- LEZIONE 3 DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA - A.A. 2006/2007

Silvio De Siena

1 Cinematica del punto materiale

Definizione di punto materiale

Innanzitutto definiamo il concetto di *punto materiale.* Dato un corpo, la possibilità di considerarlo o meno un punto materiale non dipende dallo specifico corpo scelto, ma *dal rapporto tra le dimensioni del corpo e la scala sulla quale se ne studiano le proprietà (nel caso presente, il moto)*; se questo rapporto è sostanzialmente trascurabile, allora diremo che il corpo in questione può essere considerato un punto materiale. Cercheremo di spiegarci con qualche esempio. Un corpo di 1 millimetro (un millesimo di metro) di lato che scivola sul ponte molto liscio di una nave portacontainers può essere considerato un punto materiale, perchè il rapporto tra le sue dimensioni e quelle della nave (circa 300 metri) è praticamente trascurabile (pari a circa $3 \cdot 10^{-5}$). Quindi, nello studio del suo moto su scala di lunghezza pari a quella della nave, possiamo trascurare la sua forma geometrica, e considerarlo concentrato in un punto. D'altra parte, se studiamo il moto intorno al mondo della nave portacontainers, possiamo considerare la nave stessa come un punto materiale, perchè il rapporto tra le sue dimensioni (300 metri) e quelle della circonferenza terrestre (circa 40.000 Km) è trascurabile (pari a circa $7.5 \cdot 10^{-5}$). Ancora, se ora consideriamo il moto della terra sulla scala della galassia, sono le dimensioni della terra (circa 13.000 Km di diametro) ad essere trascurabili rispetto a quelle di una galassia (circa 10^{15} Km!), e così via. Il caso più semplice che possiamo considerare, quindi, è il moto di un punto materiale.

Definizione di cinematica

La cinematica è quella branca della Fisica che studia le modalità del moto di un corpo *disinteressandosi delle cause che lo hanno generato*. Vedremo poi che le cause del moto saranno prese in considerazione successivamente nell'ambito dello studio della *Dinamica*.

Quello che faremo ora, quindi, è di definire le *grandezze cinematiche* (velocità ed accelerazione), e di studiare vari tipi di moto.

Concetto di traiettoria e di legge oraria

Definizione di traiettoria: "La traiettoria associata al moto di un corpo è l'insieme dei punti dello spazio occupati (nel corso del tempo) dal corpo durante il suo moto". Possiamo quindi avere moti rettilinei, nei quali la traiettoria è una retta (per esempio, il moto di una macchina su un tratto rettilineo di autostrada), moti circolari (per esempio, il moto di una macchina su un autodromo circolare, o il moto del sasso mentre David sta ruotando la fionda per colpire Golia), moti ellittici ecc.

Definizione di legge oraria: "La legge oraria è quella che descrive la dipendenza dal tempo delle coordinate del punto materiale durante il moto". Quindi, in generale, la legge oraria è data da $\vec{s}(t)$, cioè assegnando come varia la posizione del punto materiale in funzione del tempo in un sistema di riferimento Cartesiano; nel caso generale di moto tridimensionale, questo è equivalente a dare le dipendenze dal tempo delle tre coordinate: $\{x(t), y(t), z(t)\}$.

Si noti che, chiaramente, si possono avere moti con la stessa traiettoria e leggi orarie diverse, come vedremo tra poco.

Nel seguito cominceremo con il considerare la classe di moti associata con la traiettoria più semplice, cioè la retta.

1.1 Moti unidimensionali

Nel caso in cui la traiettoria tracciata dal punto materiale si svolge tutta su una sola retta, è chiaro che, scelto un sistema di riferimento Cartesiano con l'asse X coincidente con la traiettoria, le coordinate $y(t), z(t)$ del punto materiale saranno sempre nulle, e potremo disinteressarcene. Il moto, e la relativa legge oraria, sarà quindi definito dando solo la dipendenza dal tempo della coordinata x ($x(t)$); abbiamo quindi il caso di un moto *unidimensionale*.

Si noti che possiamo quindi evitare di considerare quantità vettoriali, come per esempio la posizione del punto $\vec{s}(t)$, perchè ci basta considerare solo la coordinata x o altre quantità che andremo ora a definire che non cambiano mai la *direzione*. Le quantità che ora andremo a definire, per ora nel caso particolare di moti unidimensionali, sono le quantità in termini delle quali un moto può essere classificato nel senso dela legge oraria: esse sono *la velocità* e *l'accelerazione*.

Definizione di velocità.

Intuitivamente, tutti sappiamo che la velocità misura quanto rapidamente un corpo cambia la sua posizione. Nel caso unidimensionale svolto lungo l'asse X, come abbiamo visto, la posizione di un punto materiale ad un certo istante t è descritta dal valore della sua coordinata lungo X all'istante t, valore che abbiamo denotato con $x(t)$. Se, a partire da t, aspettiamo un intervallo di tempo $\Delta t > 0$, cioè se ci mettiamo ad un tempo $t + \Delta t$, il punto materiale in moto avrà cambiato la sua posizione da $x(t)$ a $x(t + \Delta t)$. Per esempio, una macchina alle ore 15.30 di un certo giorno (questo è il tempo t) si trova 100 Km a Nord di Roma sull'Autostrada del Sole (questa è la posizione $x(t) \equiv x(15.30)$), e se aspettiamo 30 minuti (questo è l'intervallo di tempo Δt) la macchina si troverà a $150 Km$ a Nord di Roma (questo è la nuova posizione $x(t + \Delta t) \equiv x(15.30 + 30) = x(16.00)$).

Il Cambiamento della posizione del punto materiale è misurato dallo *spostamento*, cioè dalla differenza di posizione $\Delta x(t)$, definito da

$$\Delta x(t) \doteq x(t + \Delta t) - x(t). \tag{1}$$

Si noti che questa definizione ingloba anche quello che è rimasto della natura vettoriale di questa quantità, che possiede un *modulo* ed un *segno*. Infatti, una volta scelto il verso positivo dell'asse X lungo il quale si svolge il moto, il punto durante l'intervallo di tempo Δt si può spostare in questo verso ("in avanti") o nel verso opposto ("all'indietro"); nel primo caso avremo che la coordinata X cresce dopo Δt (cioè, $x(t + \Delta t) > x(t)$), mentre nel secondo caso la coordinata X diminuisce dopo Δt (cioè, $x(t+\Delta t) < x(t)$). Quindi, nel primo caso avremo $\Delta x(t) > 0$, mentre nel secondo caso avremo $\Delta x(t) > 0$. Quindi, $\Delta x(t)$ è un vettore la cui direzione è definitivamente fissata sulla retta del moto, ma il cui verso è caratterizzato dal segno positivo o negativo. Per esempio, nel caso in cui il punto oscilli lungo la retta, il verso, cioè il segno, di $\Delta x(t)$ cambia periodicamente.

Una volta definito il concetto di spostamento, se consideriamo una *generica* scelta dell'intervallo di tempo Δt possiamo definire la *velocità media del punto materiale tra gli istanti* t *e* $t + \Delta t$ *come il rapporto tra lo spostamento* $\Delta x(t)$ *ed il tempo impiegato a spostarsi* Δt:

$$v_m(t, t + \Delta t) \doteq \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \; . \tag{2}$$

Si noti che il fatto che le caratteristiche vettoriali residue dello spostamento si trasferiscono sulla velocità: quando il punto inverte il suo moto sulla retta, la velocità cambia di segno, cioè cambia il suo verso. Abiamo già visto che nel sistema MKS una velocità si misura in $m\ s^{-1}$. La velocità media è un concetto chiaro a tutti; per esempio, se una macchina percorre tra le 15.00 e le 16.00 un tratto rettilineo di $90km$, diciamo che ha tenuto in quell'ora una velocità *media* di $90km/h$. Si noti anche che, concordemente a quanto abbiamo detto nella Lezione 1, questa definizione contiene una prescrizione di *misura*. Infatti, ci dice che possiamo definire la velocità media misurando lo spostamento spaziale (con un'unità di misura che può essere metri, chilometri ecc.) ed il tempo impiegato per spostarsi (per esempio, con un cronometro), e poi calcolando il rapporto. Vediamo dalla definizione che, nel sistema MKS, una velocità si misura in *metri diviso secondi* ($m\ s^{-1}$). Si noti che normalmente si parla di una velocità di un certo numero di *metri al secondo*.

È chiaro, però, che non è affatto detto che in quell'ora tra le 15.00 e le 16.00 la macchina abbia tenuto una velocità *costante* di $90km/h$; anzi, di solito una macchina in un'ora aumenta e diminuisce la sua velocità parecchie volte. Possiamo allora chiederci qual'è la velocità che la macchina aveva in un certo "istante", per esempio alle ore "15, 34 minuti e 11 secondi". Normalmente, questa velocità, che chiameremo *velocità istantanea*, la possiamo vedere segnata dal tachimetro della macchina. Ma come possiamo definirla? È chiaro che, fissato il tempo t (per esempio, le "15, 34 minuti e 11 secondi"), se nella definizione (2) l'intervallo di tempo Δt diventa molto "piccolo", la velocità media approssima sempre più la velocità istantanea. Definiamo quindi la *velocità istantanea del punto all'istante* t come

$$v(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \; . \tag{3}$$

È necessario adesso adottare qualche cautela nel "leggere" questa definizione. Infatti, essa può essere interpretata dal punto di vista matematico, e dal punto di vista fisico. Dal punto di vista matematico, tutti avranno riconosciuto nell'Eq. (3) il fatto che il rapporto $\Delta x(t)/\Delta t$ è il *rapporto incrementale della funzione del tempo $x(t)$ nell'intervallo di tempo* Δt, e che il limite di questo rapporto non è altro che *la derivata di $x(t)$ all'istante t*. Quindi, la definizione di velocità istantanea diventa

$$v(t) \doteq \frac{dx(t)}{dt} \; . \tag{4}$$

Questa definizione matematica risulta molto utile per il calcolo della legge oraria. Tuttavia, se si adotta il punto di vista *fisico* è necessario che la legge (3) contenga anche una prescrizione per *misurare* la velocità istantanea, concordemente a quanto abbiamo detto nella Lezione 1. Questo si può fare interpretando in termini "fisici" il limite $\lim_{\Delta t \to 0}$. Dal punto di vista fisico, il procedimento di limite è il seguente. Si misura il rapporto $\Delta x(t)/\Delta t$ per un certo numero di valori di Δt *progressivamente decrescenti*; per esempio, si misura il rapporto per un certo valore di Δt, poi si misura di nuovo per un valore di Δt che è la metà di quello precedente, poi si misura una terza volta per un valore di Δt ancora dimezzato (cioè, un quarto di quello iniziale), e così via. Si continua a dimezzare Δt, e a misurare il rapporto $\Delta x(t)/\Delta t$ corrispondente, finchè, dimezzando ulteriormente il tempo, *il rapporto non cambia più a meno di un errore prefissato.* Per esempio, se ad un certo passo del processo di dimezzamento di Δt abbiamo ottenuto tramite misura una velocità di 10.341 $m\ s^{-1}$, e dimezzando ulteriormente Δt misuriamo una velocità di 10.340 $m\ s^{-1}$, possiamo stabilire, dal punto di vista fisico, che il limite del rapporto (che da la velocità istantanea) vale 10.34 $m\ s^{-1}$ *a meno di un errore dell'uno per mille.* Se Vogliamo raggiungere una precisione maggiore, continuiamo il processo finchè l'errore passa sulla quarta cifra decimale (errore di uno su diecimila), o sulla quinta (errore di uno su centomila), e così via. La definizione fornisce quindi anche un procedimento operativo per misurare la grandezza fisica velocità istantanea *con precisione in principio arbitraria.* Vedremo in seguito che sia la definizione in senso matematico che quella in senso fisico forniranno metodi di soluzione per la legge oraria.

Definizione di accelerazione.

Sappiamo dalla nostra esperienza comune che un'altro concetto importante nella descrizione del moto di un corpo è quello di *accelerazione.* Infatti, se dobbiamo operare un sorpasso in autostrada dobbiamo *accelerare*, cioè dobbiamo aumentare la velocità, mentre quando, per esempio, arriviamo al casello dobbiamo *decelerare* (frenare), cioè diminuire la velocità. Quindi, anche le *variazioni nel tempo della velocità* sono importanti. Definiamo quindi l'accelerazione come quella grandezza che misura la "rapidità" con la quale varia la velocità. Analogamente al caso precedente definiamo la variazione $\Delta v(t)$ di velocità tra il tempo t ed il tempo Δt come

$$\Delta v(t) = v(t + \Delta t) - v(t),$$

con ovvio significato dei simboli. Definiamo quindi per un generico intervallo di tempo $t, t + \Delta t$ l'*accelerazione media* come

$$a_m(t, t + \Delta t) \doteq \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \ . \tag{5}$$

Definiamo poi l'*accelerazione istantanea all'istante* t come

$$a(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \ . \tag{6}$$

Vediamo che in questo caso abbiamo che l'accelerazione istantanea, dal punto di vista matematico, è la derivata della velocità rispetto al tempo

$$a(t) \doteq \frac{dv(t)}{dt} \ . \tag{7}$$

Dal punto di vista fisico, per definire operativamente l'accelerazione istantanea tramite misura possiamo procedere in modo analogo a quanto abbiamo fatto nel caso dela velocità istantanea. Vediamo anche che, poichè l'accelerazione è la derivata della velocità che, a sua volta, è la derivata della posizione, l'accelerazione è la derivata della derivata della posizione, cioè la *derivata seconda della posizione*, e possiamo quindi scrivere

$$a(t) \doteq \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \ . \tag{8}$$

Abbiamo già visto che nel sistema MKS l'accelerazione si misura in $m\ s{-}2$. Avendo definito le grandezze cinetiche velocità ed accelerazione, un moto sarà caratterizzato specificando la dipendenza dal tempo di queste quantità. Nel prosieguo, ci occuperemo dei moti rettilinei più semplici: *il moto rettilineo uniforme* ed *il moto rettilineo uniformemente accelerato.*

Moto rettilineo uniforme.

Il caso più semplice di moto unidimensionle che possiamo considerare è quello durante il quale la velocità del punto materiale rimane *costante* (o, con termine equivalente, *uniforme*) (moto rettilineo uniforme). Imponiamo quindi che la velocità non dipenda dal tempo e sia uguale ad una costante che indicheremo con v_0:

$$v(t) = v_0 \ . \tag{9}$$

Da questa prescrizione possiamo ricavare la legge oraria $x(t)$ per la posizione del punto. Seguiremo a questo scopo diversi metodi equivalenti.

Il primo metodo (il più semplice) si basa sulla considerazione che se la velocità rimane costante, allora la velocità istantanea e quella media coincidono, ed il valore v_0 potrà essere uguagliato con $v_m(t, t + \Delta t)$, che ora non dipenderà dalla scelta dell'intervallo $t, t + \Delta t$. Conviene cambiare notazione, sostituendo al primo tempo t un istante iniziale t_0 arbitrariamente scelto, e denotando genericamente t il tempo finale che avevamo chiamato $t + \Delta t$. Ci occupiamo quindi del moto che si sviluppa tra gli istanti t_0 e $t > t_0$, ed abbiamo quindi che l'intervallo di tempo Δt tra il tempo finale e quello iniziale diventa $t - t_0$. Operando allora nella Eq. (2) le sostituzioni

$$t \to t_0 \ , \ t + \Delta t \to t \ , \ \Delta t \to t - t_0 \ ,$$

abbiamo che la velocità media si riscrive

$$v_m = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0};$$

da questa relazione, imponendo, come abbiamo detto, $v_m = v_0$ otteniamo

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = v_0 \ , \tag{10}$$

dalla quale possiamo ricavare $x(t)$, cioè la legge oraria del moto rettilineo unfiforme:

$$x(t) = x(t_0) + v_0 \ (t - t_0) \ . \tag{11}$$

Vediamo che il grafico di x in funzione di t in questo caso è una retta che all'istante iniziale t_0 interseca l'asse X alla quota $x(t_0)$, e la cui inclinazione è determinata dal valore di v_0. Si noti anche che, data l'arbitrarietà nella scelta dell'istante iniziale t_0, possiamo sempre porre $t_0 = 0$, ottenendo

$$x(t) = x(0) + v_0\, t\ . \tag{12}$$

Si noti anche che nel caso di moto rettilineo uniforme, essendo la velocità costante, essendo l'accelerazione la derivata della velocità, ed essendo la derivata di una costante nulla, l'accelerazione è nulla (come è ben noto).

La legge oraria (53) si può ricavare anche in un secondo modo (che in realtà è il più usato perchè applicabile in generale), cioè tramite *integrazione*. Infatti, se ora usiamo la definizione (4) e la condizione (9), otteniamo la relazione

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0\ , \tag{13}$$

che ci dice che *la derivata rispetto al tempo della funzione $x(t)$ è uguale alla costante v_0*. La relazione (13) costiyuisce un'*equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, e si risolve per integrazione. Per evitare però appesantimenti formali, in queste lezioni, sia qui che successivamente, ricorreremo alla consultazione di *tabelle di derivate* che ci permetteranno facilmente di riconoscere le soluzioni delle semplici equazioni differenziali che incontreremo.

Innanzitutto, ricordiamo alcune semplici regole di derivazione. Innanzitutto, sappiamo che se $f(t), g(t))$ sono due funzioni

$$\frac{d[f(t) + g(t)]}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}\ ; \tag{14}$$

cioè, *la derivata della somma di due funzioni è uguale alle somma delle derivate di ciascuna funzione*. Nasturalmente, questa regola vale anche per le derivate di ordine superiore (la somma della derivata seconda, terza, ... di due funzioni è uguale alle somma delle derivate seconda, terza, ... di ciascuna funzione) Se poi k denota una costante e $f(t)$ una generica funzione della variabile t abbiamo

$$\frac{d[k\ f(t)]}{dt} = k\ \frac{df(t)}{dt}\ ; \tag{15}$$

cioè, *la derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione*. Inoltre, se c è un'altra costante, abbiamo

$$\frac{df(c\,t)}{dt} = c\,\frac{df(c\,t)}{d(c\,t)}\ ; \tag{16}$$

cioè, *la derivata di una funzione del prodotto $c\,t$ si ottiene moltiplicando la costante c per la funzione che si ottiene derivando $f(c\,t)$ rispetto all'intero argomento $c\,t$ considerato come un'unica variabile.* Qui conviene fare un esempio. È noto che la derivata dell'esponenziale rispetto alla variabile è l'esponenziale stesso:

$$\frac{de^{\tau}}{d\tau} = e^{\tau},$$

dove qui abbiamo indicato con τ una variabile adimensionale (perchè, come detto in precedenza, sappiamo che l'argomento di un esponenziale deve essere adimensionale). Ora consideriamo la funzione $e^{c\,t}$ (dove, ovviamente $[c] = [t^{-1}]$), e facciamone la derivata rispetto a t. In base alla regola (16) otterremo allora

$$\frac{de^{c\,t}}{dt} = c\,\frac{de^{c\,t}}{d(c\,t)} = c\,e^{c\,t}.$$

Dopo aver ricordato queste regole elementari, ricordiamo le derivate delle funzioni più semplici, cioè

$$\frac{dk}{dt} = 0\ ,\ \frac{d(t))}{dt} = 1\ ,\ \frac{d(t^2))}{dt} = 2\,t\ . \tag{17}$$

Usando ora la regola (15) e le relazioni (17), scriveremo ora un elenco di derivate di polinomi che ci permetteranno di risolvere il problema dela legge oraria nei casi pù semplici di moto. Indicheremo con $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$ i seguenti polinomi in t di ordine, rispettivamente, zero, uno e due:

$$P_0(t) = c_0\ ,$$

$$P_1(t) = c_0 + c_1\,t\ ,$$

$$P_2(t) = c_0 + c_1\,t + \frac{1}{2}\,c_2\,t^2\ , \tag{18}$$

(19)

dove c_0, c_1, c_2 denotano tre *generiche* costanti.

Allora vediamo che, derivando una o due volte rispetto al tempo questi polinomi ed usando le Eq. (15), (17), abbiamo

$$\frac{dP_0(t)}{dt} \equiv \frac{dc_0}{dt} = 0 \ ,$$

$$\frac{d^2P_0(t)}{dt^2} = 0 \ ;$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} \equiv \frac{d(c_0 + c_1\ t)}{dt} = \frac{d(c_0)}{dt} + \frac{d(c_1\ t)}{dt} = c_1 \ ,$$

$$\frac{d^2P_1(t)}{dt^2} \equiv \frac{dc_1}{dt} = 0 \ ;$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_2(t)}{dt} &\equiv \frac{d(c_0 + c_1\ t + \frac{1}{2}\ c_2\ t^2)}{dt} \\ &= \frac{d(c_0)}{dt} + \frac{d(c_1\ t)}{dt} + \frac{d(\frac{1}{2}c_2\ t^2)}{dt} = c_1 + c_2\ t \ , \\ \frac{d^2P_2(t)}{dt^2} &\equiv \frac{d(c_1 + c_2\ t)}{dt} = c_2 \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Riassumiamo, per maggiore chiarezza, nelle seguenti tabelle di derivate prime e derivate seconde dei tre polinomi

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = 0 \ \ ; \ \ \frac{dP_1(t)}{dt} = c_1 \ \ ; \ \ \frac{dP_2(t)}{dt} = c_1 + c_2\ t \ . \tag{21}$$

$$\frac{d^2P_0(t)}{dt^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2P_1(t)}{dt^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2P_2(t)}{dt^2} = c_2 \ . \tag{22}$$

Ritornando ora all'equazione (differenziale) (13), vediamo che la derivata della nostra funzione incognita $x(t)$ deve dare la costante v_0; dalla tabella

(21) vediamo allora che la soluzione è data dal polinomio $P_1(t)$ scegliendo $c_1 = v_0$, e quindi abbiamo

$$x(t) = c_0 + v_0\, t\ . \tag{23}$$

Rimane ora da determinare la costante arbitraria c_0. In realtà, vale in generale la regola che, *data un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, la soluzione è determinata a meno di una costante arbitraria.* Per individuare c_0 basta scrivere l'Eq. (23) ponendo $t = 0$, e ottenendo

$$x(0) = c_0\ . \tag{24}$$

Vediamo quindi che c_0 è data dalla posizione $x(0)$ del punto materiale all'istante iniziale $t = 0$. Vale quindi l'affermazione: *data un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, la soluzione è completamente assegnando il valore della funzione incognita al tempo iniziale, il che determina la costante arbitraria.* Mettendo insieme le Eq. (23) e (24) riotteniamo la legge oraria (53) del moto rettilineo uniforme.

Infine, andiamo ora a considerare un terzo modo di ricavare la legge oraria. Questo metodo, in realtà, è un metodo molto semplice di *integrazione numerica*, ed è valido all'interno di un certo errore (che può essere opportunamente controllato). Qui lo illustreremo nel caso del moto rettilineo uniforme; in questo caso abbiamo a disposizione lasoluzione esatta, ed il metodo risulta piuttosto banale, ma il metodo può essere facilmente generalizzato a casi più complessi non risolvibili analiticamente.

Ripartiamo dalla definizione (3) della velocità istantanea, ed adottiamo il punto di vista *fisico*; secondo tale punto di vista, possiamo approssimare all'interno di un certo errore prefissato $v(t)$ con il rapporto incrementale se ci fermiamo ad un'opportuna scelta di Δt. Scriviamo quindi

$$v(t) \cong \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\ . \tag{25}$$

Nel caso di moto rettilineo uniforme, essendo la velocità costante, *questa relazione risulta esatta per ogni scelta di* Δt; nel caso generale la possiamo invece usare come relazione valida all'interno di una certa approssimazione. Nel caso di moto rettilineo uniforme scriviamo allora

$$v_0 = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\ , \tag{26}$$

e, ricordando la definizione di $\Delta x(t)$, abbiamo

$$v_0 = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \; . \tag{27}$$

Ricavando da questa equazione $x(t + \Delta t)$, otteniamo l'*equazione ricorsiva*

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_0 \; \Delta t \; , \tag{28}$$

che ci permette di calcolare la posizione all'istante successivo $t + \Delta t$ se conosciamo la posizione all'istante precedente t.

La relazione (28) ci permette quindi di ricavare la posizione a qualsiasi istante se conosciamo la posizione iniziale all'istante zero. Infatti, poniamo $t = 0$ nell'equazione, ed otteniamo

$$x(\Delta t) = x(0) + v_0 \; \Delta t \; ; \tag{29}$$

se abbiamo assegnato $x(0)$, abbiamo quindi *aggiornato* l'equazione ottenendo la posizione all'istante Δt. Poniamo ora $t = \Delta t$ nell'equazione ed otteniamo

$$x(2 \; \Delta t) = x(\Delta t) + v_0 \; \Delta t \; ; \tag{30}$$

abbiamo quindi di nuovo *aggiornato* l'equazione ottenendo la posizione all'istante $2 \; \Delta t$, dove al secondo membro al posto di $x(\Delta t)$ sostituiamo il valore numerico ottenuto tramite il primo aggiornamento (29). Possiamo ora continuare nel procedimento, scegliendo nell'Eq. (28) $t = 2 \; \Delta t$ e ricavando $x(3 \; \Delta t)$, e così via. Possiamo quindi calcolare numericamente la posizione ad un qualsiasi tempo che sia un multiplo dell'intervallo Δt; chiaramente, il procediento è tanto più accurato quanto più "piccolo" è Δt.

Facciamo anche un esempio numerico. Scegliamo

$$v_0 = 3 \; m \; s^{-1} \;\; ; \;\; x(0) = 0 \;\; ; \;\; \Delta t = 0.1 \; s,$$

e supponiamo di voler calcolare la posizione fino all'istante $T = 10s$. Si noti che $T = 100 \; \Delta$; dobbiamo quindi iterare 100 volte. Mostriamo, ovviamente, solo le prime iterazioni; un computer sarà in grado di farle tutte e 100 in un tempo brevissimo. La prime tre iterazioni danno

$$x(0.1) = 3 \cdot 0.1 \; m = 0.3 \; m,$$

$$x(2 \cdot 0.1) \equiv x(0.2) = x(0.1) + 3 \cdot 0.1\ m = (0.3 + 0.3)\ m = 0.6\ m,$$

$$x(3 \cdot 0.1) \equiv x(0.3) = x(0.2) + 3 \cdot 0.1\ m = (0.6 + 0.3)\ m = 0.9\ m,$$

e così via fino ad arrivare a $x(10)$. Ovviamente, questo è un caso estremamente banale, ma il metodo può essere applicato a qualsiasi scelta d $v(t)$, anche con una dipendenza complicata dal tempo. Invece di illustrare qui il metodo più in generale, preferiamo posporre l'illustrazione al caso ancora più generale nel quale il moto è generato da una dinamica.

Esercizi

Esercizio 1): Quanto spazio percorre in 100 minuti un'automobile che viaggia alla velocit costante di 108 Km/h su un'autostrada rettilinea (esprimere tutto in MKS).
Soluzione: Innanzitutto cambiamo in unità MKS. Quindi

$$108\ \frac{Km}{h} = \frac{108 \cdot 1000\ m}{3600\ s} = 30\ m\ s^{-1};$$

$$100\ min = (100 \cdot 60)\ s = 6000\ s.$$

A questo punto possiamo usare l'Eq. (53), ricavando lo spazio percorso:

$$x(t) - x(0) = v_0\, t = (30 \cdot 6000)\ m = 180.000\ m,$$

(cioè 180 Km).

Esercizio 2): Se un'automobile percorre a velocit costante 300 Km in 2.5 ore su un tratto rettilineo, calcolare la velocit (in Km/h e m/s).
Soluzione: Abbiamo $x(t) - x(0) = 300\ Km$, $t = 2.5\ h$; dall'Eq. (53) ricaviamo quindi v_0:

$$v_0 = \frac{x(t) - x(0)}{t} = \frac{300}{2.5}\ Km/h = 120\ km/h.$$

In MKS:

$$v_0 = \frac{120 \cdot 1000\ m}{3600\ s} \cong 33.3\ m/s.$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato.

Consideriamo ora il caso di moto rettilineo uniforme durante il quale rimane costante l'*accelerazione* (moto rettilineo uniformemente accelerato). Abbiamo ora a disposizione la definizione (5) di accelerazione media, e le due definizioni equivalenti (7) e (8) di accelerazione istantanea. Innanzitutto, poichè le relazioni (5) e (7) legano l'accelerazione alle variazioni di velocità esattamente nella stessa forma nella quale le relazioni (2) e (4) legano la velocità alle variazioni di posizione, con lo stesso metodo usato in precedenza per ricavare la legge oraria (53) possiamo, come semplice esercizio, ricavare la velocità come funzione del tempo nel caso di accelerazione costante. Indicato infatti con a il valore costante dell'accelerazione, abbiamo che

$$v(t) = v(0) + a\ t\ , \tag{31}$$

dove $v(0)$ indica la velocità iniziale all'istante $t = 0$. D'altra parte, la condizione di accelerazione costante si può scrivere come

$$a = \frac{dv(t)}{dt}\ , \tag{32}$$

e, consultando la tabella (21) delle derivate prime, vediamo che la soluzione dell'equazione (32) è data dal polinomio $P_1(t)$ con $c_1 = a$, cioè

$$v(t) = c_0 + a\ t\ . \tag{33}$$

Ora, ponendo $t = 0$ in questa equazione, troviamo che $v(0) = c_0$; come prima la costante arbitraria che compare nella soluzione di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine è fissata dalla condizione iniziale (in questo caso sulla velocità), e, inserita nell'Eq. (33), ci ridà la soluzione completa (31).

Ma quale sarà ora la legge oraria, cioè la dipendenza $x(t)$ dal tempo? Possiamo, a questo scopo, ricorrere alla definizione (8) di accelerazione la quale, inserendo la condizione di accelerazione costante uguale ad a, diventa

$$a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\ , \tag{34}$$

cioè un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che dice che la derivata seconda della funzione incognita è uguale alla costante a. Consultando allora la tabella (22) delle derivate seconde, vediamo che la soluzione dell'equazione (34) è data dal polinomio $P_2(t)$ con $c_2 = a$, cioè

$$x(t) = c_0 + c_1 \, t + \frac{1}{2} \, a \, t^2 \, , \tag{35}$$

dove ora, essendo l'equazione differenziale del secondo ordine, compaiono *due* costanti arbitrarie c_0, c_1. Per determinare c_0 poniamo, come prima, $t = 0$ nella relazione (35), e otteniamo $x(0) = c_0$, cioè che, come prima, c_0 è fissata assegnando la posizione iniziale $x(0)$ al tempo $t = 0$. Per determinare c_1, deriviamo ora la relazione (35) e, ricordando che la derivata di $x(t$ che compare l primo membro dell'Eq. (35) è la velocità $v(t)$, considerando che a secondo membro della (35) abbiamo l'espressione di $P_2(t)$ con $c_2 = a$, e consultando la tabella delle derivate prime (21) (derivata prima di P_2 con $c_2 = a$), otteniamo infine

$$v(t) = c_1 + a \, t \, . \tag{36}$$

Per determinare c_1 poniamo $t = 0$ nella relazione (36), e otteniamo $v(0) = c_1$, cioè che c_1 è fissata assegnando il valore iniziale $v(0)$ della velocità al tempo $t = 0$. Riotteniamo quindi l'Eq. (33). Inserendo ora le informazioni che $x(0) = c_0$ e $v(0) = c_1$ nell'Eq. (35), otteniamo la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$x(t) = x(0) + v(0) \, t + \frac{1}{2} \, a \, t^2 \, . \tag{37}$$

In questo procedimento abbiamo imparato che: *un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine è determinata ameno di due costanti arbitrarie; le costanti sono completamente determinate specificando il valore iniziale della funzione che soddisfa l'equazione, ed il valore iniziale della sua derivata prima.*

Si noti che la dipendenza dal tempo della posizione nel moto rettilineo uniformemente accelerato assume una forma quadratica; quindi, il grafico nel di x in funzione del tempo avrà la forma di una *parabola*

Esercizio 3): Un'automobile parte da ferma e accelera costantemente su un tratto rettilineo in modo da percorrere 200 metri in 30 secondi. Calcolare la velocit istantanea alla fine dei 200 metri e la velocit media, .

Soluzione: Vediamo innanzitutto le informazioni fornite nell'esercizio. Se l'automobile parte da ferma abbiamo che la velocità iniziale è nulla: $v(0) = 0$. Se accelera costantemente su un tratto rettilineo si tratta quindi di un moto rettilineo uniformemente accelerato: chiamiamo a l'accelerazione costante, e scriviamo subito la corrispondente legge oraria (35)

$$x(t) = x(0) + v(0)\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2 \,.$$

D'altra parte, possiamo inserire in questa equazione l'informazione che $v(0) = 0$, ottenendo

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{2}\, a\, t^2 \,.$$

Ci viene inoltre fornito lo spazio percorso (200 m) in un tempo $t = 30$ s. Lo spazio percorso all'istante t, cioè lo spostamento a t, è in generale dato dalla differenza $x(t) - x(0)$ tra la posizione a t e quella iniziale; Abbiamo quindi che $x(30\ s) - x(0) = 200\ m$. Dalla relazione precedente abbiamo

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 \,.$$

Ponendo $t = 30$ s in ambedue i membri di questa relazione, abbiamo

$$x(30) - x(0)\ m = \frac{1}{2}\, a\, (30)^2\ m,$$

e usando l'informazione sullo spostamento

$$200\ m = \frac{1}{2}\, a\ 900\ m,$$

Da questa relazione ricaviamo l'accelerazione costante a:

$$a = (2 \cdot 200)/900\ m\ s^{-2} \cong 0.44\ m\ s^{-2}.$$

Usando ora la relazione (33) con $v(0) = 0$ e $t = 30$ sec, otteniamo la velocità all'istante finale

$$v(30\ s) = (0.44 \cdot 30)\ m\ s^{-1} = 13.2\ m\ s^{-1}.$$

La velocità media è data dallo spostamento diviso il tempo, e quindi è

$$v_m = 200/30\ m\ s^{-1} \cong 6.6\ m\ s^{-1}.$$

Domanda: sono velocità elevate ?.

Esercizio 4): Un'automobile, partendo da ferma, accelera costantemente, e percorre un tratto rettilineo di 10 Km alla velocità media di 72 Km/h. Quant'è l'accelerazione costante mantenuta dalla macchina in unità MKS?
Soluzione: Vediamo innanzitutto le informazioni fornite nell'esercizio. Se l'automobile parte da ferma abbiamo che la velocità iniziale è nulla: $v(0) = 0$. Se accelera costantemente su un tratto rettilineo si tratta quindi di un moto rettilineo uniformemente accelerato: chiamiamo a l'accelerazione costante, e scriviamo subito la corrispondente legge oraria (35)

$$x(t) = x(0) + v(0)\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2\ .$$

D'altra parte, possiamo inserire in questa equazione l'informazione che $v(0) = 0$, ottenendo

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{2}\ a\ t^2\ .$$

Ci viene anche fornito lo spostamento ($x(t) - x(0) = 10\ Km$), e la velocità media ($v_m = 72\ Km/h$). Poichè la risposta è richiesta in unità MKS, conviene innanzitutto tradurre questi dati in tali unità:

$$72\ Km/h = \frac{72 \cdot 1000}{3600}\ m\ s^{-1} = 20\ m\ s^{-1},$$

$$10\ Km = 10.000\ m.$$

Ora la velocità media è data dal rapporto tra lo spostamento ed il tempo impiegato:

$$v_m = (x(t) - x(0))/t,$$

da cui possiamo ricavare il tempo impiegato a coprire i 10 Km

$$t = (x(t) - x(0))/v_m = 500\ s.$$

Ora abbiamo

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 \ m,$$

e, inserendo lo spostamento ed il tempo, abbiamo

$$a = 2(x(t) - x(0))/t^2 \ m\ s^{-2} = 20.000/250.000\ m\ s^{-2} = 0.08\ m\ s^{-2}.$$

Esercizio 5): Si consideri un punto materiale che, partendo da fermo, compie un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione a. Il punto materiale percorre, a partire dall'istante iniziale, uno spazio di 4 metri in un tempo di 2 secondi. Un secondo punto materiale compie lo stesso moto rettilineo uniformemente accelerato (con la stessa accelerazione a), ma parte con una velocità iniziale $v(0)$ diversa da zero. Il secondo punto materiale percorre uno spazio di 10 metri in un tempo di 2 secondi. Calcolare l'accelerazione a e la velocità iniziale $v(0)$ del secondo punto materiale.
Soluzione: Partiamo per i moti di ambedue i punti materiali dalla legge oraria (37) del moto rettilineo uniformemente accelerato. Notiamo che, non essendo coinvolta alcuna posizione relativa tra i due punti, possiamo scegliere $x(0) = 0$ per tutti e due i moti senza ledere la generalità. Inoltre, per il primo punto abbiamo $x(t = 2\ s) = 4\ m$, $v(0) = 0$; allora, possiamo usare la (37) sostituendo al primo membro $4\ m$ e mettendo nel secondo membro $v(0) = 0$ e $t = 2\ s$:

$$4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 = 2\ a,$$

da cui otteniamo l'accelerazione

$$a = 2\ m\ s^{-2}.$$

Nel caso del secondo punto materiale usiamo ancora la (37) con $x(t = 2\ s) = 10\ m$ al primo membro, e inserendo a secondo membro $t = 2\ s$ e il valore $a = 2\ m\ s^{-2}$ appena ottenuto. In questo modo otteniamo un'equazione per $v(0)$:

$$10 = 2 \cdot v(0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot v(0) + 4,$$

cioè

$$6 = 2 \cdot v(0),$$

da cui

$$v(0) = 3\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 6): Due punti materiali svolgono due moti rettilinei uniformemente accelerati. All'istante iniziale il primo punto dista dal secondo punto di 100 metri. I due punti svolgono i loro moti nel verso che va dalla posizione iniziale del primo punto a quella del secondo punto. La velocità iniziale del primo punto è di 72 Km/h, mentre il secondo punto parte da fermo. L'accelerazione del primo punto è $a_1 = 2\ m\ s^{-2}$, mentre quella del secondo punto è $a_2 = 1\ m\ s^{-2}$. Dopo quanto tempo il primo punto raggiunge il secondo?

Soluzione: Dobbiamo scrivere le leggi orarie della forma (37) per i due punti. Denotiamo con $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_1(0)$, $x_2(0)$, $v_1(0)$, $v_2(0)$ rispettivamente le posizioni all'istante t del primo e del secondo punto, le posizioni all'istante iniziale del primo e del secondo punto, e le velocità all'istante iniziale del primo e del secondo punto; avendo già denotato con a_1, a_2 le accelerazioni, abbiamo che le due leggi orarie sono:

$$x_1(t) = x_1(0) + v_1(0)\ t + \frac{1}{2}\ a_1\ t^2,$$

$$x_2(t) = x_2(0) + v_2(0)\ t + \frac{1}{2}\ a_2\ t^2.$$

Essendo fissata una distanza iniziale relativa tra i due punti, vediamo che possiamo scegliere l'origine nel punto $x_1(0)$ che denota la posizione iniziale del primo punto materiale (quello che sta "più indietro"), e quindi abbiamo

$$x_1(0) = 0.$$

Rispetto al primo punto materiale, il secondo all'stante iniziale sta "più avanti" di 100 metri, e quindi, nel nostro riferimento,

$$x_2(0) = 100\ m.$$

Inoltre abbiamo

$$v_1(0) = 72\ Km/h \equiv 20\ m\ s^{-1}\ ;\ v_2(0) = 0.$$

Inserendo questi dati, ed i valori delle accelerazioni, abbiamo

$$x_1(t) = 20 \cdot t + t^2,$$

$$x_2(t) = 100 + \frac{1}{2} \cdot t^2.$$

Denotato con $\hat{t}$ l'istante nel quale il primo punto materiale raggiunge il secondo, abbiamo che in questo istante le posizioni coincidono:

$$x_1(\hat{t}) = x_1(\hat{t}),$$

cioè, sostituendo nelle leggi orarie $t = \hat{t}$ e imponendo l'uguaglianza tra i secondi membri abbiamo

$$20 \cdot \hat{t} + \hat{t}^2 = 100 + \frac{1}{2} \cdot \hat{t}^2,$$

da cui, raggruppando in un solo membro e moltiplicando per due,

$$\hat{t}^2 + 40 \cdot \hat{t} - 200 = 0.$$

Le soluzioni sono (formula ridotta)

$$\hat{t}_\pm = -20 \pm \sqrt{400 + 200} = -20 \pm 10 \cdot \sqrt{6}.$$

Ovviamente, la soluzione a tempo negativo va scartata, e abbiamo

$$\hat{t}_+ = -20 + 10 \cdot \sqrt{6} \cong 4.5\ s.$$

1.2 Moti non unidimensionali

Consideriamo ora un moto con una traiettoria non più unidimensionale. Allora, la posizione del punto materiale ad un certo istante in un sistema Cartesiano sarà un vettore $\vec{s}(t)$, in generale con tre componenti: $\vec{s}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$. In corrispondenza, lo spostamento cioè il cambiamento della posizione del punto materiale, tra un istante t ed un istante $t+\Delta t$, sarà anch'esso un vettore definito da

$$\Delta\vec{s}(t) \doteq \vec{s}(t+\Delta t) - \vec{s}(t), \tag{38}$$

dove, a secondo membro, si dovrà effettuare una differenza con le regole delle operazioni tra vettori.

In questo caso generale dovremo quindi ridefinire la velocità media nell'intervallo di tempo $t, t+\Delta t$, e la velocità istantanea del punto materiale al tempo t, come segue

$$\vec{v}_m(t, t+\Delta t) \doteq \frac{\Delta\vec{s}(t)}{\Delta t}\ , \tag{39}$$

$$\vec{v}(t) \doteq \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{s}(t)}{\Delta t}\ ; \tag{40}$$

la seconda definizione ci dà anche

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} \tag{41}$$

Inoltre, dovremo anche ridefinire l'accelerazione media nell'intervallo di tempo $t, t+\Delta t$, e l'accelerazione istantanea del punto materiale al tempo t, come segue

$$\vec{a}_m(t, t+\Delta t) \doteq \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}\ . \tag{42}$$

$$\vec{a}(t) \doteq \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}\ ; \tag{43}$$

la seconda definizione ci dà anche l'accelerazione come derivata della velocità

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}\ , \tag{44}$$

che l'accelerazione come derivata seconda della posizione

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{s}(t)}{dt^2}\ . \tag{45}$$

Si noti che le varie definizioni, in particolare quelle tramite derivate, possono essere riscritte in componenti Cartesiane; anzi, per la soluzione di problemi generali, di legge oraria questo sarà (di norma) necessario. Consideriamo allora la definizione (41); in componenti, considerando che $\vec{s}(t) \equiv$

$(x(t), y(t), z(t))$, essa si scriverà

$$\vec{v}(t) \equiv (\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}) \equiv (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \ . \tag{46}$$

Invece, le definizioni (44) e (45) in componenti si scriveranno come

$$\vec{a}(t) \equiv (\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt}) \ , \tag{47}$$

e

$$\vec{a}(t) \equiv (\frac{d^2x(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt}, \frac{d^2z(t)}{dt}) \equiv (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \ . \tag{48}$$

Finora noi abbiamo considerato il caso di moti rettilinei (lungo l'asse X), quindi unidimensionali, per i quali

$$v_y(t) = v_z(t) = 0 \ ; \ a_y(t) = a_z(t) = 0,$$

e per i quali, quindi, le componenti $y(t), z(t)$ della legge oraria sono sempre nulle, e conta solo $x(t)$. Adesso andremo a studiare un moto *bidimensionale*: il moto circolare.

Moto circolare uniforme.

Consideriamo un moto durante il quale il punto materiale descrive una traiettoria circolare, il cui raggio indichiamo con R. Chiaramente questa traiettoria è bidimensionale, e quindi descrivibile in un sistema di riferimento Cartesiano costituito da due assi, X, Y, in un piano. Scegliamo di porre l'origine degli assi nel centro del cerchio, che quindi avrà coordinate $(0, 0)$. Il punto materiale, ad un certo istante t, avrà una posizione sul cerchio individuata da un vettore $\vec{s}(t)$ nel piano, di lunghezza fissata R, e di coordinate $x(t), y(t)$ (vedi Fig. 1). Poichè ad ogni istante , come detto, la distanza del punto dalll'origine deve essere pari a R, le coordinate dovranno soddisfare la condizione

$$|\vec{s}(t)|^2 \equiv x^2(t) + y^2(t) = R^2.$$

Anche per questo moto dovremo definire le grandezze cinematiche velocità ed accelerazione. Ci troviamo chiaramente in un caso più complicato di quello del moto unidimensionale; vedremo però che, nel caso di moto circolare uniforme, riusciremo ancora a descrivere il moto in modo semplice.

Cominciamo però a considerare in modo completo il carattere bidimensionale della traiettoria; questo ci servirà a capire quale deve essere la *direzione* della velocità in ogni punto della traiettoria. Consideriamo quindi l'incremento $\Delta\vec{s}(t)$ della posizione del punto sul cerchio; poichè in questo caso la differenza tra $\vec{s}(t+\Delta t)$ e $\vec{s}(t)$ non è altro che la differenza tra due raggi del cerchio (vedi Fig. 2), $\Delta\vec{s}(t)$ rappresenta un vettore diretto lungo la *secante* al cerchio tra i due punti individuati dai due raggi sul cerchio stesso; quindi, la velocità media $\vec{v}_m(t, t+\Delta t) \doteq \Delta\vec{s}(t)/\Delta t$ sarà anch'essa diretta lungo questa secante. Se però eseguiamo il limite per Δt che tende a zero, vediamo che i due punti si avvicinano (cioè anche $\Delta\vec{s}(t)$ tende a zero), e nel limite, che ci permette di ottenere la velocità istantanea $\vec{v}(t) \doteq \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta\vec{s}(t)/\Delta t)$, otteniamo un vettore *tangente* al cerchio nel punto $\vec{s}(t)$. Quindi, vediamo che: *la velocità istantanea in un punto della traiettoria di un moto circolare è sempre tangente alla traiettoria nel punto considerato.* Chiaramente abbiamo anche che: *la velocità istantanea in un punto della traiettoria di un moto circolare ha un verso che è determinato dal fatto che il punto percorra il cerchio in verso orario o in verso antiorario.* Avendo caratterizzato la direzione ed il verso nel moto circolare, è conveniente introdurre, accanto alla definizione usuale della velocità vettoriale istantanea, la definizione di *velocità scalare.* Supponiamo infatti che all'istante t il nostro punto materiale sia nel punto P sul cerchio, e che all'istante $t+\Delta t$ sia arrivato al punto P' sul cerchio, ed andiamo a definire con $\Delta s(t)$ *la lunghezza dell'arco di cerchio tra P e P' percorso dal punto materiale nell'intervallo di tempo tra t e $t+\Delta t$.* Allora, definiamo *la velocità scalare media $v_{sm}(t)$* come

$$v_{sm}(t) \doteq \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \ , \tag{49}$$

e *la velocità scalare istantanea $v_s(t)$*

$$v_s(t) \doteq \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \ . \tag{50}$$

In realtà, la velocità scalare è proprio quella che usiamo normalmente, quella, per intenderci, che segna il tachimetro della nostra automobile. Infatti, se affrontiamo una curva, cioè un tratto non rettilineo, sull'autostrada la velocità che consideriamo è proprio quella ottenuta dividendo la lunghezza del tratto non rettilineo per il tempo.

Stabilito questo fatti e introdotto queste definizioni, che sono valide per qualsiasi moto circolare, andiamo ora a restringere il nostro studio ad un caso semplice, ma estremamente importante. Andiamo infatti a considerare il caso nel quale *il* **modulo** *della velocità istantanea rimane costante nel tempo*:

$$|\vec{v}(t)| = v_0 \ , \tag{51}$$

dove abbiamo indicato il valore costante del modulo con v_0. Si noti che, mentre nel caso del moto rettilineo uniforme la velocità rimaneva costante anche in *direzione* e *verso*, in questo caso solo il modulo rimane costante, mentre la direzione ed il verso variano perchè associati ad istanti diversi a tangenti in diversi punti del cerchio.

Vedremo fra poco che potremo trattare questo caso ancora in modo analogo a quanto fatto nel caso unidimensionale, almeno se ci limitiamo a considerare la velocità. Prima di procedere, però, è necessario mostrare che nel caso del moto circolare uniforme, a differenza del moto rettilineo uniforme, l'accelerazione non è nulla. Infatti, abbiamo visto che solo il *modulo* della velocità rimane costante, mentre cambiano la *direzione* e il *verso*; quindi, il vettore $\Delta\vec{v}(t)$ non sarà nullo, e non sarà quindi nulla l'accelerazione $\vec{a}(t) \doteq \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta\vec{v}(t)/\Delta t)$. Ma come sarà *diretta* l'accelerazione? Se ora andiamo a considerare due vettori velocità della stessa lunghezza v_0, tangenti in due punti diversi al cerchio, trasportiamo rigidamente il secondo vettore in modo che abbia lo stesso punto di applicazione del primo, e poi esaminiamo la direzione della differenza tra i due vettori, che è ottenuta congiungendo le "punte" dei due vettori, vediamo che tale direzione, nel limite nel quale il secondo punto sul cerchio tende a confondersi col primo, va a coincidere con quella del raggio del cerchio (vedi Fig. 3). Vediamo anche che il verso della differenza tra i due vettori è quello che punta verso il centro. Questa direzione e questo verso sono quelli di $\Delta\vec{v}(t)$ nel limite, e quindi abbiamo costatato che: *l'accelerazione istantanea in punto di un moto circolare uniforme è un vettore diretto lungo il raggio del cerchio passante per il punto, con verso che punta verso il centro della traiettoria.* Chiameremo l'accelerazione in un moto circolare *accelerazione centripeta*.

Avendo caratterizzato direzione e verso della velocità e dell'accelerazione in un moto circolare uniforme, andiamo adesso a studiarne in modo semplice le altre proprietà.

Innanzitutto, possiamo ricondurci ad un caso sostanzialmente unidimensionale considerando la velocità scalare (50) invece di quella vettoriale. Vediamo subito, infatti, che

$$v_s(t) \equiv |\vec{v}(t)|,$$

e che quindi la condizione di moto circolare uniforme si può scrivere come

$$v_s(t) = v_0 \; ; \tag{52}$$

vediamo allora che, in questi termini, la condizione (52) di moto circolare uniforme imposta sulla velocità scalare è formalmente identica a quella (9) imposta nel caso di moto rettilineo uniforme. Se quindi definiamo $s(t)$ la coordinata curvilinea misurata lungo il cerchio, con gli stessi metodi usati nel caso del moto rettilineo uniforme, otteniamo una legge oraria per la coordinata curvilinea della stessa forma (23) ottenuta in quel caso per la coordinata rettilinea:

$$s(t) = s(0) + v_0 \, t \; , \tag{53}$$

dove con $s(0)$ indichiamo il valore iniziale della coordinata curvilinea (misurata in un punto-origine sul cerchio da noi arbitrariamente fissato).

Abbiamo quindi ricavato una legge oraria per il moto circolare uniforme. Ma in questo moto vi sono altre caratteristiche ed altre definizioni da introdurre.

Innanzitutto, notiamo che *il moto circolare uniforme è un moto che si ripete uguale dopo ogni giro completo*; infatti, se il punto materiale parte da una certa posizione iniziale, esso ritorna in quella posizione dopo un giro, dopo due giri, ecc. Torniamo allora alla definizione di velocità scalare ed alla condizione di moto circolare uniforme (52); vediamo che questa definizione ci dice che la velocità è uguale a quella scalare media e che, qualsiasi sia l'arco di cerchio che consideriamo, se dividiamo questo arco per il tempo che il punto materiale impiega a percorrerlo otteniamo sempre la stessa velocità v_0. Allora, se scegliamo come arco, in particolare, l'intera circonferenza la cui lunghezza è $2\,\pi\,R$, ed indichiamo con T il tempo impiegato a percorrerla, abbiamo

$$v_0 = \frac{2\,\pi\,R}{T}, \tag{54}$$

da cui ricaviamo il tempo T:

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v_0} \; . \tag{55}$$

Chiameremo T il *periodo* del moto circolare uniforme, e poichè ogni giro sarà percorso nello stesso tempo pari al periodo, diremo che il moto circolare uniforme è un *moto periodico.* Al concetto di periodo possiamo associare il concetto di *frequenza* ν, definita come l'inverso del periodo

$$\nu = \frac{1}{T} \equiv \frac{v_0}{2\,\pi\,R} \ . \tag{56}$$

Vediamo che la frequenza ha dimensioni dell'inverso di un tempo: $[\nu] = [t^{-1}]$. vediamo anche che, dalla definizione, *la frequenza misura il numero di giri che il punto materiale compie nell'unità di tempo* (nel sistema MKS la frequenza la misureremo quindi in *giri (o cicli) al secondo*). Per capire meglio questo concetto basterà fare un semplice esempio. Consideriamo infatti il caso $T = 0.5\ s \equiv (1/2)\ s$; in questo caso, in 1 secondo il punto fa 2 giri, ed infatti $\nu = 1/(1/2)\ s^{-1} \equiv 2\ s^{-1}$.

Introduciamo ora un altro importante concetto, quelo di *velocità angolare.* Infatti, vediamo che nel moto circolare possiamo individuare la di un punto sul cerchio anche attraverso l'angolo *theta* che il raggio che passa per il punto forma, per esempio, con la verticale, cioè con l'asse Y (vedi Fig. 4). Se indichiamo con $\Delta\theta(t) \doteq \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$ l'incremento dell'angolo nell'intervallo di tempo tra t e $t + \Delta t$, sembra allora naturale introdurre il concetto di velocità angolare $\omega(t)$ come

$$\omega(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} \ . \tag{57}$$

Nel caso del moto circolare uniforme è chiaro che angoli uguali vengono percorsi in tempi uguali, cioè che $\omega(t)$ è costante:

$$\omega(t) = \omega \ , \tag{58}$$

dove con ω abbiamo indicato il valore della costante. Vediamo, innanzitutto, che la velocità angolare, come la frequenza, ha le dimensioni dell'inverso di un tempo:

$$[\omega] = [rad \cdot t^{-1}] \equiv t^{-1},$$

poichè il radiante (misura di un angolo) è adimensionale. Comunque, misureremo la velocità angolare in *radianti al secondo* ($rad\ s^{-1}$).

Vediamo anche che la relazione (58) e la definizione (57) danno una legge oraria per l'angolo della stessa forma (53) o (23) della coordinata curvilinea del moto circolare uniforme o della coordinata lineare del moto rettilineo uniforme:

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega\ t\ , \tag{59}$$

dove $\theta(0)$ indica ovviamente il valore iniziale dell'angolo.

Vogliamo ora trovare la relazione che lega la velocità angolare con le altre grandezze caratteristiche del moto circolare uniforme cioè v_0, R, e T (o ν).

A questo scopo, basta ricordare che, per definizione, l'ampiezza di un angolo *alpha* è legata alla lunghezza dell'arco di cerchio l da esso sotteso, ed al raggio R del cerchio, dalla relazione

$$\alpha \doteq \frac{l}{R}.$$

Poichè l'incremento $\Delta\theta(t)$ nel tempo Δt dell'angolo nel moto circolare uniforme sottende l'incremento $\Delta s(t)$ dell'arco di cerchio ottenuto nello stesso tempo, abbiamo la relazione

$$\Delta\theta(t) = \frac{\Delta s(t)}{R}. . \tag{60}$$

Allora, da questa relazione, e dalle relazioni (57) e (50), abbiamo

$$\omega(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} \equiv = \frac{1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \equiv \frac{1}{R}\ v_s(t)\ , \tag{61}$$

e dalle relazioni (50), (52), valide nel moto circolare uniforme, otteniamo infine

$$\omega = \frac{v_0}{R}\ , \tag{62}$$

oppure

$$v_0 = \omega R\ , \tag{63}$$

D'altra parte, da questa relazione e dalle relazioni (54) e (56) otteniamo anche

$$\omega = \frac{2\ \pi}{T} = 2\ \pi\ \nu\ . \tag{64}$$

Infine, vogliamo trovare l'espressione del modulo dell'accelerazione centripeta, che indicheremo con a_c, nel caso del moto circolare uniforme. Per non complicare i conti, possiamo ricorrere all'*analisi dimensionale*. Infatti, il moto circolare uniforme è completamente caratterizzato dalla coppia v_0, R, e quindi anche a_c deve essere esprimibile in termini di queste due quantità. Ora, essendo a_c un'accelerazione, abbiamo

$$[a_c] = [l\ t^{-2}] \equiv [(l\ t^{-1})^2\ l^{-1}] \equiv [v^2\ l^{-1}],$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per un'unità di lunghezza in modo da ricomporre una velocità al quadrato. Vediamo quindi che a_c ha le dimensioni di una velocità al quadrato diviso una lunghezza; poichè come velocità abbiamo a disposizione v_0 e come lunghezza il raggio R, possiamo dedurne che

$$a_c = \frac{v_0^2}{R}\ . \tag{65}$$

In realtà, possiamo solo affermare che questa relazione vale a meno di una costante adimensionale di proporzionalità, ma si può dimostrare che in realtà questa costante vale 1, e che quindi la relazione (65) è esatta. Naturalmente, usando le relazioni (62) e (64), abbiamo anche

$$a_c = \omega^2\ R \equiv \frac{4\pi^2}{R\,T^2} \equiv \frac{4\pi^2\nu^2}{R}\ . \tag{66}$$

Moto armonico.

Consideriamo ancora il moto circolare uniforme, e consideriamo la proiezione sul diametro lungo X ad un certo istante t della posizione del punto materiale che sta girando sul cerchio (vedi Fig. 5); questa proiezione non è altro, ovviamente, che la coordinata $x(t)$ del moto. Abbiamo indicato con $\theta(t)$ l'angolo formato con l'asse Y dal raggio che individua la posizione sul cerchio all'istante t. Quindi, la proiezione $x(t)$, essendo $\theta(t)$ l'angolo *opposto* al cateto $x(t)$ nel triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa è il raggio R e l'altro cateto la verticale dal punto sull'asse X, abbiamo

$$x(t) = R\ \sin\theta(t)\ ; \tag{67}$$

se ora utilizziamo la relazione (59), e consideriamo che possiamo sempre scegliere per semplicità $\theta(0) = 0$, abbiamo

$$x(t) = R\ \sin(\omega\ t)\ . \tag{68}$$

Da questa relazione, vediamo che la proiezione $x(t)$ su X del moto circolare uniforme compie un *moto armonico*; tale moto, descritto dalla legge (68), vede l'oscillazione periodica intorno al punto $x(0) = 0$, dalla coordinata $x = -R$ alla coordinata $x = R$ con lo stesso periodo T del moto circolare uniforme. Ovviamente, anche la proiezione $y(t)$ del moto circolare uniforme sull'asse Y compie un moto armonico simile, descritto da

$$y(t) = R\ \cos(\omega\ t)\ . \tag{69}$$

Ritroveremo il moto armonico nella prossima lezione quando tratteremo l'oscillatore armonico

Esercizi

Esercizio 7): Un punto materiale compie un moto circolare uniforme di raggio R_1 con velocità scalare $v_1 = 5\ m\ s^{-1}$. Un secondo punto materiale compie un moto circolare uniforme di raggio $R_2 = 2\ R_1$. Sapendo che i due cerchi vengono percorsi nello stesso periodo, calcolare la velocità scalare v_2 del secondo punto materiale.
Soluzione: Scriviamo l'Eq. (55) per i due periodi T_1, T_2 dei due punti materiali:

$$T_1 = \frac{2\ \pi\ R_1}{v_1},$$
$$T_2 = \frac{2\ \pi\ R_2}{v_2}.$$

Poiché il periodo è lo stesso, abbiamo $T - 1 = T_2$, ed uguagliando i secondi membri delle precedenti relazioni:

$$\frac{2\ \pi\ R_1}{v_1} = \frac{2\ \pi\ R_2}{v_2}.$$

Ricavando v_2 abbiamo infine

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1}\ v_1 = 2\ v_1 = 10\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 8): Un'automobile percorre un tratto rettilineo di 800 km in 10 ore. Sapendo che ha effettuato 3 soste di 20 minuti ciascuna, calcolare la velocità media tenuta. Esprimere il risultato in unità MKS.

Esercizio 9): Un'automobile parte da ferma e percorre un tratto rettilineo L con accelerazione costante pari a 4 $m\ s^{-2}$ in un tempo pari a 10 s. Calcolare la lunghezza del tratto L.

Esercizio 10): Un'automobile percorre un tratto rettilineo $L = 480\ km$ in 3 ore. Calcolare quale accelerazione costante deve tenere l'automobile per raggiungere in 100 m, partendo da ferma, una velocità pari alla velocità media tenuta nel tratto L. Esprimere il risultato in unità MKS.

Esercizio 11): Un'automobile parte da ferma e percorre un primo tratto rettilineo di 100 m con un'accelerazione costante di 8 $m\ s^{-2}$, e subito dopo percorre altri 100 m con un'accelerazione costante di 4 $m\ s^{-2}$. Calcolare la velocità raggiunta dopo i 200 m percorsi.

Esercizio 12): Un'automobile parte da ferma con un'accelerazione costante di 1 $m\ s^{-2}$ e percorre 100 m, dopo di che raddoppia l'accelerazione e percorre altri 100 m, poi raddoppia di nuovo l'accelerazione e percorre altri 100 m. Qual'è la sua velocità dopo i 300 m percorsi?

Esercizio 13): Un punto materiale compie un moto circolare uniforme di raggio $R = 10\ m$ con velocità angolare $\omega = 2\ rad\ s^{-1}$. Calcolare la velocità scalare e l'accelerazione centripeta.

Esercizio 14): Un punto materiale compie un moto circolare uniforme, percorrendo 1 giro in 4 secondi. Inoltre, l'accelerazione centripeta vale $a_c = 85\ m\ s^{-2}$. Calcolare la velocità scalare ed il raggio della traiettoria.

Esercizio 15): Un moto circolare uniforme viene percorso con una velocità scalare il cui valore è pari a quello della velocità raggiunta da un punto materiale in un moto rettilineo uniformemente accelerato, con partenza da fermo, e con accelerazione costante pari a 2 $m\ s^{-2}$; inoltre, la frequenza del moto circolare uniforme vale 0.125 s^{-1}. Calcolare il raggio e l'accelerazione centripeta.

Esercizio 16): Un punto materiale percorre con moto uniforme (velocit'a v_0) un tratto rettilineo di 100 m in 5 secondi, dopo di che dimezza la sua velocit—'a, e si immette su un circuito circolare, di raggio $R = 50\ m$, che percorre con velocit'a scalare costante pari a $v_0/2$. Calcolare il periodo e l'accelerazione centripeta.

Esercizio 17): Un punto materiale compie un moto circolare uniforme di circonferenza pari ad 80 m con velocità scalare $v_0 = 20\ m\ s^{-1}$. La proiezione $x(t)$ del punto sull'asse X compie intanto, come abbiamo visto, un moto armonico. Se il punto all'istante $t = 0$ parte dall'intersezione dell'asse Y con la traiettoria circolare, calcolare quanto vale la coordinata $x(t)$ dopo 0.5 secondi. E quanto vale la coordinata $y(t)$?