trascurabili rispetto a quelle del moto*. Quindi, tutti gli esercizi fatti per un punto materiale valgono anche per un corpo esteso, sostituito dal suo baricentro. Naturalmente, questo è vero se il corpo *non è deformabile* ("corpo rigido"). Infatti, se abbiamo un corpo elastico, durante il moto potrà cambiare anche la distribuzione delle masse, e quindi la posizione del baricentro, in modo complicato. Si noti che, per corpi rigidi di densità *omogenea*, e di forma semplice, la posizione del baricentro si può determinare subito, senza effettuare i conti, semplicemente sulla base di considerazioni di *simmetria*. Per esempio, è chiaro che il baricentro di un corpo sferico omogeneo, per simmetria, coincide con il centro della sfera; che il baricentro di un corpo omogeneo a forma cubica coincide con il centro del cubo, cioè con il punto di intersezione delle diagonali non che collegano vertici appartenenti a facce diverse, ecc.

Esercizio 1): Calcolare il baricentro di un sistema di punti dotati tutti della

stessa massa, e posti sui vertici di un poligono regolare.
Soluzione: per simmetria, il baricentro coinciderà con il centro del poligono, cioè con il punto interno al poligono che è equidistante da tutti i suoi vertici.

Esercizio 2): Un sistema è costituito da 4 punti materiali (posti nei punti P_1, P_2, P_3, P_4), di masse

$$m_1 = 2Kg \ , \ m_2 = 1 \ Kg \ , \ m_3 = 3Kg \ , \ m_4 = 5Kg.$$

I 4 punti sono posti sui vertici di un quadrato, di lato $L = 2 \ m$, nellla seguente disposizione: guardando il quadrato, il punto P_1 (dove è piazzata la massa m_1) è posto nel vertice in basso a sinistra, il punto P_2 (dove è piazzata la massa m_2) è posto nel vertice in alto a sinistra,. il punto P_3 (dove è piazzata la massa m_3) è posto nel vertice in alto a destra, il punto P_4 (dove è piazzata la massa m_4) è posto nel vertice in basso a destra. Calcolare la posizione del baricentro del sistema.
Soluzione: Il sistema è posto in un piano; possiamo quindi scegliere un sistema di riferimento Cartesiano bidimensionale, con l'origine posta nel punto P_1; con l'asse X concidente con il lato orizzontale del quadrato (che contiene P_1 e P_4) e con verso che va da P_1 4 P_4; con l'asse Y concidente con il lato verticale del quadrato (che contiene P_1 e P_2) e con verso che va da P_1 4 P_2. Allora, le coordinate dei 4 punti sono (in metri)

$$P_1 \equiv (0, 0),$$

$$P_2 \equiv (0, 2),$$

$$P_3 \equiv (2, 2),$$

$$P_4 \equiv (2, 0).$$

La massa totale del sistema è poi

$$M = (2 + 1 + 3 + 5) \ Kg = 11 \ Kg.$$

Allora, la relazione (25) ci dà per la coordinata x_B

$$x_B = \frac{1}{11}\,(2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2)\; m = \frac{16}{11}\; m,$$

e per la coordinata y_B

$$y_B = \frac{1}{11}\,(2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0)\; m = \frac{8}{11}\; m.$$

Quindi, il baricentro è posto nel punto di coordinate

$$\vec{s}_B \equiv (\frac{16}{11}\; m, \frac{8}{11}\; m).$$

Esercizio 3): Un sistema è costituito da 4 punti materiali (posti nei punti P_1, P_2, P_3, P_4). I punti materiali P_1 e P_3 sono posti sui lati opposti di una delle due diagonali di un quadrato di lato $L = 2\; m$, e posseggono la stessa massa $\tilde{m}$. Gli altri due punti materiali P_2 e P_4 sono posti sui lati opposti dell'altra diagonale del quadrato, e posseggono masse $m_2 = 2\;\tilde{m}$ e $m_4 = 4\;\tilde{m}$ Calcolare la posizione del baricentro del sistema.
Soluzione: È chiaro "a priori" che le due masse uguali di P_1 e P_3 si fanno equilibrio, e quindi che il baricentro dovrà trovarsi sulla diagonale contenente P_2 e P_4, e che in particolare esso dovrà trovarsi più vicino al punto P_4 di massa maggiore. Comunque, facciamo il conto. In questo caso conviene scegliere come asse X la diagonale che contiene P_1 e P_3, con verso che, per esempio, va da P_1 a P_3; come asse Y conviene scegliere poi la diagonale che contiene P_2 e P_4, con verso che, per esempio, va da P_4 a P_2 (conviene disegnare la prima diagonale orizzontale, la seconda verticale, ed i lati del quadrato obliqui). L'intersezione tra le due diagonali sarà allora l'origine 0 degli assi. Calcoliamo ora le coordinate lungo X dei punti:

$$P_1 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\; m = -\sqrt{2}\, m,$$

$$P_2 = 0\; m,$$

$$P_3 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\; m = \sqrt{2}\, m,$$

$$P_4 = 0\; m,$$

e le coordinate lungo Y dei punti:

$$P_1 = 0\ m,$$

$$P_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ m = \sqrt{2}\ m,$$

$$P_3 = 0\ m,$$

$$P_4 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ m = -\sqrt{2}\ m.$$

Ricapitolando, le coordinate dei punti sono:

$$P_1 \equiv (-\sqrt{2}\ m, 0\ m),$$

$$P_2 \equiv (0\ m, \sqrt{2}\ m),$$

$$P_3 \equiv (\sqrt{2}\ m, 0\ m),$$

$$P_4 \equiv (0\ m, -\sqrt{2}\ m).$$

Usando la relazione (25), abbiamo che la coordinata x_B è data da

$$x_B = \frac{1}{8\ \tilde{m}} \cdot (-\sqrt{2} \cdot \tilde{m} + \sqrt{2} \cdot \tilde{m})\ m = 0\ m,$$

mentre la coordinata x_B è data da

$$y_B = \frac{1}{8\ \tilde{m}} \cdot (\sqrt{2} \cdot (2\ \tilde{m}) - \sqrt{2} \cdot (4\ \tilde{m}))\ m = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ m.$$

Quindi

$$\vec{s}_B \equiv (0\ m, -\frac{\sqrt{2}}{4}\ m).$$

Come prevedibile, il baricentro si trova sulla diagonale che congiunge P_2 e P_4, ed è spostato verso P_4 che possiede la massa maggiore.

Esercizio 4): Un sistema è costituito da 3 punti materiali (posti nei punti P_1, P_2, P_3), disposti sui tre vertici di un triangolo isoscele, con i due lati uguali di lunghezza $L = 2\ m$, e formanti tra loro un angolo $\theta = 120°$. I due punti P_1 e P_2 sono posti sui due estremi della base del triangolo (guardando il triangolo, P_1 all'estremo di sinistra e P_2 all'estremo di destra), mentre P_3 coincide con il vertice che congiunge i due lati uguali. Le masse associate ai tre punti materiali sono

$$m_1 = 3Kg\ ,\ m_2 = 2\ Kg\ ,\ m_3 = 6\ Kg.$$

Calcolare la posizione del baricentro del sistema.

Soluzione: Conviene scegliere un sistema di riferimento con origine nel punto O posto sulla base a metà tra P_1 e P_2; con l'asse X coincidente con la retta che contiene la base del triangolo, e verso che va da P_1 a P_2; con l'asse Y coincidente con la retta che contiene l'altezza del triangolo, e verso che va da O a P_3. Per calcolare le coordinate dei tre punti bisogna prima calcolare la lunghezza di metà della base, cioè del tratto $\overline{P_1O}$; questo tratto rappresenta il cateto del triangolo rettangolo P_1OP_3, la cui ipotenusa è $\overline{P_1P_3}$, cioè il lato L lungo 2 m, e che è opposto all'angolo $P_1\widehat{P_3}O$ che vale $\theta/2 = 60°$. Quindi abbiamo

$$\overline{P_1O} = L\ \sin\ 60° = 2 \cdot \frac{1}{2}\ m = 1\ m.$$

Inoltre, bisogna anche calcolare l'altezza $\overline{OP_3}$ del triangolo; questa è l'altro cateto del triangolo rettangolo P_1OP_3, adiacente all'angolo $P_1\widehat{P_3}O$ di 60°. Quindi abbiamo

$$\overline{OP_3} = L\ \cos\ 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ m = \sqrt{2}\ m.$$

Allora le coordinate dei tre punti sono:

$$P_1 \equiv (-1\ m, 0\ m),$$

$$P_2 \equiv (1\ m, 0\ m),$$

$$P_3 \equiv (0\ m, \sqrt{2}\ m).$$

Infine, la massa totale è

$$M = (3 + 2 + 6)\ Kg = 11\ Kg.$$

Adesso possiamo calcolare la coordinata x_B:

$$x_B = \frac{1}{11} \cdot (3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0)\ m = -\frac{1}{11}\ m,$$

e la coordinata y_B:

$$y_B = \frac{1}{11} \cdot (3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot \sqrt{2})\ m = \frac{6\sqrt{2}}{11}\ m.$$

Quindi

$$\vec{s}_B \equiv (-\frac{1}{11}\ m, \frac{6\sqrt{2}}{11}\ m).$$

Esercizio 5): Supponendo che i 3 punti materiali dell'esercizio precedente siano vincolati in ogni caso a restare sui vertici del triangolo isoscele, calcolare quali saranno le coordinate del baricentro del sistema dopo 2 secondi se l'intero sistema, partendo da fermo, compie un moto traslazionale dovuto ad una forza costante $\vec{F}^{ext}$ di modulo pari a 2 Newton, diretta a 45° rispetto al sistema di riferimento scelto nell'esercizio precedente, e con verso che si allontana dall'origine.
Soluzione: Essendo il moto puramente traslazionale, e non potendo il baricentro variare per effetto di spostamenti relativi tra i 3 punti materiali, basta ridurre il sistema ad un unico punto materiale coincidente con il baricentro, nel quale viene concentrata la massa totale, la cui posizione iniziale, nel sistema di riferimento scelto, è quella calcolata nell'esercizio 3, cioè,

$$\vec{s}_B(0) \equiv (-\frac{1}{11}\ m, \frac{6\sqrt{2}}{11}\ m),$$

e la cui velocità è nulla (perchè il sistema parte da fermo. Essendo richieste le coordinate lungo X e Y dopo 5 secondi, conviene considerare il moto descritto dalla Eq. (27) scomposto lungo i due assi. Nell'Esercizio 3 abiamo già calcolato la massa totale M del sistema, ottenenendo

$$M = 11\ Kg.$$

Scomponiamo ora lungo gli assi i due membri dell'Eq. (27); al primo membro, secondo i dati di questo problema, abbiamo una forza $\vec{F}^{ext}$, le cui componenti lungo X e Y sono, rispettivamente,

$$F_x^{ext} = |\vec{F}^{ext}| \ \cos\ 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ N = \sqrt{2}\ N,$$

e

$$F_y^{ext} = |\vec{F}^{ext}| \ \sin\ 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ N = \sqrt{2}\ N.$$

Le due componenti del secondo membro del'Eq. (27) sono ovviamente

$$M\ a_{Bx} \equiv 11\ a_{Bx},$$

e

$$M\ a_{By} \equiv 11\ a_{By}.$$

Uguagliando tra loro le componenti omologhe dell'Eq. (27), e ricavando le componenti lungo gli assi dell'accelerazione del baricentro, abbiamo

$$a_{Bx} = \frac{\sqrt{2}}{11}\ m\ s^{-2},$$

e

$$a_{By} = \frac{\sqrt{2}}{11}\ m\ s^{-2}.$$

abbiamo quindi due moti uniformemente accelerati, con lo stesso valore $(\frac{\sqrt{2}}{11}\ m\ s^{-2})$, sia lungo X che lungo Y. Sappimao che, ad un istante t, le coordinate lungo i due assi saranno allora

$$x_B(t) = x_B(0) + v_{Bx}(0)\ t + \frac{1}{2}\ a_{Bx}\ t^2,$$

e

$$y_B(t) = y_B(0) + v_{Bx}(0)\ t + \frac{1}{2}\ a_{Bx}\ t^2.$$

Ora, il sistema, e quindi il baricentro, parte da fermo, cioè

$$v_{Bx}(0) = v_{By}(0) = 0.$$

Inoltre abbiamo $t = 2\ s$ e

$$x_B(0) = -\frac{1}{11}\ m\ \ ;\ \ y_B(0) = \frac{6\sqrt{2}}{11}\ m.$$

Allora, inserendo questi dati ed i valori delle due accelerazioni, abbiamo che le coordinate del baricentro sono diventate

$$x_B(2\ s) = (-\frac{1}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{11} \cdot 2^2)\ m = \frac{(2\sqrt{2} - 1)}{11}\ m,$$

e

$$y_B(2\ s) = (\frac{6\sqrt{2}}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{11} \cdot 2^2)\ m = \frac{8\sqrt{2}}{11}\ m.$$

1.3 Cenni sui moti di rotazione

Nel caso di sistemi di punti materiali si presenta una possibilità che non può essere contemplata nel caso di un singolo punto materiale: il sistema può *ruotare*. La cosa è più evidente se consideriamo corpi estesi (rigidi); la trottola ne è un esempio tipico.

A questo punto dobbiamo domandarci: quali sono le grandezze fisiche associate al moto di rotazione, sia quelle che descrivono la causa che genera la rotazione, sia quelle che descrivono l'effetto della rotazione stessa.

Partiamo innanzitutto da un punto di vista intuitivo. Quando dobbiamo imprimere una rotazione ad un disco, o ad una trottola, quello che facciamo è dare un "colpo" *tangente* al bordo del disco o della trottola; inoltre, la velocità di rotazione che riusciamo a imprimere dipende

a) dalla *distribuzione di massa* del corpo considerato (infatti, se la trottola ha qualche difetto di simmetria *ruota male*,

b) dal raggio della trottola o del disco,

c) dall'intensità del "colpo" che imprimiamo,

d) dalla direzione del "colpo" rispetto, per esempio, al bordo dell'oggetto o, equivalentemente, al suo raggio (se non manteniamo il colpo tangente al bordo o, equivalentemente, perpendicolare al raggio, la rotazione "viene male").

Tutto questo ci dice che le caratteristiche della rotazione devono dipendere dall *forza* $\vec{F}$ che esercitiamo sull'oggetto (punto c), dall'*angolo* tra questa e il raggio dell'oggetto (punto d), dalla lunghezza del raggio (punto b), e da come è fatta la distribuzione di massa dell'oggetto (punto a).

Quello che vedremo adesso è che i punti b), c) e d) sono associati alla *causa* della rotazione, mentre il punto a) influenza l'*effetto* della rotazione. Alla fine, la legge che regola le rotazioni dei sistemi di punti (in particolare dei corpi estesi rigidi) avrà una forma analoga a quella della legge di newton; ricordiamo che in questa legge la "causa" è la *forza*, e l'"effetto" è *l'accelerazione*, mentre la costante di proporzionalità tra le due, che influenza l'effetto (ed è una carateristica del corpo) è la *massa*.

Incominciamo allora ad introdurre una quantità vettoriale che giocherà, nel moto rotazionale, un ruolo analogo a quello che la forza ha nel moto traslazionale.

Il momento di una forza

Prima di tutto, introduciamo la grandezza fisica che è in grado di generare la rotazione di un corpo.

Consideriamo una generica forza $\vec{F}$ *applicata in un punto* P *del corpo* (per esempio, in un punto del bordo di una trottola). Consideriamo poi un generico punto $P^{'}$ dello spazio, e indichiamo con $\vec{r}$ il vettore di modulo pari al segmento $\overline{PP'}$, e con direzione e verso da P a $P^{'}$. Definiamo allora *il momento* $\vec{M}$ *della forza* $\vec{F}$ *rispetto al punto* $P^{'}$ come

$$\vec{M} \doteq \vec{r} \wedge \vec{F} \ . \tag{28}$$

$\vec{M}$ prende anche il nome di *momento angolare* (sempre relativo alla forza scelta ed al punto $P^{'}$ scelto). Si ricordi (vedi la seconda lezione) che "$\wedge$" indica il *prodotto vettoriale tra due vettori*, che il prodotto vettoriale $\vec{r} \wedge \vec{F}$ è un vettore che ha direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{r}$ ed $\vec{F}$, verso dato da quello nel quale procede una vite che gira in modo che $\vec{r}$ si sovrappone a $\vec{F}$, e modulo dato da $|\vec{M}| \equiv |\vec{r} \wedge \vec{F}| = |\vec{r}| \, |\vec{F}| \, \sin \, \theta$, dove *theta* denota l'angolo tra $\vec{r}$ ed $\vec{F}$. Il momento $\vec{M}$ della forza è quindi massimo, fissati i moduli della forza e di $\vec{r}$, quando $\theta = 90°$ ($\sin\theta = 1$) e quindi quando $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ sono tra loro perpendicolari, mentre è nullo quando $\theta = 0°$ ($\sin\theta = 0$) e quindi quando $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ sono tra loro paralleli.

Come al solito, prima di procedere, calcoliamo le dimensioni fisiche del momento

$$[\vec{M}] = [r \cdot F \cdot \sin\ \theta] = [r \cdot F] = [l\ m\ l\ t^{-2}] = [m\ l^2\ t^{-2}]\ . \tag{29}$$

Quindi, il momento nel sistema MKS si può misurare in metri · Newton (ed è questo che di solito si fa), ma anche in anche in Joule (perchè $[m\ l^2\ t^{-2}] \equiv [m\ v^2]$, cioè un'energia.

Nel caso più semplice, la forza e $\vec{r}$ sono perpendicolari. Mettiamoci in questo caso per mostrare intuitivamente che è proprio il momento di una forza la causa della rotazione di un corpo. Infatti, tutti noi compiamo ogni giorno l'atto di aprire o chiudere una porta facendola ruotare sui cardini. Ora, quello che facciamo, per esempio per arirla, è "spingere" su un certo punto della forza; questo significa che stiamo applicando una forza in quel determinato punto della forza. Ora, è sempre esperienza comune che se più lontano dai cardini è il punto sul quale spingiamo, minore è la forza necessaria a ruotare la porta; mentre, se spingiamo su un punto molto vicino ai cardini ci vuole molta fatica, cioè una forza maggiore. Ma questo conferma che la potenza della nostra spinta dipende non solo dalla forza, ma anche dalla distanza del punto di applicazione della forza dallo stipite: in effetti, tale potenza dpende dal prodotto dei moduli di queste due quantità, che è il caso particolare del prodotto vettoriale che dà il momento $\vec{M}$ della (28) quando $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ sono perpendicolari, avendo scelto il punto P' sulla linea contenente i cardini della porta. In realtà, proprio da questo esempio capiamo che la rotazione di un corpo avviene rispetto ad un certo *asse di rotazione* (in questo caso,la linea contenente i cardini della porta); e non è difficile da capire che il prodotto vettoriale a secondo membro della (28), fissato un asse di rotazione, *non dipende dalllo specifico punto sull'asse rispetto al quale si calcola*, ed è sempre uguale in modulo al prodotto del modulo della forza per la distanza minima del punto di applicazione della forza dall'asse, distanza minima che si ottiene tracciando la perpendicolare all'asse a partire dal punto di applicazione della forza, e che prende il nome di "braccio"; indicato il braccio con b, abbiamo quindi per il modulo del momento

$$|\vec{M}| = |\vec{F}|\ b\ , \tag{30}$$

mentre vediamo che neanche la direzione ed il verso del momento dipendono dal punto scelto sull'asse di rotazione perchè nè il piano formato da $\vec{r}$ ed $\vec{F}$

(rispetto al quale il momento è ortogonale), nè il verso di rotazione della vite ottenuto sovrapponendo $\vec{r}$ ad $\vec{F}$ cambiano al variare del punto sull'asse.

Il principio di conservazione del momento della quantità di moto totale di un sistema isolato

Prima di procedere alla deduzione di una legge per le rotazioni analoga alla legge di Newton per i moto traslazionali, enunciamo un secondo principio di conservazione, analogo a quello ottenuto per la quantità di moto totale di un sistema isolato.

A questo scopo, introduciamo la definizione di *momento della quantità di moto*, che indicheremo con $\vec{Q}_i$, del punto materiale i-esimo di un sistema di punti materiali. Avendo indicato in precedenza con $\vec{p}_i \doteq m_i\ \vec{v}_i$ la quantità di moto del punto materiale i-esimo, analogamente a come abbiamo definito il momento di una forza, definiamo il momento della quantità di moto $\vec{Q}_i$ rispetto ad un punto P' dello spazio come il vettore dato dal prodotto vettoriale

$$\vec{Q}_i \doteq \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i\ . \tag{31}$$

dove $\vec{r}_i$ indica il vettore che va dal punto P_i dello spazio in cui si trova il punto materiale al punto P'. Naturalmente, anche il momento della quantità di moto in generale dipenderà dal tempo: $\vec{Q}_i(t)$.

Analogamente al caso della quantità di moto, definiamo il *momento totale della quantità di moto* $\vec{Q}^{(tot)}$ come

$$\vec{Q}^{(tot)} \doteq \sum_{i=1,\ldots,N} \vec{Q}_i\ . \tag{32}$$

Adesso possiamo enunciare il:

Principio di conservazione del momento totale della quantità di moto di un sistema isolato: "in un sistema isolato il momento totale della quantità di moto rimane costante nel tempo".

In formula abbiamo

$$\vec{Q}^{(tot)} = cost.\ . \tag{33}$$

Ora, se il sistema è isolato, sappiamo che agiscono solo le forze *interne*. Ora, innanzitutto nel seguito conveniamo di considerare solo il caso di un corpo rigido che esegua *un puro moto di rotazione*, tipicamente intorno ad un asse;

non è difficile allora capire che, a secondo membro della (31) che definisce le $\vec{Q}_i$, le distanze $\vec{r}_i$ *non* potranno dipendere dal tempo, poichè la distanza di un punto del corpo dall'asse non potrà variare nè per effetto di deformazione (essendo il corpo rigido), nè per avvicinamento o allontanamento (non essendoci moto traslatorio). Quindi, se noi deriviamo rispetto al tempo $\vec{Q}^{(tot)}$, le derivate agiranno dentro le $\vec{Q}_i$ solo sulle quantità di moto $\vec{p}_i$, ed avremo, derivando rispetto al temp i due membri dell'Eq. (33), usando la definizione (32), e ricordando che la derivata di una costante è zero,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}^{(tot)}}{dt} &\equiv \frac{d\sum_{i=1,\ldots,N}\ \vec{Q}_i}{dt} \equiv \sum_{i=1,\ldots,N} \frac{d\vec{Q}_i}{dt} \\ &\equiv \sum_{i=1,\ldots,N} \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0\ . \end{aligned} \tag{34}$$

Ma ricordiamo la relazione (9), che ci dice che la derivata della quantità di moto i-esima altro non è che la forza totale che agisce sul punto materiale i-esimo. Ma, ancora, essendo il sistema isolato, sui suoi punti agiranno solo forze *interne*; se indichiamo con $\vec{F}_i^{(int)}$ la forza totale interna che agisce sul punto i-esimo (e dovuta agli altri punti del sistema) possiamo riscrivere la (34) come

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}^{(tot)}}{dt} &\equiv \sum_{i=1,\ldots,N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(int)} \\ &\equiv \sum_{i=1,\ldots,N} \vec{M}_i^{(int)} = 0\ , \end{aligned} \tag{35}$$

dove $\vec{M}_i^{(int)}$ denota il momento della forza interna i-esima. Quindi, la conservazione del momento totale della quantità di moto di un sistema isolato è equivalente alla proposizione

"*in un sistema isolato la somma sei momenti delle forze interne è nulla*".

Ora, se mettiamo insieme le conseguenze dei due principi di conservazione validi per i sistemi di punti materiali isolati, possiamo affermare

"*in un sistema isolato sono nulle sia la somma dele forze interne che la somma sei momenti delle forze interne*".

Che cosa ne deduciamo in parole povere?: in realtà qualcosa di molto semlice ed evidente. E cioè:

- se il sistema è isolato ed è inizialmente fermo, non essendoci azioni esterne rimane fermo, cioè non può nè traslare (perchè la risultante delle forze interne è nulla), nè ruotare (perchè la risultante dei momenti delle forze interne è nulla);

- se il sistema è isolato ed inizialmente trasla con una certa velocità e/o ruota con una certa velocità angolare, a causa dell'assenza d azioni esterne che ne possono modificare il moto continua a traslare e/o a ruotare con la stessa velocità, o velocità angolare, iniziale.

Momenti esterni

Analogamente al caso delle traslazioni, in presenza di forze esterne il momento angolare totale non sarà più nullo; indichiamolo con $\vec{M}^{ext}$ per indicare che è la somma dei momenti delle forze esterne (essendo quella delle forze interne, come abbiamo visto, nulla). Ci aspettiamo allora che valga una legge per la dinamica rotazionale analoga a quella di Newton ($\vec{F} = m\, \vec{a}$) che vale per la dinamica traslazionale di un punto materiale, e che vale ancora nella stessa forma, Eq. (27), per il baricentro di un sistema di puntimateriali. È anche chiaro che il primo membro della relazione analoga per le rotazioni debba essere dato da $\vec{M}^{ext}$ (al posto della risultante delle forze esterne che appare nella (27)), che nel caso dlle rotazioni esprime la *causa* che genera la rotazione stessa; ma cosa ci deve essere al secondo membro? Innanzitutto, ci aspettiamo che l'effetto della traslazione, cioè l'accelerazione, che compare nel secondo membro della legge di Newton, sia sostituito dall'effetto della rotazione Ma già sappiamo che una rotazione È dovuta alla variazione nel tempo di in *angolo*, e non di uno spazio. Ora, abbiamo già introdotto la velocità angolare, l'analogo nelle rotazioni della velocità lineare, come $d\theta(t)/dt$, dove $\theta(t)$ è l'angolo di rotazione all'istante t; abbiamo cioè semplicemente sostituito lo spazio con l'angolo. Possiamo allora definire nel caso delle rotazioni l'analogo dell'accelerazione lineare, e la chiameremo *accelerazione angolare* indicandola con $\vec{a}_\theta$, semplicemente come il vettore

$$\vec{a}_\theta \doteq \frac{d^2\theta}{dt^2}\, \vec{n}, \tag{36}$$

dove il versore $\vec{n}$ ha la stessa direzione e verso di $\vec{M}^{(ext)}$. È chiaro allora che, come nella legge di Newton la causa (la forza) è proporzionale all'effetto (l'accelerazione) tramite una costante di proporzionalità (la massa) che dipende solo dal corpo, nel caso dlle rotazioni la causa (il momento angolare) sarà proporzionale all'effetto (l'accelerazione angolare) tramite una costante di proporzionalità (quale?) che dovrà dipendere ancora solo dal corpo e che indicheremo con I. Scriveremo allora

$$\vec{M}^{ext} = I\ \vec{a}_\theta\ . \tag{37}$$

Ora, la cosa più semplice che possiamo fare per individuare di che tipo deve essere questa costante di proporzionalità, è trovrane le dimensioni fisiche. Abbiamo calcolato prima le dimensioni del momento, ed abbiamo visto che sono quelle di Newton per metro o, equivalentemente, quelle di un'energia, massa per lunghezza al quadrato diviso tempo al quadrato: $[\vec{M}^{ext}] = [m\ l^2\ t^{-2}]$. Dalla definizione (36) di accelerazione angolare abbiamo, ricordando che un angolo è adimensionale: $[\vec{a}_\theta] = [t^{-2}]$. Allora, dalla relazione (37) abbiamo

$$[m\ l^2\ t^{-2}] = [I \cdot t^{-2}]\ , \tag{38}$$

da cui ricaviamo

$$[I] = [m\ l^2]\ . \tag{39}$$

Quindi, le dimensioni della costante I, che prende il nome di *momento di inerzia*, sono quelle di massa per lunghezza al quadrato. Se individuiamo l'asse intorno al quale il corpo ruota, dividiamo poi il corpo nei soliti N volumetti molto piccoli, praticamente puntiformi, indichiamo con $\Delta\ m_i$ la massa molto piccola contenuta nel volumetto i-esimo, e con r_i la distanza del volumetto $i$esimo dall'asse di rotazione, non è difficile mostrare che

$$I = \sum_{i=1,\ldots,N} m_i\ r_i^2\ , \tag{40}$$

che ha le dimensioni giuste (massa per lunghezza al quadrato). Vediamo quindi che la rotazione dipende dal corpo attraverso la *distribuzione spaziale della sua massa*.

Un ultimo accenno, infine, al *lavoro* fatto durante una rotazione; infatti, comunque per ottenere un qualsiasi moto si compie lavoro. Nel moto di rotazione, abbiamo già visto che lo spostamento è sostituito dall'angolo di rotazione; poichè il ruolo della forza è svolto dal momento $\vec{M}^{ext}$, il prodotto della forza per lo spostamento (che dà appunto il lavoro nel caso traslazionale) è sostituito dal prodotto del momento angolare per l'angolo di rotazione. Nel caso semplice di momento angolare costante abbiamo quindi che, se il corpo ha ruotato di un angolo θ,il lavoro compiuto dal momento è

$$L_\theta = |\vec{M}^{ext}| \cdot \theta \, . \tag{41}$$

Da questa relazione si vede che, essendo l'angolo adimensionale, questo lavoro ha le dimensioni del momento angolare; ma abbiamo già visto che queste dimensioni sono quelle di una forza per lunghezza (Newton per metro), coincidenti, appunto, con quelle di un lavoro.

Esercizi

Esercizio 6: Una forza di modulo pari a 5 Newton viene applicata ad un corpo esteso rigido in un punto che si trova a distanza di 2 metri dall'asse di rotazione. Se il momento di inerzia I vale 5 $Kg \cdot m^2$, calcolare il modulo dell'accelerazione angolare.
Soluzione: Il momento (esterno) dinrot della forza si può calcolare come il prodotto del modulo della forza per il braccio, dato dalla distanza del punto di applicazione dall'asse di rotazione, e quindi

$$|\vec{M}^{ext}| \equiv |\vec{F}^{ext}| \cdot b = 5 \cdot 2 \; N \cdot m = 10 \; N \cdot m.$$

L'Eq. ci dice poi che

$$10 \; N \cdot m = 5 \cdot |\vec{a}_\theta| \; N \cdot m,$$

da cui

$$|\vec{a}_\theta| = 2 \; s^{-2}.$$

Esercizio 7: Calcolare quanto lavoro è stato compiuto nell'esercizio precedente dopo che il corpo ha ruotato di $\theta = 45°$.
Soluzione: La relazione (41) ci à subito il lavoro. Dobbiamo solo prima trasformare i gradi in radianti:

$$45° = \frac{\pi}{4} \, rad,$$

e quindi

$$L_{45^\circ} = 10 \cdot \frac{\pi}{4} J = \frac{5\ \pi}{2}\ J.$$