

(Scrivere tutti i dati richiesti e trascrivere gli stessi su ogni foglio dello svolgimento)

(Barrare la seguente casella per pubblicare il solo numero di matricola \square)

(I quesiti contrassegnati con (F) sono facoltativi)

Analisi Numerica A.A. 2009-2010

Quesito A (punti 3) Effettuare le somme $S1 = (4 \cdot 10^{70} + 3 \cdot 10^{54}) + 2 \cdot 10^{54}$ e $S2 = 4 \cdot 10^{70} + (3 \cdot 10^{54} + 2 \cdot 10^{54})$, rispettando le parentesi, in aritmetica 'virgola mobile' al calcolatore.

1. Effettuare la sottrazione $S1 - S2$ e verificare che il risultato sia quello atteso in aritmetica esatta. In caso contrario commentare.
2. Illustrare brevemente la rappresentazione in virgola mobile dei numeri al calcolatore.
3. Definire la precisione macchina e spiegare la sua relazione con le operazioni al calcolatore, in particolare rispetto al punto 1.

Quesito B (punti 9) È dato il sistema di equazioni $Ax = b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{15} & -4 \cdot 10^{14} & 2 \cdot 10^{15} \\ 3 & -6 & 1 \\ 3 \cdot 10^{-8} & 5 \cdot 10^{-8} & 2 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{15} \\ 4 + \alpha \\ 10^{-7} \end{pmatrix}$$

dove α è l'ultima cifra del numero di matricola.

1. Risolvere il sistema con il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale.
2. Calcolare l'errore relativo vero, supponendo che il risultato vero si ottenga col comando Matlab " \ ", e commentare.
3. Studiare il condizionamento del sistema. Nel caso che il sistema fosse malcondizionato agire sul sistema stesso per migliorare il condizionamento, ed in seguito ripetere i punti precedenti.
4. (F) Ripetere i punti precedenti utilizzando il pivot totale (+ 2 punti).
5. Cosa si può dire sulla convergenza del metodo di Jacobi per la matrice A, prima dell'applicazione del metodo? Se il metodo non risultasse convergente modificare la matrice A per renderla convergente.
6. Calcolare la soluzione con il metodo di Jacobi con accuratezza relativa: 10^{-5} e precisione macchina. Trascrivere soluzione, stima dell'errore ed errore vero che si ottiene dall'algoritmo.
7. Discutere il concetto di condizionamento in generale e per i sistemi di equazioni. Fornire un esempio di sistema malcondizionato.

Quesito C (punti 6) E' data la funzione $f(x) = \frac{\cos(x)}{5x^2 - x + 5}$ definita nell'intervallo $[a, b] = [-10, 10]$.

1. Calcolare i polinomi di interpolazione di grado 4, 10, 16, con nodi equispaziati nell'intervallo dato. Disegnare a video i polinomi, la funzione data ed i nodi di interpolazione. Scrivere esplicitamente il polinomio di grado 4 (in formato short).
2. Disegnare i grafici della funzione errore $f(x) - P(x)$ e stimare i valori della 'norma-infinito' nell'intervallo assegnato, per le tre interpolazioni e commentare (chiamare il docente per la verifica a video dei grafici).
3. Sulla base dei grafici ottenuti si può affermare qualitativamente la convergenza uniforme dei polinomi all'aumentare del numero dei nodi, seguendo lo schema del punto 1. ? (motivare).
4. Disegnare i polinomi interpolanti, di grado 10 e 16, con nodi disposti secondo Tchebichev in base alla formula: $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$, $i = 0, \dots, n$, (con $n + 1$ nodi) nell'intervallo $[a, b]$. Si può supporre, qualitativamente, la convergenza uniforme dei polinomi alla funzione all'aumentare del numero dei nodi ? (motivare).

Quesito D (punti 6) Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Scrivere la definizione di autovalore e autovettore. Enunciare il teorema di Gershgorin.
2. Localizzare gli autovalori di A utilizzando il teorema di Gershgorin. Disegnare gli insiemi di localizzazione.
3. Trovare gli autovalori utilizzando la fattorizzazione QR con la massima accuratezza possibile (illustrare brevemente il metodo).
4. Verificare che gli autovalori trovati siano all'interno della regione di localizzazione del punto 1.

Quesito E (punti 6) Calcolare l' integrale definito $\int_0^\pi f(x) dx$, dove $f(x)$ è la funzione del Quesito C, con accuratezza assoluta pari a: $10^{-6}, 10^{-15}$, utilizzando l'algoritmo adattivo di Cavalieri-Simpson.

1. Riportare in una tabella il valore dell' integrale, la stima dell' errore assoluto che viene restituito dall' algoritmo e l' errore vero (per trovare il risultato esatto avvalersi del comando `QUADL`).
2. Confrontare i valori di stima di errore assoluto ed errore vero, e commentare.
3. (F) Ripetere i punti precedenti con l' algoritmo di quadratura dei trapezi non-adattiva, e confrontare i risultati (+2 punti).
4. Cos'è il grado di precisione di una formula di quadratura ? Specificare il valore per le formule di Newton-Cotes in generale, ed il valore per le formule dei trapezi e di Cavalieri-Simpson.

NOTE:I risultati numerici dei problemi proposti devono essere trascritti sull'elaborato. Indicare chiaramente l'inizio e la fine di ogni quesito. Trascrivere anche i prototipi delle funzioni degli algoritmi una sola volta per ciascun prototipo. Indicare chiaramente l'inizio e la fine di ogni quesito.

Esempio tabella:

Accuratezza richiesta	Valore dell' integrale	Stima errore assoluto	Errore vero assoluto