

Domande esempio per sistemi di equazioni lineari – Il parte - (Analisi Numerica A.A. 2008-09)

1. E' dato il sistema di equazioni $Ax=b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- i. Verificare se applicando un metodo iterativo a scelta (Jacobi o Gauss-Seidel) per la risoluzione del sistema, si ottiene una successione convergente.
- ii. Determinare la soluzione del sistema con accuratezza relativa 10^{-4} , 10^{-7} , 10^{-10} , eps.
- iii. Per ciascuna delle accuratezze trovare il numero di iterazioni ed il numero di operazioni macchina effettuate.
- iv. Determinare la velocità di convergenza e, quindi, una stima matematica delle iterazioni necessarie per raggiungere le accuratezze richieste.
- v. Confrontare i valori al punto (iv) con quelli effettivi trovati al punto (iii).

2. E' dato il sistema di equazioni $Ax=b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- i. Verificare se applicando un metodo iterativo a scelta (Jacobi o Gauss-Seidel) per la risoluzione del sistema, si ottiene una successione convergente.
- ii. Determinare quale tra un metodo diretto o iterativo sia più conveniente dal punto di vista computazionale e risolverlo con la massima accuratezza possibile.
- iii. Dall'esecuzione del codice determinare il numero di operazioni macchina effettuate.

3. E' dato il sistema di equazioni $Ax=b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 8 & -3 & 0 \\ 5 & 10 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- i. Verificare se applicando un metodo iterativo a scelta (Jacobi o Gauss-Seidel) per la risoluzione del sistema, si ottiene una successione convergente.
- ii. Se la risposta al punto precedente è negativa, è possibile trasformando opportunamente la matrice A, fare in modo che un metodo iterativo sia convergente? Se sì risolvere il sistema di equazioni. con accuratezza relativa 10^{-4} , 10^{-7} , 10^{-10} , eps.
- iii. Per ciascuna delle accuratezze trovare il numero di iterazioni ed il numero di operazioni macchina effettuate.
- iv. Determinare la velocità di convergenza e, quindi, una stima matematica delle iterazioni necessarie per raggiungere le accuratezze richieste.
- v. Confrontare i valori al punto (iv) con quelli effettivi trovati al punto (iii).

4. E' dato il sistema di equazioni $Ax=b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ -3 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- i. Calcolare la soluzione con un metodo iterativo a scelta con accuratezza relativa 10^{-4} , 10^{-7} , 10^{-10} , eps.
- ii. Per ciascuna delle accuratezze trovare il numero di iterazioni ed il numero di operazioni macchina effettuate.
- iii. Determinare la velocità di convergenza e, quindi, una stima matematica delle iterazioni necessarie per raggiungere le accuratezze richieste.
- iv. Confrontare la soluzione con quella che si ottiene col comando Matlab \ e calcolare l'errore vero.

5. E' dato il sistema di equazioni $Ax=b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ -3 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 12 \\ 26 \end{pmatrix}$$

- i. Utilizzando il metodo SOR trovare il parametro ottimale ω che massimizza la velocità di convergenza.
- ii. Determinare il raggio spettrale della matrice di iterazione SOR con il parametro ottimale.
- iii. Trovare la soluzione del sistema con il metodo SOR con parametro ottimale con accuratezza relativa 10^{-4} , 10^{-7} , 10^{-10} , eps.
- iv. Per ciascuna delle accuratezze trovare il numero di iterazioni ed il numero di operazioni macchina effettuate.
- v. Confrontare la soluzione con quella che si ottiene col comando Matlab \ e calcolare l'errore vero.

- vi. Ripetere i punti iii. e iv. con parametro ω diverso da quello ottimale, e confrontare i risultati con quelli dei punti precedenti.