Esercitazione

Regole di inferenza

Regole di inferenza per le dipendenze funzionali:

(IR1) (Reflexive rule)
Se $X \supseteq Y$ allora $X \rightarrow Y$

(IR2) (Augmentation rule)
$X \rightarrow Y \models XZ \rightarrow YZ$

(IR3) (Transitive rule)
$\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models X \rightarrow Z$

Regole di Armstrong

(IR4) (Decomposition or Projective rule)
$\{X \rightarrow YZ\} \models X \rightarrow Z$

(IR5) (Union (or additive) rule)
$\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models X \rightarrow YZ$

(IR6) (Pseudotransitive rule)
$\{X \rightarrow Y, WY \rightarrow Z\} \models WX \rightarrow Z$

Algoritmo per il calcolo di X^+ (chiusura di X – insieme di attributi)

$X^+ := X$;
repeat
    old$X^+ := X^+$;
    for each functional dependency $Y \rightarrow Z$ **in** F **do**
        if $X^+ \supseteq Y$ **then** $X^+ := X^+ \cup Z$;
until (old$X^+ = X^+$);

Chiusura dell'insieme delle DF
Dato un insieme di dipendenze funzionali F definite su R: definiamo come chiusura di F l'insieme di tutte le dipendenze funzionali implicate da F.

$$F^+ = \{X \rightarrow Y \mid F \Rightarrow X \rightarrow Y\}$$

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali
Definizione (copertura):
Un insieme F di dipendenze funzionali **copre** un altro insieme E di dipendenze funzionali, se ogni DF in E è presente anche in F^+, cioè se ogni dipendenza in E può essere inferita a partire da F.
Definizione (equivalenza):
Due insiemi E ed F di dipendenze funzionali sono *equivalenti* se $E^+ = F^+$; ossia E è equivalente ad F se sussistono entrambe le condizioni: E **copre** F e F **copre** E.

*Si può determinare se F **copre** E calcolando X^+ rispetto a F per ogni DF $X \rightarrow Y$ in E, e quindi verificando se questo X^+ comprende gli attributi presenti in Y.*

Algoritmo per trovare una copertura minimale G per F

1. *porre* G:= F;
2. rimpiazzare ogni dipendenza funzionale
   $X \rightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ in G, con **n** dipendenze funzionali $X \rightarrow A_1, X \rightarrow A_2, \ldots, X \rightarrow A_n$;
3. *per ogni* dipendenza funzionale $X \rightarrow A$ in G
   per ogni attributo B che è un elemento di X
   {
   se $\{ \{G - \{X \rightarrow A\} \} \cup \{ (X - \{B\}) \rightarrow A\} \}$ è equivalente a G *allora* sostituire $X \rightarrow A$ con $(X - \{B\}) \rightarrow A$ in G;
   }
4. *per ogni* dipendenza funzionale rimanente $X \rightarrow A$ in G
   {
   se $\{ G - \{X \rightarrow A\} \}$ è equivalente a G *allora* rimuovere $X \rightarrow A$ da G;
   }

Esercizio sul concetto di equivalenza

Dati due insiemi di dipendenze funzionali:

$\mathbf{F = \{ \{ A \} \rightarrow \{ C \}, \{ A, C \} \rightarrow \{ D \}, \{ E \} \rightarrow \{ A, D \}, \{ E \} \rightarrow \{ H \} \}}$

$\mathbf{G = \{ \{ A \} \rightarrow \{ C, D \}, \{ E \} \rightarrow \{ A, H \} \}}$

Verificare se F e G sono equivalenti.

Risposta (2 metodi differenti)

1) Dimostro che le dipendenze funzionali in F sono derivabili da quelle in G (G copre F), e viceversa.

- $\{ A \} \rightarrow \{ C, D \} \xRightarrow{\text{decomposizione}} \{ A \} \rightarrow \{ C \}, \{ A \} \rightarrow \{ D \}$
- $\{ A \} \rightarrow \{ C, D \} \xRightarrow{\text{arricchimento}} \{ A, C \} \rightarrow \{ C, C, D \} \Rightarrow \{ A, C \} \rightarrow \{ C, D \} \xRightarrow{\text{decomposizione}} \{ A, C \} \rightarrow \{ C \}, \{ A, C \} \rightarrow \{ D \}$
- $\{ E \} \rightarrow \{ A, H \} \xRightarrow{\text{decomposizione}} \{ E \} \rightarrow \{ A \}, \{ E \} \rightarrow \{ H \}$
- $\{ E \} \rightarrow \{ A \}, \{ A \} \rightarrow \{ D \} \xRightarrow{\text{transitiva}} \{ E \} \rightarrow \{ D \}$
- $\{ E \} \rightarrow \{ A \}, \{ E \} \rightarrow \{ D \} \xRightarrow{\text{additiva}} \{ E \} \rightarrow \{ A, D \}$

Viceversa (F copre G)

- $\{ A \} \rightarrow \{ C \}, \{ A, C \} \rightarrow \{ D \} \Rightarrow \{ A, A \} \rightarrow \{ D \} \Rightarrow \{ A \} \rightarrow \{ D \}, \{ A \} \rightarrow \{ C \} \Rightarrow \{ A \} \rightarrow \{ C, D \}$
- $\{ E \} \rightarrow \{ A, D \} \Rightarrow \{ E \} \rightarrow \{ A \}, \{ E \} \rightarrow \{ D \} \Rightarrow \{ E \} \rightarrow \{ A \}, \{ E \} \rightarrow \{ H \} \Rightarrow \{ E \} \rightarrow \{ A, H \}$

2) Verifico se ogni $X \rightarrow Y$ in F è implicata dalle dipendenze funzionali in G (G copre F), ossia se ogni $X \rightarrow Y$ è in G^+; ossia se $Y \subseteq (X)^{+G}$ (chiusura di X rispetto a G).

Per $\{ A \} \rightarrow \{ C \}$ risulta $\mathbf{(A)^{+G} = \{ A, C, D \}}$; quindi $\mathbf{C \subseteq (A)^{+G}}$

Per $\{ A, C \} \rightarrow \{ D \}$ risulta $\mathbf{(A, C)^{+G} = \{ A, C, D \}}$; quindi $\mathbf{D \subseteq (A, C)^{+G}}$

Per $\{ E \} \rightarrow \{ A, D \}$ risulta $\mathbf{(E)^{+G} = \{ E, A, D, C, H \}}$; quindi $\mathbf{A, D \subseteq (E)^{+G}}$

Per $\{ E \} \rightarrow \{ H \}$ risulta $\mathbf{(E)^{+G} = \{ E, H, A, D, C \}}$; quindi $\mathbf{H \subseteq (E)^{+G}}$

Viceversa (F copre G)

Per $\{ A \} \rightarrow \{ C, D \}$ risulta $\mathbf{(A)^{+F} = \{ A, C, D \}}$; quindi $\mathbf{C, D \subseteq (A)^{+F}}$

Per $\{ E \} \rightarrow \{ A, H \}$ risulta $\mathbf{(E)^{+F} = \{ E, A, D, H, C \}}$; quindi $\mathbf{A, H \subseteq (A, C)^{+F}}$

Quindi gli insiemi F e G sono equivalenti.

Esercizio su copertura minimale

Trovare la copertura minimale della relazione universale **R = { p, c, l, a, pr, t }** date un insieme di dipendenze funzionali: **F = { p → c l a pr t, cl → p a pr t, c → t, a → pr }**

Step 1: G = F.
Step 2: G = { p→c; p→l; p→a; p→pr; p→t;
c l→p; c l→a; c l→pr; c l→t;
c→t;
a→pr }

Step 3: Rimuovere un attributo dal lato sinistro delle dipendenze funzionali con attributi multipli cioè **c l→p; c l→a; c l→pr; c l→t.** Each such removal will result in a new set of functional dependencies, G'. **Since G' always covers G, what is left is to show that G covers G'.**

3.a. (Removing attribute c from c l →p) Show that l→p can be derived from G. (no)
3.b. (Removing attribute l from c l→p) Show that c→p can be derived from G. (no)
3.c. (Removing attribute c from c l→a) Show that l→a can be derived from G. (no)
3.d. (Removing attribute l from c l→a) Show that c→a can be derived from G. (no)
3.e. (Removing attribute c from c l→pr) Show that l→pr can be derived from G. (no)
3.f. (Removing attribute l from c l→pr) Show that c→pr can be derived from G. (no)
3.g. (Removing attribute c from c l→t) Show that l→t can be derived from G. (no)
3.h. **(Removing attribute l from c l→t) Show that c→t can be derived from G.**

Alla fine si ottiene:
G = { p→c; p→l; p→a; p→pr; p→t;
c l→p; c l→a; c l→pr; **c→t;**
c→t; a→pr }

Step 4: Check each of the functional dependencies in G to see if it can be removed. Each such removal results in a new set of functional dependencies, G'. **Since G always covers G', the job left for us to do is to show that G' covers G.**

4.a. Can p→c be removed? (no)
4.b. Can p→l be removed? (no)
4.c. Can c l→a be removed? (yes, because c l→p and p→a)
4.d. Can p→a be removed? (no)
4.e. Can p→pr be removed? (yes, because p→a and a→pr)
4.f. Can p→t be removed? (yes, because p→c and c→t)
4.g. Can c l→p be removed? (no)
4.h. Can c l→pr be removed? (yes, because c l→p and p→pr)
4.i. Can c→t be removed? (yes, because of redundancy in the set)
4.j. Can c→t be removed? (no)
4.k. Can a→pr be removed? (no)

Alla fine si ottiene:
G = { p→c; p→l; p→a; p→pr; p→t;
c l→p; c l→a; c l→pr; c→t;
c→t;
a→pr }

Quindi **G = { p→c; p→l; p→a; c l→p; c→t; a→pr}** è la copertura minimale che copre F.

Esercizio di copertura minimale

Find a minimal cover of: F = {AB→D, B→C, AE→B, A→D, D→EF}

Step 1. Make right hand sides atomic

G = {AB→D, B→C, AE→B, A→D, D→E, D→F}

Step 2. Remove any redundant FDs *

- For AB→D compute AB^+ under (G – (AB→D))

  AB^+ = ABCDEF

  D in AB^+ so remove AB→D from G

  G = {B→C, AE→B, A→D, D→E, D→F}
- For B→C compute B+ under (G – (B→C))

  B^+ = B , C not in B^+
- For AE→B compute AE^+ under (G – (AE→B))

  AE^+ = AEDF , B not in AE^+
- For A→D compute A^+ under (G – (A→D))

  A^+ = A , D not in A^+
- For D→E compute D^+ under (G – (D→E))

  D^+ = DF , E not in D^+
- For D→F compute D^+ under (G – (D→F))

  D^+ = DE , F not in D+

Step 3. Remove any redundant left hand side attributes

G = {B→C, AE→B, A→D, D→E, D→F}

- For AE→B
  - For A: compute E^+ with respect to G

    E^+ = E

    E^+ doesn't contain B, so A not redundant in AE→B
  - For E: compute A^+ with respect to G

    A^+ = ADEFBC

    A^+ contains B, so E is redundant in AE→B

Minimal closure = {B→C, A→B, A→D, D→E, D→F}

Esercizio di copertura minimale

Find a minimal cover of: $F = \{ A \rightarrow BC , B \rightarrow C , A \rightarrow B , AB \rightarrow C , AC \rightarrow D \}$

Step 1. Make right hand sides atomic

$G = \{ A \rightarrow B , A \rightarrow C , B \rightarrow C , A \rightarrow B , AB \rightarrow C , AC \rightarrow D \}$

($A \rightarrow B$ compares two times)

Step 2. Remove any redundant left hand side attributes *

- For $AB \rightarrow C$
  - For A: compute B^+ with respect to G

    $B^+ = BC$

    B^+ contains C, so A is redundant in $AB \rightarrow C$
- For $AC \rightarrow D$
  - For A: compute C^+ with respect to G

    $C^+ = \{\}$

    C^+ doesn't contain D, so A not redundant in $AC \rightarrow D$
  - For C: compute A^+ with respect to G

    $A^+ = ABCD$

    A^+ contains D, so C is redundant in $AC \rightarrow D$

Thus $G = \{ A \rightarrow B , A \rightarrow C , B \rightarrow C , A \rightarrow D \}$

Step 3. Remove any redundant FDs

- For $A \rightarrow B$ compute A^+ under $(G - (A \rightarrow B))$

  $A^+ = ACD$, B not in A^+
- For $A \rightarrow C$ compute A^+ under $(G - (A \rightarrow C))$

  $A^+ = ABC$, C is in A^+ so remove $A \rightarrow C$ from G

  $G = \{ A \rightarrow B , B \rightarrow C , A \rightarrow D \}$
- For $B \rightarrow C$ compute B^+ under $(G - (B \rightarrow C))$

  $B^+ = B$, C not in B^+
- For $A \rightarrow B$ compute A^+ under $(G - (A \rightarrow D))$

  $A^+ = ABC$, D not in A^+

Minimal closure = $\{ A \rightarrow B , B \rightarrow C , A \rightarrow D \}$

Esercizi

Sia R(A,B,C,D) uno schema di relazione.

a) È vero o falso che se AB→D, allora ABC→D? In caso affermativo fornire una derivazione di ABC→D da AB→D usando gli assiomi di Armstrong; altrimenti, fornire un contro esempio.

b) È vero o falso che se ABC→D, allora AB→D? In caso affermativo fornire una derivazione di AB→D da ABC→D usando gli assiomi di Armstrong; altrimenti, fornire un contro esempio.

c) Se C→B, A→D allora AC→B.

d) Se AB→D, B→C allora AC→D.

e) Se A→B, AB→D allora A→D.

Soluzione

a) Vero.

AB→D, per ipotesi

ABC→AB, per riflessività

ABC→D, per transitività.

b) Falso.

Sia r:

A	B	C	D
a	b	c_1	d_1
a	b	c_2	d_2

ABC↛D ma A→D

c) C→B arricchimento AC→AB

AB→B per riflessività

quindi AC→AB, AB→B implica per transitività AC→B

d) Falso.

Sia r:

A	B	C	D
a	a	a	a
a	b	a	b

e) A→AB

AB→D

A→D

*** Minimal Cover of a Set of Functional Dependencies**

Note: it is sometimes possible to have more than one valid minimal cover for a given set of FDs.

Esercizi

1. Dato F = { ABD→E, AB→C, B→F, C→J, CJ→I, G→H}. Indicare se è una copertura minimale oppure no? In caso negativo fornire la copertura mininale.

2. Siano G={ AB→C, B→A, AD→E, BD→F} e H={ AB→C, B→A, AD→EF}. Trovare la copertura minimale di G e H. Determinare se G e H sono equivalenti.

Si consideri uno schema di relazione R = (A, B, C, D, E) con associato l'insieme di dipendenze funzionali: F = {**A → C, B → C, C → D, DE → C, CE → A**}.

a) Determinare la chiave di R.
b) Si decomponga R in relazione 2NF, e successivamente in 3NF.

Dato il seguente schema relazionale: R = (A, B, C, D, E, F) con associato l'insieme di dipendenze funzionali: F = { **B F → C, C → F, B C → D, C D F → B, B E → C, C F → A, A C → B D, D → A E**}. Determinare la copertura minimale di F.

Esercizio 10.26

Si consideri la relazione universale:

R = { A, B, C, D, E, F, G, H, I, J }

ed un insieme di dipendenze funzionali:

F = { { A, B } → { C }, { A } → { D, E }, { B } → { F }, { F } → { G, H }, { D } → { I, J } }

Qual è la chiave per R? Si decomponga R in relazione 2NF, quindi in 3NF.

Risposta:

Un insieme minimo di attributi la cui chiusura include tutti gli attributi di R è una chiave. La chiave KEY deve essere tale che per ogni sottoinsieme X della relazione R si ha:

{ KEY } → X

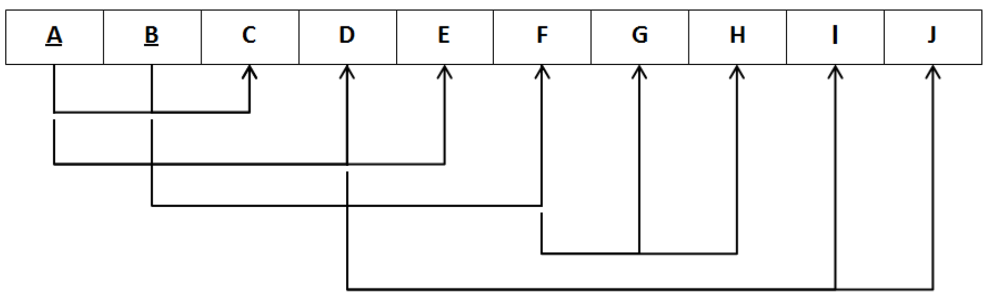
In pratica **R = { KEY }$^+$**, ovviamente si cerca l'insieme di attributi minimale con questa proprietà.

Si determinano le chiusure delle parti sinistre delle dipendenze funzionali (L'algoritmo da applicare è il 10.1 del libro di testo):

{ A, B }$^+$ = { A, B, C, D, E, F, G, H, I, J }
{ A }$^+$ = { A, D, E, I, J }
{ B }$^+$ = { B, F, G, H }
{ F }$^+$ = { F, G, H }
{ D }$^+$ = { D, I, J }

In pratica l'unica chiusura minimale (due soli attributi) ci porta ad assegnare **A** e **B** come chiave della R: **{ A, B }$^+$ = R**. **{ A }$^+$** e **{ B }$^+$** non includono tutto R.

Lo schema di relazione (gli attributi che compongono la chiave sono sottolineati):



Per normalizzare intuitivamente in 2NF e 3NF, seguiamo i seguenti passi. Prima si identificano le dipendenze parziali che violano la 2NF. Le dipendenze parziali sono:

{ A } → { D, E } e **{ B } → { F }**

Calcoliamo la chiusura di **$\{ A \}^+$** e **$\{ B \}^+$** per determinare gli attributi dipendenti parziali:

$\{ A \}^+ = \{ A, D, E, I, J \}$

Quindi **$\{ A \} \rightarrow \{ D, E, I, J \}$** (**$\{ A \} \rightarrow \{ A \}$** è una dipendenza banale).

$\{ B \}^+ = \{ B, F, G, H \}$.

Quindi **$\{ B \} \rightarrow \{ F, G, H \}$** (**$\{ B \} \rightarrow \{ B \}$** è una dipendenza banale).

Per normalizzare in 2NF, rimuoviamo gli attributi che sono funzionalmente dipendenti da una parte della chiave (A o B) da R e li decomponiamo in due separate relazioni R_1 e R_2 insieme alla parte di chiave da cui essi dipendono (A o B), le quali sono copiate in ognuna di queste relazioni, ma che comunque rimangono nella relazione originale, che chiameremo R_3:

$R_1 = \{ \underline{A}, D, E, I, J \}$, $R_2 = \{ \underline{B}, F, G, H \}$, $R_3 = \{ \underline{A}, \underline{B}, C \}$

Le nuove chiavi per R_1, R_2 e R_3 sono sottolineate. Adesso, verifichiamo le dipendenze transitive in R_1, R_2 e R_3. La relazione R_1 ha la dipendenza transitiva:

$\{ A \} \rightarrow \{ D \} \rightarrow \{ I, J \}$

quindi muoviamo gli attributi transitivamente dipendenti **$\{ I, J \}$** da R_1 nella relazione R_{11} e copiamo l'attributo **D** da cui sono dipendenti in R_{11}. Gli attributi rimanenti sono mantenuti in una relazione R_{12}. Quindi, R1 è decomposto in R_{11} e R_{12} come segue:

$R_{11} = \{ \underline{D}, I, J \}$, $R_{12} = \{ \underline{A}, D, E \}$

Allo stesso modo la relazione R_2 è decomposta in R_{21} e R_{22} sulla base della dipendenza transitiva:

$\{ B \} \rightarrow \{ F \} \rightarrow \{ G, H \}$

$R_{21} = \{ \underline{F}, G, H \}$, $R_{22} = \{ \underline{B}, F \}$

L'insieme finale delle relazioni in 3NF sono $\{ R_3, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22} \}$.

Esercizio 10.27

Si consideri la relazione universale:

R = { A, B, C, D, E, F, G, H, I, J }

ed un insieme di dipendenze funzionali:

F = { { A, B } → { C }, { B , D } → { E, F }, { A, D } → { G, H }, { A } → { I }, { H } → { J } }

Qual è la chiave per R? Si decomponga R in relazione 2NF, quindi in 3NF.

Risposta:

Si determinano le chiusure delle parti sinistre delle dipendenze funzionali (L'algoritmo da applicare è il 10.1 del libro di testo):

$\{ A, B \}^+ = \{ A, B, C, I \}$
$\{ B, D \}^+ = \{ B, D, E, F \}$
$\{ A, D \}^+ = \{ A, D, G, H, I, J\}$
$\{ A \}^+ = \{ A, I \}$
$\{ H \}^+ = \{ H, J \}$

A e **B** devono necessariamente far parte della chiave per coprire **C**, ma per coprire **F**, **G** ed **H** si deve considerare anche **D**.
Quindi, la chiusura minimale (tre soli attributi) ci porta ad assegnare **A**, **B** e **D** come chiave della R: **$\{ A, B, D \}^+ = R$**
È minimale perché **$R \not\subset \{ A, B \}^+$**, **$R \not\subset \{ B, D \}^+$** e **$R \not\subset \{ A, D \}^+$**

La relazione non è in 2NF poiché **{ B, D } → { E, F }**, **{ A, D } → { G, H }** e **{ A, B } → { C }** inducono una dipendenza parziale dalla chiave (lo stesso vale per **{ A } → { I }**).
Normalizzando in 2NF (le dipendenze uguali vengono rimosse, i.e. **{ A } → { I }** compare 3 volte:

$R_1 = \{ \underline{A}, \underline{B}, \underline{D} \}$, $R_2 = \{ \underline{A}, \underline{B}, C \}$, $R_3 = \{ \underline{A}, I \}$, $R_4 = \{ \underline{B}, \underline{D}, E, F \}$, $R_5 = \{ \underline{A}, \underline{D}, G, H, J \}$

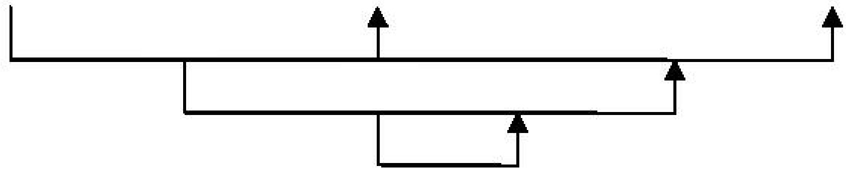
L'ultima relazione (R_5) non è in 3NF, poiché **J** dipende transitivamente dalla chiave **AD** attraverso **H**; va ulteriormente decomposta:

$R_{51} = \{ \underline{A}, \underline{D}, G, H \}$, $R_{52} = \{ \underline{H}, J \}$

L'insieme finale delle relazioni in 3NF sono $\{ R_1, R_2, R_3, R_4, R_{51}, R_{52} \}$.

Esercizio 10.33

BOOK(Book_Title, AuthorName, BookType, ListPrice, AuthorAffil, Publisher)



Chiave : BookTitle,AuthorName

La relazione non è in 2NF BookType , AuthorAffil e Publisher dipendono parzialmente dalla chiave :

BOOK1(Book_Title, AuthorName)
AUTHORS(AuthorName, AuthorAffil)
BOOKOBJECT(BookTitle,BookType, Publisher, ListPrice)

Ma BOOKOBJECT non è in 3NF poiché ListPrice dipende transitivamente dalla chiave :

BOOK1(Book_Title, AuthorName)
AUTHORS(AuthorName, AuthorAffil)
BOOKOBJECT1(BookTitle,BookType, Publisher)
PRICES(BookType, ListPrice)

Esercizio Chiusura

Si consideri la relazione r(A,B,C,D) con le dipendenze funzionali

F={$A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$,$AC \rightarrow B$} calcolare la chiusura di F.

Soluzione

In base alle regole di Armstrong, considerando solo le dipendenze non banali.

F+={$A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$, $AC \rightarrow B$, $AC \rightarrow D$, $A \rightarrow D$, $A \rightarrow B$ }

Esercizio 11. Sia $R(A, B, C, D)$ uno schema di relazione. Si dimostri la correttezza o falsita' delle seguenti regole di inferenza per dipendenze funzionali.

(1) $\{AB \to D\} \models ABC \to D$
(2) $\{ABC \to D\} \models AB \to D$
(3) $\{C \to B, A \to D\} \models AC \to B$
(4) $\{AB \to D, B \to C\} \models AC \to D$
(5) $\{A \to B, AB \to D\} \models A \to D$

Esercizio 11: Soluzione. Sia $R(A, B, C, D)$ uno schema di relazione. Si dimostri la correttezza o falsita' delle seguenti regole di inferenza per dipendenze funzionali.

(1) $\{AB \to D\} \models ABC \to D$
- Soluzione:
  (a) $AB \to D$ ipotesi
  (b) $ABC \to AB$ riflessivita'
  (c) $ABC \to D$ transitivita' da (a) e (b).

(2) $\{ABC \to D\} \models AB \to D$
- Soluzione: $\{ABC \to D\} \models AB \to D$ e' falsa. Un controesempio e' dato dalla seguente istanza r di R, dove $ABC \to D$ ma $AB \nrightarrow D$:

A	B	C	D
a	b	c_1	d_1
a	b	c_2	d_2

(3) $\{C \to B, A \to D\} \models AC \to B$
- Soluzione:
  (a) $C \to B$ ipotesi
  (b) $A \to D$ ipotesi
  (c) $AC \to AB$ arricchimento (a) usando l'attributo A
  (d) $AB \to B$ riflessivita'
  (e) $AC \to B$ transitivita' da (c) e (d).

(4) $\{AB \to D, B \to C\} \models AC \to D$
- Soluzione: $\{AB \to D, B \to C\} \models AC \to D$ e' falsa. Un controesempio e' dato dalla seguente istanza r di R, dove $AB \to D$, $B \to C$, ma $AC \nrightarrow D$:

A	B	C	D
a	a	a	a
a	b	a	b

(5) $\{A \to B, AB \to D\} \models A \to D$
- Soluzione:
  (a) $A \to B$ ipotesi
  (b) $AB \to D$ ipotesi
  (c) $A \to AB$ arricchimento (a) usando l'attributo A
  (d) $A \to D$ transitivita' da (b) e (c)

Esercizio 13. Siano dati lo schema di relazione $R(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J)$ ed il relativo insieme di dipendenze funzionali $F = \{ABD \to E, AB \to G, B \to F, C \to J, CJ \to I, G \to H\}$.

(8.1) Stabilire se F e' o meno una copertura minimale. In caso di risposta negativa, determinare una copertura minimale di F.

(8.2) Determinare l'insieme delle chiavi candidate di R.

Esercizio 14. Siano dati lo schema relazionale $R(A, B, C, D, E, F)$ e gli insiemi di dipendenza funzionali $G = \{AB \to C, B \to A, AD \to E, BD \to F\}$ ed $H = \{AB \to C, B \to A, AD \to EF\}$

(9.1) Determinare una copertura minimale per G ed una copertura minimale per H.

(9.2) Stabilire se G ed H sono equivalenti.

Esercizio 13: Soluzione. Siano dati lo schema di relazione $R(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J)$ ed il relativo insieme di dipendenze funzionali $F = \{ABD \to E, AB \to G, B \to F, C \to J, CJ \to I, G \to H\}$.

(8.1) Stabilire se F e' o meno una copertura minimale. In caso di risposta negativa, determinare una copertura minimale di F.

- Soluzione. Applichiamo l'algoritmo per ottenere una copertura minimale.
  - Passo 1. I membri destri delle DF in F sono gia' unitari. Il passo 1 dell'algoritmo lascia dunque inalterato F.
  - Passo 2. Rimuoviamo dalle dipendenze gli attributi ridondanti. In $ABD \to E$ l'attributo A e' ridondante sse $E \in BD^+$. Poiche' $BD^+ = \{BDF\}$, concludiamo che A non e' ridondante in $ABD \to E$
    L'attributo B e' ridondante in $ABD \to E$ sse $E \in AD^+$. $AD^+ = \{AD\} \Rightarrow B$ non e' ridondante in $ABD \to E$.
    L'attributo D e' ridondante in $ABD \to E$ sse $E \in AB^+$. $AB^+ = \{ABFGH\} \Rightarrow D$ non e' ridondante in $ABD \to E$.
    L'attributo A e' ridondante in $AB \to G$ sse $G \in B^+$. $B^+ = \{BF\} \Rightarrow A$ non e' ridondante in $AB \to G$.
    L'attributo B e' ridondante in $AB \to G$ sse $G \in A^+$. $A^+ = \{A\} \Rightarrow B$ non e' ridondante in $AB \to G$.
    L'attributo C e' ridondante in $CJ \to I$ sse $I \in J^+$. $J^+ = \{J\} \Rightarrow C$ non e' ridondante in $CJ \to I$.
    L'attributo J e' ridondante in $CJ \to I$ sse $I \in C^+$. $C^+ = \{CIJ\} \Rightarrow C$ e' ridondante in $CJ \to I$. Sostituiamo dunque $CJ \to I$ con $C \to I$, ottenendo $F = \{ABD \to E, AB \to G, B \to F, C \to J, C \to I, G \to H\}$
  - Passo 3. Eliminiamo infine le dipendenze ridondanti dall'insieme ottenuto al passo precedente. Per ogni dipendenza $X \to Y$ e' sufficiente verificare se y appartiene alla chiusura di X rispetto ad $F \setminus \{X \to Y\}$

$X \to Y$	X^+ rispetto a $F \setminus \{X \to Y\}$	$X \to Y$ e' ridondante?
$ABD \to E$	$ABD^+ = \{ABDGFH\}$	No
$AB \to G$	$AB^+ = \{ABF\}$	No
$B \to EF$	$B^+ = \{B\}$	No
$C \to J$	$C^+ = \{CI\}$	No
$C \to I$	$C^+ = \{CJ\}$	No
$G \to H$	$G^+ = \{G\}$	No

La copertura minimale richiesta e' dunque:

$$F = \{ABD \to E, AB \to G, B \to F, C \to J, C \to I, G \to H\}$$

(8.2) Determinare l'insieme delle chiavi candidate di R.

Gli attributi A, B, C, D devono far parte di ogni chiave poiche', non comparendo a destra di alcuna DF in F, non possono essere derivati. Dunque, ogni chiave condidata K e' tale che $K \supseteq \{A, B, C, D\}$. Si ha $ABCD^+ = ABCDEFGHIJ = R$. Dunque, $ABCD$ e' una superchiave, rispetta il vincolo di minimalita' ed e' l'unica chiave candidata di R.

Esercizio 14: Soluzione. Siano dati lo schema relazionale $R(A, B, C, D, E, F)$ e gli insiemi di dipendenza funzionali $G = \{AB \to C, B \to A, AD \to E, BD \to F\}$ ed $H = \{AB \to C, B \to A, AD \to EF\}$

(9.1) Determinare una copertura minimale per G ed una copertura minimale per H.

- Soluzione. Calcoliamo una copertura minimale per G con l'algoritmo visto a lezione.
  - Passo 1. I membri destri sono gia' unitari e dunque il primo passo non apporta modifiche a G.
  - Passo 2. Rimuoviamo gli attributi ridondanti da ogni dipendenza.
    L'attributo A e' ridondante in $AB \to C$ sse $C \in B^+$. $B^+ = \{BAC\} \supseteq \{B\}$. A e' dunque ridondante in $AB \to C$ che viene sostituita con $B \to C$.
    L'attributo A e' ridondante in $AD \to E$ sse $E \in D^+$. $D^+ = \{D\}$ $\Rightarrow$ A non e' ridondante in $AD \to E$.
    L'attributo D e' ridondante in $AD \to E$ sse $E \in A^+$. $A^+ = \{A\}$ $\Rightarrow$ D non e' ridondante in $AD \to E$.
    L'attributo B e' ridondante in $BD \to F$ sse $F \in D^+$. $D^+ = \{D\}$ $\Rightarrow$ B non e' ridondante in $BD \to F$.
    L'attributo D e' ridondante in $BD \to F$ sse $F \in B^+$. $B^+ = \{B\}$ $\Rightarrow$ D non e' ridondante in $BD \to F$.
  - Passo 3. Eliminiamo infine le dipendenze ridondanti dall'insieme ottenuto al passo precedente. Per ogni dipendenza $X \to Y$ e' sufficiente verificare se y appartiene alla chiusura di X rispetto ad $F \setminus \{X \to Y\}$

$X \to Y$	X^+ rispetto a $F \setminus \{X \to Y\}$	$X \to Y$ e' ridondante?
$B \to C$	$B^+ = \{BA\}$	No
$B \to A$	$B^+ = \{BC\}$	No
$AD \to E$	$AD^+ = \{AD\}$	No
$BD \to F$	$BD^+ = \{BDCAE\}$	No

L'insieme di DF:

$$\{B \to C, B \to A, AD \to E, BD \to F\}$$

e' dunque una copertura per G. Operando analogamente su H otteniamo la seguente copertura minimale:

$$\{B \to C, B \to A, AD \to E, AD \to F\}$$

(9.2) Stabilire se G ed H sono equivalenti.

- Soluzione. Dobbiamo verificare che g e' coperto da H ed H e' coperto da G. Verifichiamo se G e' coperto da H ovvero $G \subseteq H^+$. Le dipendenze $AB \to C, B \to A, AD \to E$ in G appartengono anche ad H e dunque ad H^+. Vediamo se $BD \to F \in H^+$. $BD \to F \in H^+$ sse $F \in BD^+$ (rispetto ad H). BD^+ rispetto ad H equivale a $\{BDACEF \supseteq \{F\}$. Possiamo dunque concludere che $G \subseteq H^+$. Al fine di provare $H \subseteq G^+$ dobbiamo verificare se $AD \to F \in G^+$. Si ha $F \notin AD^+$ (rispetto a G). Infatti $AD^+ = \{ADE\}$. Dunque $H \nsubseteq G^+$ e G ed H non sono equivalenti.

Esercizio 15: Soluzione. Si considerino lo schema di relazione $R(A, B, C, D, E, F)$ e l'insieme di dipendenze associato: $G = \{A \to B, C \to AD, AF \to EC\}$.

(10.1) Si determinino le chiavi candidate di R.

- Soluzione. Poiche' l'attributo F non compare nella parte destra di alcuna DF, ne segue che F deve appartenere ad ogni chiave candidata. Al contrario, D, E, e B compaiono solo nella parte destra di DF. Ne segue che D, E, e B non appartengono ad alcuna chiave candidata. Da:
  - $AF^+ = AFBDEC = R$
  - $CF^+ = CFADEC = R$
  - $F^+ = F$

  segue che AF e CF sono le uniche chiavi candidate di R.

(10.2) Si stabilisca se R e' in 3NF. Qualora non lo sia, si definisca una decomposizione di R in 3NF che conservi le dipendenze date.

- Soluzione. R non e' in 3NF. Si consideri infatti la DF $A \to B$. Tale dipendenza viola la 3NF in quanto A non e' una superchiave e B non e' primo. Calcoliamo una copertura minimale per G utilizzando l'algoritmo visto a lezione. Otteniamo:

  $$G' = \{A \to B, C \to A, C \to D, AF \to E, AF \to C\}$$

  da cui otteniamo la decomposizione: $R1 = (AB), R2 = (CAD), R3 = (AFEC)$.