Esercitazione Algebra di Boole

Esercizio 1

- Verificare mediante i teoremi fondamentali dell'algebra di Boole se per l'operatore XOR vale la proprietà distributiva:

  a XOR (b OR c) = (a XOR b) OR (a XOR c)

Soluzione

Procediamo innanzitutto utilizzando i teoremi fondamentali dell'algebra. Esprimento l'XOR mediante operatori AND e OR e quindi, ripetutamente, il Teorema di De Morgan si ha:

$$\begin{aligned} a \oplus (b+c) &= a \cdot (\overline{b+c}) + \overline{a} \cdot (b+c) \\ &= a \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c}) + \overline{a} \cdot (b+c) \\ &= a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b + \overline{a} \cdot c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \oplus b) + (a \oplus c) &= a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c \\ &= a \cdot (\overline{b} + \overline{c}) + \overline{a} \cdot b + \overline{a} \cdot c \\ &= a \cdot \overline{b \cdot c} + \overline{a} \cdot b + \overline{a} \cdot c \end{aligned}$$

Se a assume valore 0 le due espressioni coincidono, visto che diventano uguali a $b+c$. Se a assume valore 1 le due espressioni sono invece diverse in quanto assumono i valori $\overline{b} \cdot \overline{c}$ e $\overline{b \cdot c}$ rispettivamente. Le due espressioni non sono quindi equivalenti.

La verifica mediante tabella di verità può essere effettuata come segue:

a	b	c	b+c	$a \oplus (b+c)$	$a \oplus b$	$a \oplus c$	$(a \oplus b) + (a \oplus c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

Le due funzioni (colonne 5 e 8) sono differenti. Quindi le due espressioni non sono equivalenti

Esercizio 2

- Ricavare la funzione booleana di forma minima che, dati in ingresso tre bit, determina se il numero di bit uguali a uno `e pari.

Soluzione

Siano (i_2, i_1, i_0) i tre bit in ingresso. Sia u l'uscita. u deve essere uguale a 1 quando il numero di ingressi uguali a 1 è pari ovvero è uguale a zero oppure a due. La tabella di verità risultante è la seguente.

i_2	i_1	i_0	u
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Da cui:

$$\begin{aligned}
u &= \overline{i_2} \cdot \overline{i_1} \cdot \overline{i_0} + \overline{i_2} \cdot i_1 \cdot i_0 + i_2 \cdot \overline{i_1} \cdot i_0 + i_2 \cdot i_1 \cdot \overline{i_0} \\
&= \overline{i_2} \cdot (\overline{i_1} \cdot \overline{i_0} + i_1 \cdot i_0) + i_2 \cdot (\overline{i_1} \cdot i_0 + i_1 \cdot \overline{i_0}) \\
&= \overline{i_2} \cdot (\overline{i_1 \oplus i_0}) + i_2 \cdot (i_1 \oplus i_0) \\
&= \overline{i_2 \oplus (i_1 \oplus i_0)}
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Date le due funzioni booleane f_1 e f_2:

$$
\begin{aligned}
f_1(a,b,c,d) &= a \cdot b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c \cdot d + \overline{c} \cdot \overline{d} \\
f_2(a,b,c,d) &= (a + \overline{b} + c) \cdot (\overline{a} + d)
\end{aligned}
$$

- Ricavare la tavola di verità

Esercizio 5

- Sia X = ($x3x2x1x0$) un numero binario puro, per il quale $x3$ è il bit di peso maggiore.
- Si consideri la funzione booleana $f(x3, x2, x1, x0)$ che è vera se X è un numero primo (assumere 0 sia un numero primo).

- Si:
  - scriva la tabella di verità di f
  - determini l'espressione analitica di f e la si semplifichi mediante l'uso dei teoremi fondamentali
  - fornisca una rappresentazione circuitale di f.