Esempi domande – Approssimazione di dati e funzioni – A.A. 2008-2009

1. Sono dati i punti di ascisse x_i = {-3.2, -1, 0.3, 1.4, 5.7} e ordinate
   y_i = {2.8, 2.1, 1.4, 0.8, -3.6}.
   a. Determinare il polinomio interpolante dei punti dati *(scrivere esplicitamente il polinomio di interpolazione P(x)= …)*, e disegnare un grafico del polinomio evidenziando i punti dati.
   b. Valutare il polinomio trovato nel punto x=4.
   c. Utilizzando il comando 'spline' disegnare il grafico della spline evidenziando i punti dati.
   d. Valutare la spline, nel punto x=4.
   e. Scrivere la retta di regressione lineare *(minimi quadrati)* dei punti assegnati.
   f. Valutare la retta di regressione nel punto x=4.

2. E' data la funzione $f(x) = x + \cos^2(x) – 2$, nell'intervallo [-1,2].
   a. Costruire i polinomi interpolanti di grado 3 e 6, con nodi equispaziati nell'intervallo assegnato *(scrivere esplicitamente i polinomi di interpolazione P(x)= …)*, e disegnare un grafico dei polinomi evidenziando i punti dati.
   b. Disegnare i grafici della funzione errore f(x)-P(x) e stimare i valori della 'norma-infinito' nell'intervallo assegnato, per entrambe le interpolazioni.
   c. Stimare l'errore di interpolazione massimo nell'intervallo assegnato, utilizzando la formula dell'errore di interpolazione di Lagrange, per il polinomio di grado 3 e confrontare questo valore con quello determinato al punto precedente.
   d. Determinare i coefficienti del polinomio interpolante di grado 3, risolvendo il sistema di equazione che si trova dalle condizioni di interpolazione (con matrice di Vandermonde). Confrontarli con quelli ottenuti al punto a.

3. Sono dati i punti di ascisse x_i = {-2, -1, 0, 1, 2} e ordinate y_i = {-16, -8, -2, 2, 4}.
   a. Determinare il polinomio interpolante dei punti dati *(scrivere esplicitamente il polinomio di interpolazione P(x)= …)*, e disegnare un grafico del polinomio evidenziando i punti dati.
   b. Determinare la parabola ottenuta con il metodo dei minimi quadrati sui punti dati, scrivendola esplicitamente come funzione di x.
   c. Confrontare il valore del polinomio trovato in a. con quello della parabola in b. nel punto x = ½ e commentare.
   d. Perturbare l'ordinata y=2 con un valore dell' 1%, e ripetere i punti a. e b. confrontando i nuovi polinomi con quelli calcolati precedentemente.

4. Disegnare il grafico di f(x) = exp(-sin(x))+x*cos(x) nell'intervallo [0, 2π], e:
   a. Eseguire l'interpolazione polinomiale di f(x) con 5, 8 e nodi equispaziati e disegnare funzione, polinomi e nodi.
   b. Disegnare la spline cubica interpolante sui suddetti nodi.

5. Disegnare il grafico della funzione f(x)=log(x-1)*exp(-cos(x)) nell'intervallo [1.1 , π], e:
   a. Disegnare i polinomi interpolanti con 4, 11 e 19 nodi equidistanti, nell'intervallo *(utilizzare un colore diverso per polinomio)*, evidenziando i nodi. Si può supporre,

qualitativamente, la convergenza uniforme, dei polinomi alla funzione, all’aumentare del numero di nodi ?

b. Disegnare i polinomi interpolanti con 4, 11 e 19 nodi distribuiti secondo Tchebichev in base alla formula: $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$, i=0,…,n, (con n+1 nodi), nell’intervallo *(utilizzare un colore diverso per polinomio)*, evidenziando i nodi. Si può supporre, qualitativamente, la convergenza uniforme, dei polinomi alla funzione, all’aumentare del numero di nodi ?

c. Disegnare le spline cubiche interpolante per i nodi dati al punto a. evidenziando i nodi.

6. Sono dati i seguenti valori di tensione V e corrente I, che risultano da misure di un conduttore (Legge di Ohm V=R I):

V	1.02	3.05	5.97	9.12	12.93	15.01	20.09
I	3.30E-3	9.8E-3	2.02E-2	3.1E-2	4.3E-2	4.93E-2	6.7E-2

Effettuare una regressione lineare sui dati per stimare il valore di R.

7. Sono dati i punti di coordinate (x_i , y_i) pari a: (-2.0,14.65), (-1.33, 5.67), (-0.67, 1.767), (0,-0.77), (0.66,-1.92), (1.33,2.62), (2.0, 7.95).

a. Scrivere il polinomio P(x) di grado 2 che approssima nel senso dei minimi quadrati i punti dati.

b. Disegnare il grafico dei punti e del suddetto polinomio.

c. Calcolare lo scarto quadratico: $r^2 = \sum_i (y_i - P(x_i))^2$ tra dati e funzione approssimante (suggerimento: per comodità utilizzare la norma 2).

d. Cambiare del 5% un coefficiente del polinomio e calcolare lo scarto quadratico. Confrontare il nuovo calore con quello trovato al punto c. e commentare.