Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 21/1/2011 – ore 9

Esercizio 1 Posto $A = \{$si estraggono 2 biglie bianche ed 1 nera$\}$ e $B = \{$la prima estratta è bianca$\}$, si ha che l'evento A è individuato dalle sequenze {(b,n,b),(b,b,n),(n,b,b)} mentre l'evento $A \cap B$ è individuato dalle sequenze {(b,n,b),(b,b,n)}.

(i) Nel caso di estrazioni con rimpiazzamento risulta

$$P(A) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{3}{8}, \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{8},$$

e quindi

$$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A) = \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3}.$$

(ii) Nel caso di estrazioni senza rimpiazzamento si ha

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{9}{20}, \qquad P(A \cap B) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{10},$$

e quindi

$$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A) = \frac{3/10}{9/20} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 2 Si ha

ω	X	Y
0 0 0 1	1	1
0 0 1 0	1	0
0 0 1 1	2	1
0 1 0 0	1	0
0 1 0 1	2	1
0 1 1 0	2	0
0 1 1 1	3	1
1 0 0 0	1	0
1 0 0 1	2	1
1 0 1 0	2	0
1 0 1 1	3	1
1 1 0 0	2	0
1 1 0 1	3	1
1 1 1 0	3	0
1 1 1 1	4	1

(i) Distribuzioni congiunta e marginali sono date da:

$x \backslash y$	0	1	$p_X(x)$
1	3/15	1/15	4/15
2	3/15	3/15	6/15
3	1/15	3/15	4/15
4	0	1/15	1/15
$p_Y(y)$	7/15	8/15	1

(ii) $p(4,0) = 0 \neq p_X(4)\, p_Y(0) = \frac{1}{15} \cdot \frac{7}{15}$, quindi X e Y non sono indipendenti;

(iii) Risulta

$$E(X) = \frac{4}{15} + 2\frac{6}{15} + 3\frac{4}{15} + 4\frac{1}{15} = \frac{32}{15}, \qquad E(Y) = \frac{8}{15},$$
$$E(XY) = \frac{1}{15} + 2\frac{3}{15} + 3\frac{3}{15} + 4\frac{1}{15} = \frac{20}{15}.$$

Pertanto
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{20}{15} - \frac{32}{15}\frac{8}{15} = \frac{44}{225}.$$

Inoltre
$$E(X^2) = \frac{4}{15} + 4\frac{6}{15} + 9\frac{4}{15} + 16\frac{1}{15} = \frac{80}{15}, \qquad E(Y^2) = \frac{8}{15},$$

e quindi

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{176}{225}, \qquad Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{56}{225}.$$

In conclusione
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{44}{\sqrt{176 \cdot 56}} \approx 0{,}44.$$

Esercizio 3 (i) Essendo Y esponenziale di valore medio 1, risulta $F_Y(y) = 1 - \mathrm{e}^{-y}$ per $y \geq 0$ e $F_Y(y) = 0$ altrimenti. Quindi, in virtù dell'ipotesi di indipendenza, si ha

$$\begin{aligned}
&P(\{X \leq 6\} \cup \{Y \leq 2\}) = P(X \leq 6) + P(Y \leq 2) - P(\{X \leq 6\} \cap \{Y \leq 2\}) \\
&= P(X \leq 6) + P(Y \leq 2) - P(X \leq 6)P(Y \leq 2) \\
&= P\left(\frac{X-1}{5} \leq \frac{6-1}{5}\right) + F_Y(2) - P\left(\frac{X-1}{5} \leq \frac{6-1}{5}\right) \cdot F_Y(2) \\
&= \Phi(1) + (1 - \mathrm{e}^{-2}) - \Phi(1)\,(1 - \mathrm{e}^{-2}) = 0{,}8413 + 0{,}8646 - 0{,}8413 \cdot 0{,}8646 = 0{,}978.
\end{aligned}$$

(ii) Si ha

$$\begin{aligned}
&P(\{X \leq 6\} \cap \{Y \leq 2\} \,|\, \{X \leq 13\} \cap \{Y \leq 4\}) \\
&\quad = \frac{P(\{X \leq 6\} \cap \{Y \leq 2\} \cap \{X \leq 13\} \cap \{Y \leq 4\})}{P(\{X \leq 13\} \cap \{Y \leq 4\})} \\
&\quad = \frac{P(X \leq 6)\,P(Y \leq 2)}{P(X \leq 13)\,P(Y \leq 4)} \\
&\quad = \frac{\Phi(1) \cdot F_Y(2)}{\Phi(2{,}4) \cdot F_Y(4)} = \frac{\Phi(1) \cdot (1 - \mathrm{e}^{-2})}{\Phi(2{,}4) \cdot (1 - \mathrm{e}^{-4})} = \frac{0{,}8413 \cdot 0{,}8646}{0{,}9918 \cdot 0{,}9816} = 0{,}7471.
\end{aligned}$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 3/2/2011 – ore 9

Esercizio 1 Lanciando quattro monete, lo spazio campionario S risulta costituito dalle 2^4 sequenze di seguito elencate:

ω	ω
T T T T	C T T T
T T T C	C T T C
T T C T	C T C T
T T C C	C T C C
T C T T	C C T T
T C T C	C C T C
T C C T	C C C T
T C C C	C C C C

(i) Posto $H_k = \{\text{esce testa } k \text{ volte}\}$ si ha che

$$H_0 = \{(CCCC)\}, \qquad H_1 = \{(CCCT), (CCTC), (CTCC), (TCCC)\},$$

$$H_2 = \{(TTCC), (TCTC), (TCCT), (CTTC), (CTCT), (CCTT)\},$$
$$H_3 = \{(TTTC), (TTCT), (TCTT), (CTTT)\}, \qquad H_4 = \{(TTTT)\}.$$

Pertanto $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$, ossia gli eventi H_i sono incompatibili, e $\cup_{i=0}^4 H_i = S$ e quindi gli eventi H_i sono necessari.

(ii) Risulta

$$P(H_k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \frac{1}{16}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Posto $A = \{\text{nei primi due lanci esce lo stesso risultato}\}$, si ha

$$P(A \,|\, H_k) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(H_k)}$$

e quindi $P(A \,|\, H_0) = \frac{1/16}{1/16} = 1$, $P(A \,|\, H_1) = \frac{2/16}{4/16} = \frac{1}{2}$, $P(A \,|\, H_2) = \frac{2/16}{6/16} = \frac{1}{3}$, $P(A \,|\, H_3) = \frac{2/16}{4/16} = \frac{1}{2}$, $P(A \,|\, H_4) = \frac{1/16}{1/16} = 1$, essendo

$$A \cap H_0 = H_0 = \{(CCCC)\}, \qquad A \cap H_1 = \{(CCCT), (CCTC)\},$$

$$A \cap H_2 = \{(TTCC), (CCTT)\}, \qquad A \cap H_3 = \{(TTTC), (TTCT)\},$$
$$A \cap H_4 = H_4 = \{(TTTT)\}.$$

(iii) Si ha

$$P(H_k \,|\, A) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(A)}$$

e quindi $P(H_0 \,|\, A) = \frac{1/16}{1/2} = \frac{1}{8}$, $P(H_1 \,|\, A) = \frac{2/16}{1/2} = \frac{1}{4}$, $P(H_2 \,|\, A) = \frac{2/16}{1/2} = \frac{1}{4}$, $P(H_3 \,|\, A) = \frac{2/16}{1/2} = \frac{1}{4}$, $P(H_4 \,|\, A) = \frac{1/16}{1/2} = \frac{1}{8}$, essendo

$$P(A) = \sum_{k=0}^{4} P(A \cap H_k) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2 (i) Essendoci $\binom{4}{2} = 6$ modi di scegliere i 2 vertici da colorare di blu, risulta

$x\backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	0	2/6	1/6	1/2
1	1/6	2/6	0	1/2
$p_Y(y)$	1/6	4/6	1/6	1

(ii) $p(0,0) = 0 \neq p_X(0)\, p_Y(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$, quindi X e Y non sono indipendenti;

(iii) Risulta

$$E(X) = \frac{1}{2}, \qquad E(Y) = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = 1 \qquad E(X \cdot Y) = \frac{2}{6}.$$

Pertanto

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Inoltre $E(X^2) = \frac{1}{2}$, $\qquad E(Y^2) = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$, e quindi

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{4}, \qquad Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{3}.$$

In conclusione

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{-1/6}{\sqrt{1/12}} \approx -0{,}577.$$

Esercizio 3 (i) Essendo $E(X) = E(Y) = 1$ e $Var(X) = Var(Y) = 4$, si ha

$$E(T) = 2E(X) - E(Y) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0,$$
$$Var(T) = 4Var(X) + Var(Y) = 16 + 4 = 20.$$

(ii) La variabile T ha distribuzione normale di valore medio 0 e varianza 20, pertanto

$$P(T > 0) = P(T/\sqrt{20} > 0) = P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) = 0{,}5,$$
$$P(T > 1) = P(T/\sqrt{20} > 1/\sqrt{20}) = P(Z > 1/\sqrt{20}) = 1 - \Phi(0{,}22) = 0{,}4129.$$

(iii) Essendo X e Y variabili indipendenti, si ha $Cov(X,Y) = 0$ e quindi

$$Cov(T,X) = 2\,Cov(X,X) - Cov(X,Y) = 2\,Var(X) = 8.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 18/2/2011 – ore 9

Esercizio 1 Posto $B_i = \{$si ha una biglia bianca all'estrazione i-esima$\}$, $i = 1, 2, 3$, risulta
(i)

$$P(\overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \overline{B_3}) = 1 - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 1 - P(B_1)P(B_2 \,|\, B_1)P(B_3 \,|\, B_1 \cap B_2)$$
$$= 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 0{,}9167;$$

(ii)

$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \overline{B_1}) = P(B_1)P(B_2 \,|\, B_1) + P(\overline{B_1})P(B_2 \,|\, \overline{B_1})$$
$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{6} + \frac{15}{56} = \frac{73}{168} = 0{,}4345;$$

(iii)
$$P(\overline{B_1} \,|\, \overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \overline{B_3}) = \frac{P(\overline{B_1})}{P(\overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \overline{B_3})} = \frac{5/8}{11/12} = \frac{15}{22} = 0{,}6818.$$

Esercizio 2 (i) $|S| = \binom{5}{2} = 10$.
(ii)

ω	X	Y
00011	4	5
00101	3	5
01001	2	5
10001	1	5
00110	3	4
01010	2	4
10010	1	4
01100	2	3
10100	1	3
11000	1	2

$x \backslash y$	2	3	4	5	$p_X(x)$
1	1/10	1/10	1/10	1/10	4/10
2	0	1/10	1/10	1/10	3/10
3	0	0	1/10	1/10	2/10
4	0	0	0	1/10	1/10
$p_Y(y)$	1/10	2/10	3/10	4/10	1

(iii) $p(2, 2) = 0 \neq p_X(2)\, p_Y(2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10}$, quindi X e Y non sono indipendenti;

(iv)

$$E(XY) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{6}{10} + \frac{8}{10} + \frac{10}{10} + \frac{12}{10} + \frac{15}{10} + \frac{20}{10} = \frac{17}{2},$$

$$E(X) = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} + \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 2, \quad E(Y) = \frac{2}{10} + \frac{6}{10} + \frac{12}{10} + \frac{20}{10} = 4.$$

Pertanto
$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{17}{2} - 4 \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3 Si ha $\overline{X} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i$ e quindi
(i)

$$E(\overline{X}) = \mu = 6, \qquad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{25} = \frac{4}{25} = 0{,}16.$$

(ii) Dal teorema del limite centrale segue, per Z variabile normale standard,

$$P(\overline{X} \geq 7) = P\left(\frac{\overline{X} - 6}{\sqrt{4/25}} \geq \frac{7-6}{\sqrt{4/25}}\right) \approx P\left(Z \geq \frac{5}{2}\right) = 1 - \Phi(2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062.$$

(iii) Facendo uso della disuguaglianza di Markov si ha

$$P(\overline{X} \geq 7) \leq \frac{E(\overline{X})}{7} = \frac{6}{7} = 0{,}8571.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 4/4/2011 – ore 15

Esercizio 1 Essendo $P(A) = 0{,}4$ e $P(A \cup B) = 0{,}6$ risulta:
(i) Se A e B sono incompatibili allora $P(A \cap B) = 0$ e quindi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Segue che $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2$.
(ii) Se A e B sono indipendenti allora $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ e quindi, ricordando che $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si ha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

ossia $0{,}6 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}4 \cdot P(B)$, da cui segue $P(B) = 0{,}2/0{,}6 = 1/3$.
(iii) Se $P(A|B) = 0{,}2$ allora risulta $P(A \cap B)/P(B) = 0{,}2$ e pertanto si ha
$P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}2 \cdot P(B)$ ossia $0{,}4 + P(B) - 0{,}6 = 0{,}2 \cdot P(B)$ da cui segue $0{,}8 \cdot P(B) = 0{,}2$ ed infine $P(B) = 1/4$.

Esercizio 2 (i) La funzione $F(x)$ assegnata è continua e non decrescente se e solo se $\alpha > 0$.
(ii) La densità di X è data da $f(x) = \dfrac{2\alpha x}{(x^2+\alpha)^2}$ per $x \geq 0$, e $f(x) = 0$ altrimenti.
(iii) La mediana è data dal valore m tale che

$$1 - \frac{\alpha}{m^2+\alpha} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{m^2+\alpha} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = \alpha \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{\alpha}.$$

(iv) Risulta

$$P(X > 1/2 \,|\, X > 1/4) = \frac{P(X > 1/2)}{P(X > 1/4)} = \frac{1 - F(1/2)}{1 - F(1/4)} = \frac{\frac{\alpha}{(1/2)^2+\alpha}}{\frac{\alpha}{(1/4)^2+\alpha}} = \frac{1/16+\alpha}{1/4+\alpha}$$

Esercizio 3 (i) Si ha

$$p(x,y) = \frac{\binom{1}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{3-x-y}}{\binom{6}{3}}, \quad x = 0,1; \;\; y = 0,1,2.$$

Quindi:

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	1/20	6/20	3/20	1/2
1	3/20	6/20	1/20	1/2
$p_Y(y)$	1/5	3/5	1/5	1

(ii) X e Y non sono indipendenti, in quanto ad esempio

$$p(0,0) = \frac{1}{20} \neq p_X(0)\, p_Y(0) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

(iii) X è di Bernoulli di parametro 1/2; quindi risulta $E(X) = 1/2$ e $Var(X) = 1/4$. Inoltre:

$$E(Y) = 1; \qquad E(Y^2) = \frac{7}{5}; \qquad Var(Y) = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}; \qquad E(X \cdot Y) = \frac{2}{5}.$$

Pertanto:

$$\rho(X,Y) = \frac{E(X \cdot Y) - E(X)\,E(Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{2}1}{\sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{2}{5}}} = \frac{-1/10}{1/\sqrt{10}} = -1/\sqrt{10} = -0{,}3162.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 15/6/2011 – ore 9

Esercizio 1 (i) Nell'esperimento che consiste nell'effettuare 3 lanci a caso di un dado, avendo posto $D_k = \{$nei 3 lanci esce k volte un numero dispari$\}$, $0 \le k \le 3$, e $A = \{$nel primo lancio esce un numero dispari$\}$, risulta che gli eventi D_0, D_1, D_2, D_3 sono necessari e incompatibili, essendo $D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 = S$ e $D_i \cap D_j = \emptyset$ per $i \neq j$.
(ii) Si ha:

$$P(D_k) = \binom{3}{k} \frac{1}{8}, \qquad 0 \le k \le 3, \qquad P(A|D_k) = \frac{\binom{2}{k-1}}{\binom{3}{k}} = \frac{k}{3}, \qquad 0 \le k \le 3,$$

(iii) Quindi $P(A) = \sum_{k=0}^{3} P(A|D_k)\, P(D_k) = \sum_{k=0}^{3} \frac{k}{3} \binom{3}{k} \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$ e pertanto:

$$P(D_k|A) = \frac{P(A|D_k)\, P(D_k)}{P(A)} = \frac{k}{3} \binom{3}{k} \frac{1}{8}\, \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \binom{2}{k-1}, \qquad 0 \le k \le 3,$$

ossia $P(D_0|A) = 0$, $P(D_1|A) = 1/4$, $P(D_2|A) = 1/2$, $P(D_3|A) = 1/4$.

Esercizio 2 (i) I valori ammissibili per α si ricavano imponendo $f(x) \ge 0$ $\forall x$ reale e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Pertanto deve essere $\alpha > 0$ e $\int_{-1}^{2} \alpha\, x^2\, dx = \alpha (x^3/3)_{-1}^{2} = \alpha(8/3 + 1/3) = 3\alpha = 1$; pertanto $\alpha = 1/3$.
(ii) La funzione di distribuzione $F(x) = P(X \le x)$ si ricava ricordando che $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$, e quindi $F(x) = (1/3) \int_{-1}^{x} t^2\, dt = (t^3/9)_{-1}^{x} = (x^3 + 1)/9$ per $-1 < x < 2$.
(iii) $E(X)$ è dato da $E(X) = (1/3) \int_{-1}^{2} x^3 dx = (1/3)(x^4/4)_{-1}^{2} = (1/3)(4 - 1/4) = 15/12$.
(iv) Notiamo che $P(X > 1 \,|\, X > 0) = P(X > 1)/P(X > 0) = [1 - F(1)]/[1 - F(0)]$, e quindi $P(X > 1 \,|\, X > 0) = [1 - 2/9]/[1 - 1/9] = 7/8$.

Esercizio 3 Poiché X e Y sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, con

$$P(X = -1) = \frac{1}{2}, \qquad P(X = 0) = \frac{1}{4}, \qquad P(X = 1) = \frac{1}{4},$$

si ha $E(X) = -1/4$, $E(X^2) = 3/4$, e quindi $Var(X) = 3/4 - 1/16 = 11/16$.
(i) Posto $Z = X + Y$, si ha $E(Z) = E(X) + E(Y) = -1/2$ e $Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = 11/8$.
(ii) Posto $U = X \cdot Y$, si ha $E(U) = E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = (-1/4)^2$ e $Var(U) = Var(X \cdot Y)$. Poiché $U = X \cdot Y$ ha distribuzione $P(U = -1) = 1/4$, $P(U = 0) = 6/16$, $P(U = 1) = 5/16$, si ha $E(U) = 1/16$, $E(U^2) = 5/16$ e quindi $Var(U) = 79/256$.
(iii) Si ha $Cov(Z, X) = Cov(X + Y, X) = Cov(X, X) + Cov(Y, X) = Var(X) = 11/16$ essendo $Cov(Y, X) = 0$ per l'indipendenza di X e Y. Inoltre, $Cov(U, X) = Cov(X \cdot Y, X) = E(X^2 \cdot Y) - E(X \cdot Y)\, E(X) = [E(X^2) - E(X)^2] E(Y) = Var(X)\, E(Y) = (11/16)(-1/4) = -11/64$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 19/7/2011 – ore 9

Esercizio 1 Un'urna contiene 4 biglie numerate da 1 a 4. Se ne estraggono 3 a caso senza reinserimento. Lo spazio campionario contiene 4 terne di numeri: $S = \{123, 124, 134, 234\}$. Per $A = \{$una delle 3 biglie estratte ha numero 1 o 2$\}$, $B = \{$nessuna delle 3 biglie estratte ha numero 4$\}$, $C = \{$le 3 biglie estratte hanno numeri tra loro consecutivi$\}$ risulta
$P(A) = 2/4 = 1/2$, $P(B) = 1/4$, $P(C) = 2/4 = 1/2$.
Inoltre, $P(A \cap B) = 0$, $P(A \cap C) = 1/4$, $P(B \cap C) = 1/4$.
(i) Si ha $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/4$,
$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 3/4$,
$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 1/2$.
(ii) Per stabilire se gli eventi A, B, C sono indipendenti notiamo che
$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = 1/4 = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = 1/4 \neq P(B)P(C)$, $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$, quindi i tre eventi non sono indipendenti, mentre A e C lo sono.
(iii) Nel caso di estrazioni con reinserimento si ha: $P(A) = \binom{3}{1}(1/2)(1/2)^2 = 3/8$, $P(B) = (3/4)^3 = 27/64$, $P(C) = 3!(1/4)^3 + 3!(1/4)^3 = 12/64 = 3/16$.

Esercizio 2 Nell'esperimento che consiste nell'effettuare lanci a caso indipendenti di una moneta truccata (che ad ogni lancio mostra testa con probabilità $1-p$) la variabile aleatoria X che descrive il numero totale di volte che esce croce in n lanci ha distribuzione binomiale di parametri n e p.
(i) Quindi, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ per $k = 1, 2, \ldots, n$.
(ii) $E(Y) = E(X+1) = E(X) + 1 = np + 1$, $Var(Y) = Var(X+1) = Var(X) = np(1-p)$.
(iii) Per valutare il valore medio di $1/Y$ notiamo che

$$E(1/Y) = E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^j (1-p)^{n+1-j} \qquad (j = k+1)$$

$$= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p} \qquad \text{(per la formula del binomio, di Newton).}$$

Esercizio 3 (i) Si ha $E(\overline{X}) = E(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}) = \mu = 10$ e $Var(\overline{X}) = Var(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}) = \sigma^2/n = 9/36 = 1/4$.
(ii) Risulta, con Z variabile normale standard,

$$P(\overline{X} \geq 11) \approx P\left(Z \geq \frac{11-10}{1/2}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228.$$

(iii) Dalla disuguaglianza di Markov segue il limite superiore

$$P(\overline{X} \geq 11) \leq \frac{E(\overline{X})}{11} = 10/11 = 0,\overline{90}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 8/9/2011 – ore 9

Esercizio 1 Lo spazio campionario S risulta costituito dalle $\binom{5}{2} = 10$ possibili coppie.

(i) Risulta

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{10} + \frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{9}{10},$$
$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{4}{10} + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10},$$
$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{8}{10} + \frac{4}{10} - \frac{4}{10} = \frac{8}{10}.$$

(ii) Gli eventi A, B, C non sono indipendenti, essendo

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{8}{25},$$
$$P(B \cap C) = \frac{4}{10} \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{8}{25},$$
$$P(A \cap C) = \frac{1}{10} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{4}{25},$$
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{10} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{16}{125}.$$

Esercizio 2 (i) X ha distribuzione ipergeometrica, con densità discreta

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{5}{5-k}}{\binom{8}{5}} = \begin{cases} \frac{1}{56} & k = 0, \\ \frac{15}{56} & k = 1, \\ \frac{30}{56} & k = 2, \\ \frac{10}{56} & k = 3. \end{cases}$$

(ii) La funzione di distribuzione di X è pertanto:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{1}{56} & 0 \leq x < 1, \\ \frac{16}{56} & 1 \leq x < 2, \\ \frac{46}{56} & 2 \leq x < 3, \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

(iii) Risulta

$$E(X) = \frac{15}{56} + \frac{60}{56} + \frac{30}{56} = \frac{15}{8},$$

$$E(X^2) = \frac{15}{56} + \frac{120}{56} + \frac{90}{56} = \frac{225}{56},$$
$$Var(X) = \frac{225}{56} - \frac{225}{64} = \frac{225}{448}.$$

Quindi

$$E(Y) = E(X) - 1 = \frac{15}{8} - 1 = \frac{7}{8}, \qquad Var(Y) = Var(X) = \frac{225}{448}.$$

Esercizio 3 (i) Valore atteso e momento del secondo ordine di X_k sono:

$$\begin{aligned} E(X_k) &= \int_{k-1}^{k} x(1-k+x)\mathrm{d}x + \int_{k}^{k+1} x(1+k-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{k}^{k+1} (x-1)(x-k)\mathrm{d}x + \int_{k}^{k+1} x(1+k-x)\mathrm{d}x = k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_k^2) &= \int_{k-1}^{k} x^2(1-k+x)\mathrm{d}x + \int_{k}^{k+1} x^2(1+k-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{k}^{k+1} (x-1)^2(x-k)\mathrm{d}x + \int_{k}^{k+1} x^2(1+k-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6} + k^2, \end{aligned}$$

e quindi la varianza di X_k è

$$Var(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = \frac{1}{6}.$$

(ii) Risulta pertanto

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2},$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} Var(X_j) = \frac{1}{n^2}\frac{n}{6} = \frac{1}{6n}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 16/12/2011 – ore 9

Esercizio 1 Consideriamo gli eventi $A_k = \{$alla k-esima estrazione si ottiene una biglia rossa$\}$, $B_k = \{$alla k-esima estrazione si ottiene una biglia blu$\}$, $(k = 1, 2, 3)$, $C = \{$almeno una biglia estratta è rossa$\}$ e $D = \{$si estraggono 2 biglie rosse$\}$.

(i)

$$P(C) = 1 - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}875.$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{121}{324} = 0{,}3735. \end{aligned}$$

(iii) Essendo

$$P(B_2) = P(B_2 \,|\, A_1)P(A_1) + P(B_2 \,|\, B_1)P(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{36} = 0{,}5278,$$

si ha che

$$P(D \,|\, B_2) = \frac{P(A_1 \cap B_2 \cap A_3)}{P(B_2)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{19}{36}} = \frac{40}{171} = 0{,}2339.$$

Esercizio 2

(i) Deve essere $c > 0$ ed inoltre

$$\sum_{x=-1}^{2} c(1 + |x|) = 1.$$

Da queste condizioni si ricava $c = 1/8$.
(ii)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ 2/8 & -1 \le x < 0, \\ 3/8 & 0 \le x < 1, \\ 5/8 & 1 \le x < 2, \\ 1 & x \ge 2. \end{cases}$$

(iii)

$$E(X) = \sum_{x=-1}^{2} \frac{x}{8}(1 + |x|) = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

$$E(X^2) = \sum_{x=-1}^{2} \frac{x^2}{8}(1+|x|) = 2,$$

$$Var(X) = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{23}{16} = 1{,}4375.$$

Esercizio 3 Essendo $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = E(X) + \frac{1}{2}$ e, in virtù dell'ipotesi di indipendenza, $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 4 + Var(Y)$, si ottengono le seguenti equazioni

$$E(X) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad 4 + Var(Y) = \frac{49}{12},$$

che, risolte, forniscono i valori

$$E(X) = -1, \qquad Var(Y) = \frac{1}{12}.$$

Essendo Y una variabile uniforme nell'intervallo (a, b), di valore medio $E(Y) = \frac{1}{2}$ e varianza $Var(Y) = \frac{1}{12}$, deve essere poi

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Tale sistema ammette soluzione $a = 0$ e $b = 1$, e pertanto la funzione di distribuzione di Y è data da

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & 0 \le x < 1, \\ 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

(i)

$$P(X > 1, Y > 1/2) = P(X > 1)P(Y > 1/2) = P(Z > \frac{1-(-1)}{2})(1 - F_Y(1/2))$$
$$= (1 - \Phi(1))(1 - F_Y(1/2)) = (1 - 0{,}8413)(1 - 0{,}5) = 0{,}07935.$$

(iii)

$$P(X > 1/2, Y < 1 \,|\, X > 1, Y > 1/2) = \frac{P(X > 1, 1/2 < Y < 1)}{P(X > 1, Y > 1/2)}$$
$$= \frac{P(X > 1)(F_Y(1) - F_Y(1/2))}{P(X > 1)P(Y > 1/2)} = \frac{1 - 1/2}{1/2} = 1.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 19/12/2011 – ore 11

Esercizio 1 (i) Estrazioni con reinserimento; non si ha indipendenza, essendo:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{98}{125} = 0{,}784 \qquad P(B) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{13}{25} = 0{,}52$$

$$P(A \cap B) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{18}{125} + \frac{4}{25} = \frac{38}{125} = 0{,}304 \neq P(A)\,P(B).$$

(ii) Estrazioni senza reinserimento; non si ha indipendenza, essendo:

$$P(A) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{10} = 0{,}9 \qquad P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \neq P(A)\,P(B).$$

Esercizio 2 (i) Se X è normale, di valore medio $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$, si ha che $Z = (X-1)/2$ è normale standard; pertanto:

$$P(X > 0) = P\left(Z > -\frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(Z \leq -\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi(-0{,}5) = \Phi(0{,}5) = 0{,}6915$$

$$P(X < -1) = P\left(Z < -1\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

$$P(X > 0 | X > -1) = \frac{P(X > 0)}{P(X > -1)} = \frac{\Phi(0{,}5)}{\Phi(1)} = \frac{0{,}6915}{0{,}8413} = 0{,}8219$$

(ii) Se X è uniforme in (a, b), di valore medio $\mu = 1$ e tale che $P(X > 2) = 1/3$, si ha che

$$\mu = \frac{a+b}{2} = 1, \qquad P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2-a}{b-a} = \frac{1}{3};$$

risolvendo le equazioni si ricava: $a = -2$, $b = 4$. Pertanto $F(x) = \frac{x+2}{6}$ per $-2 \leq x \leq 6$, da cui segue:

$$P(X > 0) = 1 - F(0) = \frac{2}{3}$$

$$P(X < -1) = F(-1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X > 0 | X > -1) = \frac{P(X > 0)}{P(X > -1)} = \frac{2/3}{5/6} = \frac{4}{5}$$

Esercizio 3 (i) Imponendo che sia $p(x, y) \geq 0$ per $x, y = 0, 1, 2, 3$ e $0 \leq x + y \leq 3$, e che sia $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$ segue che $c = 1/20$.

(ii) Risulta quindi:

$x \backslash y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	4/20	3/20	2/20	1/20	10/20
1	3/20	2/20	1/20	0	6/20
2	2/20	1/20	0	0	3/20
3	1/20	0	0	0	1/20
$p_Y(y)$	10/20	6/20	3/20	1/20	1

Pertanto, essendo $p(0, 0) = 4/20 \neq p_X(0)\, p_Y(0)$ si ha che X e Y non sono indipendenti.

(iii) Si ha

$$E(X) = E(Y) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{3}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4},$$
$$E(XY) = \frac{2}{20} + \frac{2}{20} + \frac{2}{20} = \frac{6}{20}$$

e quindi

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{6}{20} - \frac{9}{16} = -\frac{21}{80}.$$

Essendo poi

$$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{6}{20} + \frac{12}{20} + \frac{9}{20} = \frac{27}{20},$$

e

$$Var(X) = Var(Y) = \frac{27}{20} - \frac{9}{16} = \frac{63}{80}$$

si ha infine

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-21/80}{63/80} = -\frac{21}{63} = -\frac{1}{3}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 19/12/2011 – ore 14

Esercizio 1 (i)

$$P(A_k) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

(ii)

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

(iii)

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \neq P(A_i)P(A_j) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}, \qquad \forall i \neq j.$$

Esercizio 2 (i) $F(x)$ è una funzione di distribuzione di variabile aleatoria continua se $\alpha > 0$.

(ii)

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha}{(x+\alpha)^2}, \qquad x > 0.$$

(iii)

$$F(m) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha + m} = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow m = \alpha.$$

(iv)

$$P(X > \alpha \,|\, X > \alpha/2) = \frac{P(X > \alpha)}{P(X > \alpha/2)} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 3 (i) Imponendo che sia $p(x, y) \geq 0$ per $x, y = 0, 1, 2, 3$ e $0 \leq x + y \leq 3$, e che sia $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$ segue che $c = 20$.

(ii) Risulta quindi:

$x \backslash y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	1/20	3/20	3/20	1/20	8/20
1	3/20	3/20	1/20	0	7/20
2	3/20	1/20	0	0	4/20
3	1/20	0	0	0	1/20
$p_Y(y)$	8/20	7/20	4/20	1/20	1

(iii) Si ha

$$E(X) = E(Y) = \frac{7}{20} + \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10},$$

$$E(XY) = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} + \frac{2}{20} = \frac{7}{20}$$

e quindi

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{7}{20} - \frac{81}{100} = -\frac{46}{100}.$$

Essendo poi

$$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{7}{20} + \frac{16}{20} + \frac{9}{20} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5},$$

e

$$Var(X) = Var(Y) = \frac{8}{5} - \frac{81}{100} = \frac{79}{100}$$

si ha infine

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = -\frac{46/100}{79/100} = -\frac{46}{79} = -0{,}5823.$$

(iii) Si ha

$$P(X+Y > 1) = p(0,2)+p(0,3)+p(1,1)+p(1,2)+p(2,0)+p(2,1)+p(3,0) = 3\cdot\frac{3}{20}+4\cdot\frac{1}{20} = \frac{13}{20},$$

$$P(X = Y) = p(0,0) + p(1,1) = \frac{1}{20} + \frac{3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$