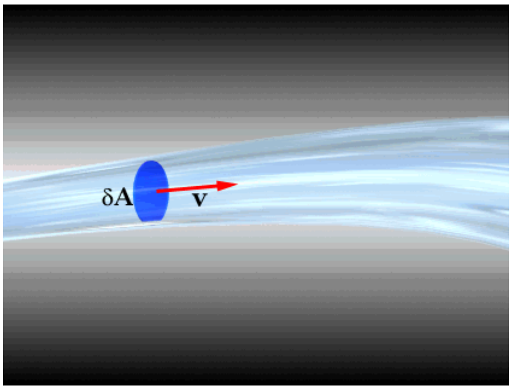
1 LA LEGGE DI GAUSS

Per la determinazione del campo elettrico bisogna sapere quali sono e dove sono esattamente le sorgenti del campo elettrico. Abbiamo già visto che tali sorgenti sono le cariche elettriche puntiformi. Ora stabiliremo, in maniera generale, il legame che esiste tra una proprietà fondamentale del campo (il suo flusso attraverso una superficie chiusa) e le sorgenti del campo stesso. Per capire ciò che ci accingiamo a studiare e la sua collocazione all'interno dell'elettromagnetismo conviene anticipare alcune precisazioni. Dimostremo sul piano matematico che se è vera la legge di Coulomb, il flusso del campo elettrico dipende solo dalle cariche contenute nella superficie. Tale risultato, poiché si fonda sulla validità della legge di Coulomb, è detto "teorema di Gauss". Inoltre, mostreremo che non è vero il contrario; cioé, che se si conosce il flusso del campo attraverso una superficie chiusa, non sempre è possibile dedurre il campo elettrostatico (ciò è possibile solo in casi di particolare simmetria del problema). Allora, perché parlare di legge di Gauss nel titolo? In realtà, per poter arrivare ad una forma di equivalenza tra la legge di Coulomb e quella di Gauss, occorre riformulare le equazioni del campo in quella che si chiama "forma locale" delle equazioni del campo. Quando avremo trovato la formulazione locale della circuitazione e del flusso attraverso una superficie chiusa, del campo elettrico, avremo non solo l'equivalenza ma saremo andati oltre. Più precisamente, la formulazione delle leggi fisiche, nella forma di forze, si è rivelata poco efficiente nell'indagine delle leggi fondamentali e la strada da percorrere è stata intrapresa per la prima volta da Maxwell nell'elettromagnetismo. Quindi, quella di Gauss è una legge, anche se nella veste che qui sarà presentata ha più l'aspetto di un teorema. Fatta questa precisazione, parleremo indistintamente di legge o teorema di Gauss.

2 Flusso di un vettore attraverso una superficie

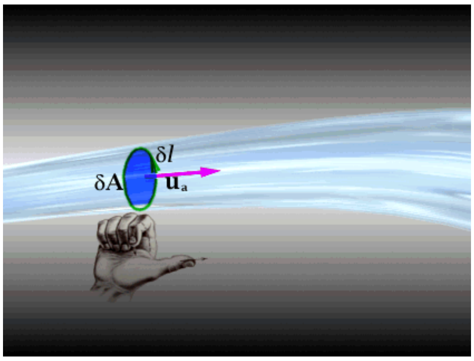
Si abbia un tubo trasparente all'interno del quale scorra dell'acqua



Sia δA una sua sezione e v la velocità delle particelle di fluido che transitano per δA; la velocità è supposta costante su tutta la superficie ed è ad essa ortogonale. La *portata*,

$$\Phi_{\delta A}\left(\mathrm{v}\right)=\delta A\mathrm{v} \tag{1}$$

rappresenta il volume di fluido che attraversa, nell'unità di tempo, la sezione δA. La superficie δA ha due facce: vogliamo definire quella positiva. Sia δl il bordo della superficie δA. Con le dita della mano destra percorriamo tale bordo, in senso antiorario. L'area racchiusa dalla mano è la faccia positiva ed il pollice, che risulta ortogonale a tale area, indicherà la direzione ed il verso della superficie orientata. Tale faccia sarà indicata con un versore, $\mathbf{u}_a$.

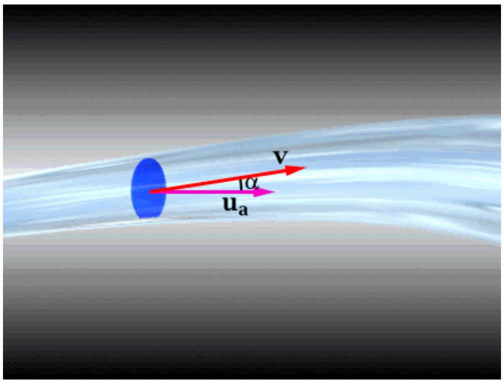


Con il vettore

$$\delta\mathbf{A}=\delta A\mathbf{u}_a \tag{2}$$

intenderemo una superficie orientata, cioè una superficie e la sua faccia positiva.

Se nel tubo ove scorre il fluido il vettore velocità non è più ortogonale alla superficie δA, pur rimanendo costante su tutta la superficie,



la portata sarà data da

$$\Phi_{\delta A}\left(\mathrm{v}\right)=\delta A\mathrm{v}\cos\alpha \tag{3}$$

dove α è l'angolo tra il vettore velocità ed il versore $\mathbf{u}_a$ della superficie δA. Per la definizione di prodotto scalare, potremo anche scrivere

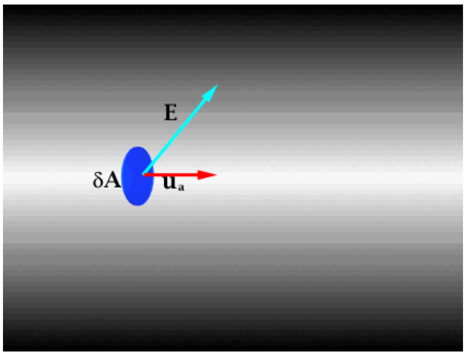
$$\Phi_{\delta A}(\mathrm{v}) = \delta A \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{v} \tag{4}$$

La *portata* è un caso particolare di flusso di un vettore attraverso una superficie. Più precisamente, la portata è il flusso del vettore velocità attraverso la superficie δA.

Se si considera un nuovo vettore, come per esempio il campo elettrico $\mathbf{E}$, la quantità

$$\Phi_{\delta A}(E) = \delta A \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} \tag{5}$$

rappresenta il flusso del vettore $\mathbf{E}$ attraverso la superficie δA, nell'ipotesi che il campo elettrico sia costante su tutta la superficie δA

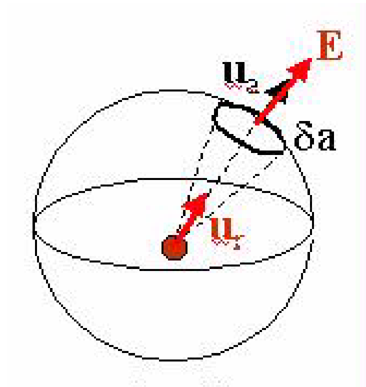


Allora nel calcolo del flusso dobbiamo prima stabilire la faccia positiva della superficie e dopo verificare l'angolo tra la direzione di questa e quella del campo. Se la superficie è *chiusa* la direzione di una qualunque area infinitesima deve essere sempre quella diretta verso l'esterno:

3 La legge di Gauss per il campo elettrico

Ora dimostreremo che, come conseguenza della validità della legge di Coulomb, il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa dipende dalle cariche puntiformi racchiuse in essa. Questo risultato è noto come teorema (o legge) di Gauss.

Consideriamo una sfera di raggio r che ha nel suo centro una carica *positiva* Q. Ci proponiamo di calcolare il flusso del campo elettrico $\mathbf{E}$, generato dalla carica posta nel centro della sfera attraverso la superficie totale della sfera. Consideriamo prima il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso una piccola area δA, della superficie sferica, che abbiamo preventivamente suddivisa in tante superfici, su ognuna delle quali il campo è supposto costante. Focalizziamo la nostra attenzione su una di queste superfici:



Il campo elettrico generato dalla carica Q ad una distanza r dal suo centro è

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathbf{u}_r \tag{1}$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto e $\mathbf{u}_r$ il versore del vettore posizione del sistema di riferimento con origine sulla carica Q. La superficie δa è talmente piccola che $\mathbf{u}_a$ è il solo versore che individua la sua faccia positiva. Siccome δa è parte di una superficie chiusa, cioè la superficie totale della sfera, i versori delle superfici chiuse sono sempre uscenti dalla superficie: tutti gli $\mathbf{u}_a$ puntano verso l'esterno. Possiamo calcolare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie δa. Per definizione, tale flusso è fornito dalla

$$\Phi_{\delta a}\left(E\right) = \delta A \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} \tag{2}$$

e sostituendo in essa, l'espressione del campo (1), si avrà:

$$\Phi_{\delta a}\left(E\right) = \delta a \mathbf{u}_a \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathbf{u}_r$$

ovvero

$$\Phi_{\delta a}\left(E\right) = \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_r \frac{\delta a}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{3}$$

Poiché i due versori sono paralleli, $\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_r = 1$; allora il flusso del campo elettrico attraverso la superficie δa sarà dato da

$$\Phi_{\delta a}\left(E\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\delta a \tag{4}$$

Il flusso del campo elettrico attraverso l'intera superficie sferica a, sarà la somma dei flussi attraverso tutte le superfici δa che costituiscono la sfera:

$$\Phi_a\left(E\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\sum_{\delta a}\delta a \tag{5}$$

Poiché, l'area di una sfera è $a = 4\pi r^2$, la precedente espressione si riduce a

$$\Phi_a(E) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{6}$$

Questa espressione, nota come *teorema di Gauss* e derivata per una carica posta nel centro della sfera, è valida qualunque siano le cariche poste dentro la sfera e qualunque sia la forma della superficie chiusa che le contiene.

Più precisamente, il teorema di Gauss consente di provare che il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa è sempre dato da

$$\Phi_A(E) = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{7}$$

dove Q rappresenta la *somma algebrica* di tutte le cariche contenute nella superficie chiusa.

Il teorema di Gauss, si fonda, nella nostra presentazione, sulla validità della legge di Coulomb. Conviene, tuttavia, fare alcune precisazioni. Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è, sempre, dato dalla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie chiusa. Tuttavia il campo elettrico dipende dalla configurazione istantanea di tutte le cariche che sono dentro alla superficie chiusa. Quindi, se si cambia la configurazione delle cariche cambierà il campo elettrico nei punti dello spazio (e anche sulla superficie) che circondano la superficie chiusa che racchiude le cariche. Allora, sebbene il campo all'esterno della superficie chiusa (e sulla superficie) possa cambiare (ed anche in maniera considerevole) il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo rimarrà inalterato, purché nessuna carica attraversi la superficie in uno qualunque dei versi (carica entrante oppure uscente). Questo risultato suggerisce una certa cautela nell'uso del teorema di Gauss per la determinazione del campo elettrico.

4 Legge di Gauss: derivazione generale

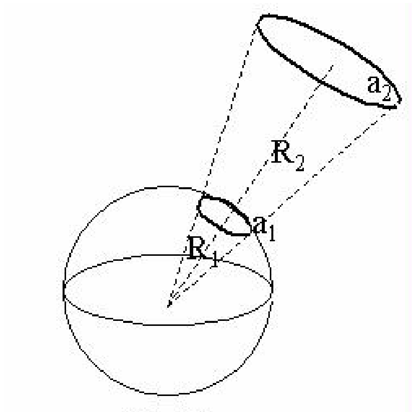
Per capire la prossima dimostrazione ed in generale il concetto di flusso attraverso una superficie di forma arbitraria, conviene introdurre la nozione di angolo solido. Ricordiamo che un angolo piano α, che sottende un arco s di di una circonferenza di raggio R, l'angolo, si può esprimere come

$$\alpha = \frac{s}{R}$$

con α misurato in radianti; per un angolo infinitesimo $d\alpha$ che sottende un arco infinitesimo ds, sulla stessa circonferenza, si può scrivere

$$d\alpha = \frac{ds}{R}$$

Questi concetti possono essere estesi agli angoli che si sviluppano, non su un piano ma nello spazio e che prendono il nome di *angoli solidi.*



Si definisce angolo solido Ω lo spazio compreso nella parte di cono in figura e la sua espressione matematica è

$$\Omega = \frac{a_1}{R_1^2} = \frac{a_2}{R_2^2}$$

Se l'angolo solido è infinitesimo, $d^2\Omega$, esso sottende un'area infinitesima d^2a e si può scrivere

$$d^2\Omega = \frac{d^2a}{R^2}$$

ovvero

$$d^2a = R^2 d^2\Omega$$

L'unità di misura degli angoli solidi si chiama *steradiante* e il valore di un angolo solido che sottende una sfera è 4π.

Si definisce flusso del campo $\mathbf{E}$ attraverso un'area infinitesima $d^2\mathbf{a}$, la quantità scalare

$$d\Phi\left(E\right) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a d^2a \tag{1}$$

Con l'ovvia generalizzazione, il flusso attraverso una superficie *finita* "a", sarà

$$\Phi_a\left(E\right) = \int_a d^2a\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a \tag{2}$$

mentre quello attraverso una superficie *chiusa* sarà:

$$\Phi_a\left(E\right) = \oint_a d^2a\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a \tag{3}$$

La legge di Gauss afferma che *il flusso del campo elettrostatico che attraversa una qualunque superficie chiusa è proporzianale alla carica elettrica contenuta nella superficie.* Più precisamente, si può provare che

$$\oint_a d^2a\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

qualunque sia la carica Q contenuta nella superficie chiusa. Dimostreremo questa legge, prima nell'ipotesi che vi sia una sola carica nella superficie chiusa.

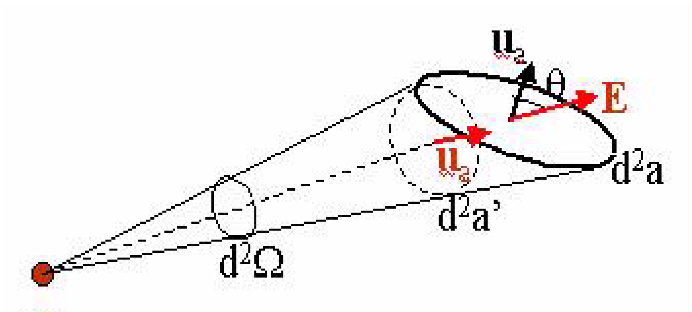
Focalizziamo la nostra attenzione su una parte infinitesima di tale superficie chiusa, sufficientemente piccola da essere considerata piatta; identifichiamo il solito versore $\mathbf{u}_a$ che ne individua la direzione (uscente dalla superficie in ogni punto di essa perché è chiusa). Possiamo costruire una sfera con il centro posto sulla carica e raggio R passante per la superficie infinitesima d^2a. Il campo elettrico, data la forma della forza di Coulomb, è radiale e quindi ortogonale ad una porzione infinitesima di superficie sferica di raggio R. Con d^2a' indicheremo la proiezione di d^2a sulla sfera di raggio R. Il flusso infinitesimo attraverso la superficie d^2a, del campo elettrico E si potrà allora scrivere

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a d^2a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_a d^2a \tag{5}$$

Ma

$$d^2a' = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_a d^2a \tag{6}$$

dove, d^2a' è la proiezione della superficie infinitesima d^2a nella direzione radiale e $\mathbf{u}_r$ è il versore del campo elettrico.



D'altra parte, per definizione di angolo solido, l'area proiettata sulla sfera si scrive:

$$d^2a' = R^2 d^2\Omega \tag{7}$$

Notiamo la dipendenza dell'area proiettata, dal quadrato della distanza radiale, cioè da una potenza che è esattamente uguale all'inverso della forza di Coulomb. Il risultato che troveremo dipende esclusivamente da questa incredibile coincidenza. Combinando le due ultime equazioni possiamo scrivere:

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_a d^2a = R^2 d^2\Omega \tag{8}$$

Usando la (8), la (5) diventa

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a d^2a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q d^2\Omega \tag{9}$$

Estendendo tale risultato a tutta la superficie chiusa avremo:

$$\oint_a d^2 a \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \oint_\Omega d^2\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{10}$$

dove, per l'ultimo passaggio, abbiamo usato il risultato che l'angolo solido di una sfera è 4π.

4.1 Il caso di N cariche

Se le particelle cariche contenute nella sfera sono N, per il principio di sovrapposizione, possiamo calcolare il flusso attraverso d^2a per ognuno dei campi prodotti da ciascuna carica separatamente. In altre parole, se indichiamo con $\mathbf{E}_1$ il campo della carica Q_1, con $\mathbf{E}_2$ il campo della carica Q_2 e con $\mathbf{E}_N$ il campo della carica Q_N potremo scrivere il flusso attraverso una superficie infinitesima, per ciascuna carica come segue

$$d\Phi\left(\mathbf{E}_1\right) = d^2 a \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_a \qquad d\Phi\left(\mathbf{E}_2\right) = d^2 a \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_a \qquad .... \qquad d\Phi\left(\mathbf{E}_N\right) = d^2 a \mathbf{E}_N \cdot \mathbf{u}_a$$

Il flusso di tutte le cariche, attraverso la stessa superficie infinitesima d^2a, sarà

$$d\Phi\left(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_N\right) = \sum_{n=1}^{N} d^2 a \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{u}_a$$

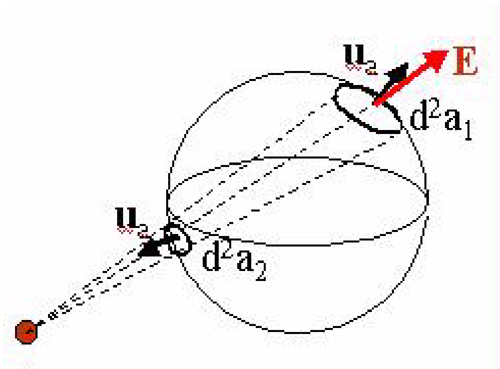
e il flusso di tutte le cariche attraverso la superficie chiusa, sarà:

$$\Phi_a\left(E\right) = \oint_a d^2 a \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{u}_a = \sum_{n=1}^{N} \oint_a d^2 a \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{u}_a = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{n=1}^{N} Q_n \tag{11}$$

dove, ovviamente, la somma è estesa solo alle cariche *interne* alla superficie.

4.2 Il caso di cariche esterne alla superficie

Per concludere la prova dobbiamo dimostrare ancora che il flusso attraverso una superficie chiusa è nullo se le cariche sono *esterne* alla superficie. Con riferimento alla figura seguente, supponiamo di avere una carica all'esterno di una superficie chiusa



Si vede che nel calcolo del flusso attraverso la superficie chiusa, l'angolo solido interseca sempre due porzioni della superficie chiusa. Poiché il campo ha sempre una direzione uscente da Q (supposta positiva) avremo due contributi al flusso, uno positivo e uno negativo:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_a d^2a_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_1^2}\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_a d^2a_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_1^2}d^2a_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_1^2}R_1^2 d^2\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Qd^2\Omega$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_a d^2a_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2^2}\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_a d^2a_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2^2}d^2a_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2^2}R_2^2 d^2\Omega = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}Qd^2\Omega$$

dove R_1 e R_2 sono i raggi delle sfere di Gauss passanti per le superfici d^2a_1 e d^2a_2 rispettivamente. Ciascuno dei due angoli solidi elementari dovrà essere integrato su una semisfera e varrà 2π; quindi la somma dei due contributi sarà zero. Se si ripetono queste considerazioni per altre cariche esterne, si ritroverà sempre il risultato nullo e questo completa la prova del teorema di Gauss.

Come abbiamo detto nell'introduzione al capitolo, il teorema di Gauss è, in realtà, una legge fondamentale dell'elettromagnetismo e sebbene noi non lo proveremo, essa vale anche quando le cariche sono in moto.

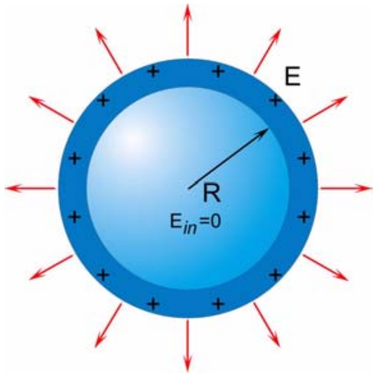
5 Esempi

Il teorema di Gauss è un utile strumento di calcolo del campo elettrico, ma solo nel caso in cui il problema in esame presenti speciali simmetrie. Mostreremo di seguito alcuni semplici esempi del suo utilizzo.

Esempio 1: Il campo di un *guscio sferico carico.*

Distingueremo due casi: il campo all'*interno* della sfera cava (il raggio della sfera sarà indicato con R) ed il campo all'*esterno* della stessa. Il problema del valore del campo *sulla superficie* verrà affrontato più avanti.

Possiamo immediatamente affermare che il campo elettrico all'interno della sfera cava è nullo. Infatti, applicando il teorema di Gauss ad una qualunque sfera, di raggio r inferiore ad R, troviamo che non essendoci cariche all'interno il flusso sarà nullo. Poiché il risultato non dipende dalle dimensioni della sfera (purché il suo raggio sia inferiore al raggio del guscio) dobbiamo convenire che il campo è identicamente nullo all'interno del guscio.



Per i punti esterni procediamo nel modo seguente. Sia P un punto che disti r dal centro del guscio. Per ragioni di simmetria la direzione del campo in P sarà diretta lungo la congiungente il centro del guscio ed il punto P. Se in P vi è una carica positiva di prova (ricordiamo che la carica di prova è sempre positiva, per definizione) il verso del campo sarà uscente se il guscio è carico positivamente mentre sarà entrante se il guscio è carico negativamente. Quindi $\mathbf{E} = E\mathbf{u}_r$. Per determinare l'intensità del campo prendiamo una sfera di raggio r e centro nel punto centrale del guscio. Sia Q la carica totale del guscio. Il flusso si può calcolare in maniera semplice:

$$\oint_a d^2a\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a = E_r 4\pi r^2$$

ed il teorema di Gauss diventa

$$E_r 4\pi r^2 = \pm\frac{Q}{\epsilon_0}$$

da cui

$$E_r = \pm\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{E1}$$

dove il segno dipende dal segno della carica. Il campo elettrostatico all'*esterno* del guscio, è pari al campo che si avrebbe se tutta la carica del guscio fosse concentrata nel centro della sfera (analogo risultato è vero per il campo gravitazionale!).

Esempio 2: Determinare il campo di una *sfera isolante uniformemente piena.*

Supponiamo di dividere la sfera piena in tanti gusci sferici. Per il calcolo del campo, *nei punti esterni*, se dQ è la carica contenuta in un guscio generico, si otterrà

$$dE_r = \pm\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}$$

dove r è la distanza dal centro della sfera (dobbiamo immaginare tutta la carica dQ nel centro della sfera). Per ottenere il campo di tutta la sfera piena basterà integrare ambo i membri:

$$\int dE_r = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\int dQ$$

da cui

$$E_r = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{E2}$$

Il campo elettrico all'esterno della sfera piena è uguale al campo coulombiano che si otterrebbe se tutta la carica della sfera fosse concentrata nel centro della stessa.

Calcoliamo il campo in un *punto interno* alla sfera piena.

Per calcolare il campo in un punto P interno alla sfera, che disti r dal suo centro dobbiamo solo considerare le cariche contenute nella sfera di Gauss di raggio r. Per determinare la carica contenuta in tale sfera procediamo come segue. La densità uniforme di tutta la sfera è

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} \tag{E3}$$

Questa è anche la densità della sfera di Gauss, per cui la carica contenuta nella sola sfera di Gauss di raggio r è

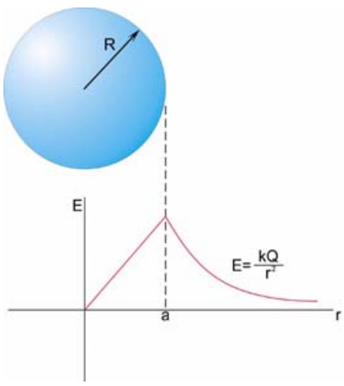
$$Q_r = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}\frac{4\pi r^3}{3} = Q\frac{r^3}{R^3} \tag{E4}$$

Il campo prodotto da tale carica è

$$E_r = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}Q\frac{r^3}{R^3} = \pm \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}r = \pm \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r \tag{E5}$$

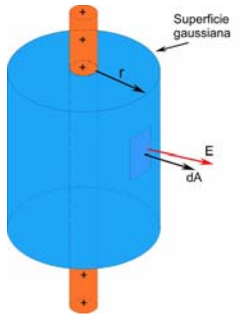
Il campo, nei punti interni, è *proporzionale alla distanza dal centro.*

In definitiva, il campo nei punti esterni e interni ha il seguente andamento in funzione di r:



Esempio 3: Determinare il campo di una *distribuzione lineare rettilinea.*

Ci proponiamo di calcolare il campo elettrico ad una distanza r da una distribuzione lineare rettilinea (filo rettilineo). Supporremo che la carica sia uniformemente distribuita con una densità di carica ρ_l e che il filo sia lungo L (il campo va calcolato nei punti non vicini alle estremità del filo (ipotesi di filo infinito!). Per ragioni di simmetria il campo è ortogonale al filo e per il verso vale lo stesso discorso fatto per il guscio sferico. Per calcolare l'intensità del campo immaginiamo un cilindro, di lunghezza $l \ll L$, con asse coincidente con il filo e raggio pari ad r.



ll flusso, essendo nullo quello attraverso le basi del cilindro, sarà semplicemente

$$\Phi_a^E = E_r 2\pi r l$$

mentre la carica contenuta nel cilindro sarà $\rho_l l$. Il teorema di Gauss si scriverà:

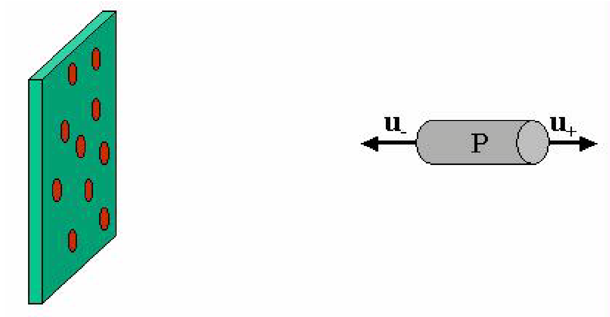
$$2\pi r l E_r = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0}$$

da cui

$$E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{E6}$$

Esempio 4: Il campo prodotto da una *distribuzione piana.*

Supponiamo di avere una superficie piana uniformemente distribuita con densità superficiale ρ_a. Per ragioni di simmetria il campo è ortogonale al piano (nei punti lontano dai bordi). Per calcolare l'intensità in un punto generico P, che disti r dal piano, condideriamo un cilindretto che contenga il punto P in esame, il cui asse sia ortogonale al piano.



Poiché non c'è carica nello spazio il flusso attraverso il cilindretto è nullo. Indicando con $\mathbf{u}_+$ il versore della superficie della base del cilindretto più lontana dal piano e con $\mathbf{u}_-$ quello dell'altra base, il flusso può essere calcolato esplicitamente in maniera semplice (il flusso attraverso la superficie laterale è nullo per l'ortogonalità tra il campo ed i versori di superficie) ed il teorema di Gauss diventa

$$\Phi_a^E = (\mathbf{E}_+ \cdot \mathbf{u}_+ + \mathbf{E}_- \cdot \mathbf{u}_-)\, a = 0$$

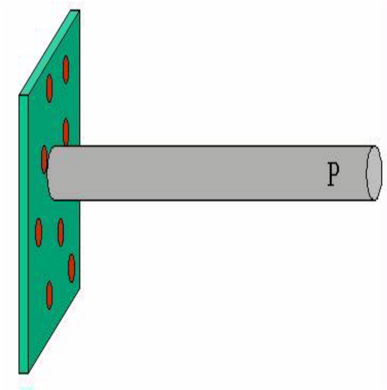
dova "a" è il valore delle due superfici di base del cilindro. Inoltre E_+ ed E_- indicano i valori del campo sulle due basi. Poiché il campo ha sempre lo stesso verso, sulle due basi, mentre i versori delle due basi sono uguali e contrari (si ricordi che per una superficie chiusa i versori sono sempre scelti uscenti!) dalla precedente equazione deduciamo che

$$E_+ = E_-$$

In tutto il semipiano in cui abbiamo costruito il cilindretto, essendo quest'ultimo del tutto arbitrario nelle sue dimensioni possiamo concludere che il campo elettrostatico è costante ovunque:

$$E = costante$$

Per determinare il valore costante del campo immaginiamo il cilindretto esteso fino al piano ove è distribuita la carica, con una delle due basi coincide con una porzione di tale piano.



Il teorema di Gauss diventa ora

$$(\mathbf{E}_+ \cdot \mathbf{u}_+ + \mathbf{E}_- \cdot \mathbf{u}_-)\, a = \frac{\rho_a a}{\epsilon_0}$$

da cui

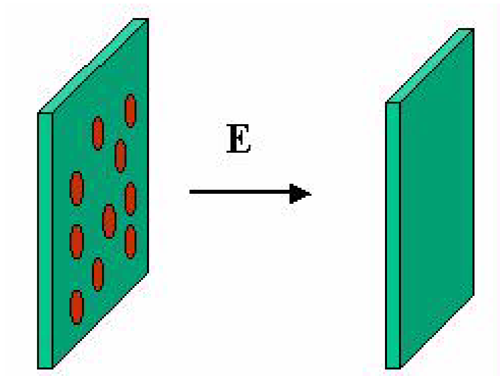
$$\pm 2E = \frac{\rho_a}{\epsilon_0}$$

Il segno "+" vale se la carica sul piano è positiva ed il segno "-" in caso contrario. Per l'intensità del campo possiamo scrivere

$$E = \frac{|\rho_a|}{2\epsilon_0} \tag{E7}$$

Esempio 5: Il campo tra *due piani paralleli con carica opposta.*

Il precedente risultato consente di derivare immediatamente il campo tra due piani paralleli carichi, con una distribuzione superficiale uniforme ma opposta.



Il piano caricato positivamente genera un campo uniforme e costante tra le due "armature" (così vengono chiamati i due piani paralleli), la cui intensità è data

$$E = \frac{|\rho_a|}{2\epsilon_0}$$

ed il cui verso si allontana dal piano con carica positiva. Il piano caricato negativamente genera un campo costante la cui intensità è ancora data dalla (E7), ed il cui verso è diretto verso il piano con carica negativa. I due campi si sommano in ogni punto e avendo la stessa direzione daranno luogo ad un campo la cui intensità è

$$E = \frac{|\rho_a|}{\epsilon_0} \tag{E8}$$

Il verso del campo, tra i due piani, è nella direzione uscente dal piano carico positivamente. Notiamo che la forza esercitata da un'armatura sull'altra è

$$|\mathbf{F}| = \frac{\rho_a}{2\epsilon_0} Q \tag{i}$$

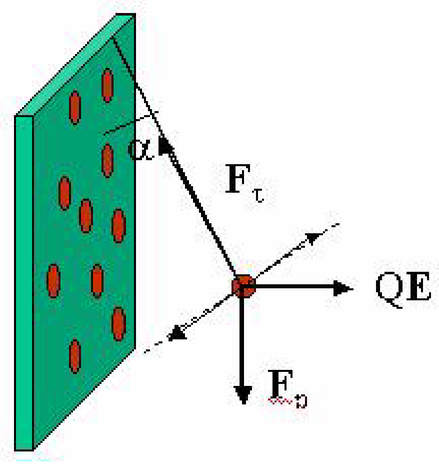
Poiché,

$$\rho_a a = Q$$

segue

$$|\mathbf{F}| = \frac{Q^2}{2a\epsilon_0} \tag{l}$$

Esempio 6: Una piccola sfera di massa $M = 0,1g$ e carica $Q = 10^{-9}C$ è appesa con un filo di lunghezza $l = 10cm$ ad un piano verticale infinito che possiede una densità di carica superficiale pari a $\rho_a = 10^{-5}C/m^2$. Calcolare l'angolo α che il filo forma con la verticale.



Il campo prodotto dal piano è

$$E = \frac{|\rho_a|}{2\epsilon_0}$$

Sulla carica agiscono tre forze: la forza peso $\mathbf{F}_p$, la forza elettrica generata dal piano $Q\mathbf{E}$ e la tensione del filo $\mathbf{F}_\tau$. All'equilibrio, si ha

$$\mathbf{F}_p + Q\mathbf{E} + \mathbf{F}_\tau = 0$$

Se si proietta tale equazione lungo la direzione ortogonale al filo si ottiene

$$-Mg \sin\alpha + QE \cos\alpha = 0$$

da cui

$$\tan\alpha = \frac{QE}{Mg} = \frac{Q}{Mg}\frac{|\rho_a|}{2\epsilon_0}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\tan\alpha = 0,577 \qquad \alpha = 29°59'$$