*Cognome:* .............................*Nome:*...................*Classe:*.........*Matricola:*...................

*(Scrivere tutti i dati richiesti e trascrivere gli stessi su ogni foglio dello svolgimento)*
*(Barrare la seguente casella per pubblicare il solo numero di matricola ☐ )*
*(I quesiti contrassegnati con (F) sono facoltativi)*

---

**Analisi Numerica A.A. 2009-2010**

**Quesito A (punti 3)** Effettuare la somma $S1 = (7 \cdot 10^{-99} + 3 \cdot 10^{-115}) + 3 \cdot 10^{-115}$ e $S2 = 7 \cdot 10^{-99} + (3 \cdot 10^{-115} + 3 \cdot 10^{-115})$, rispettando le parentesi, in aritmetica 'virgola mobile' al calcolatore.

1. Effettuare la sottrazione `S1 - S2` e spiegare il risultato ottenuto motivando la risposta.
2. Illustrare brevemente la rappresentazione in virgola mobile dei numeri al calcolatore.
3. Definire la precisione macchina ed illustrare la sua relazione con le operazioni al calcolatore, in particolare al punto 1.

---

**Quesito B (punti 9)** È dato il sistema di equazioni $Ax = b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3+\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

(dove $\alpha$ è l'ultima cifra del numero di matricola).

1. Applicare il metodo SOR alla matrice $A$ e trovare il parametro ottimale $\omega$ che massimizza la velocità di convergenza. Si riporta la matrice di iterazione:
$$B_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]$$
dove $D$ è la parte diagonale di $A$, $L$ la triangolare inferiore, $U$ la superiore, per entrambe esclusa la diagonale. La formula iterativa:
$$x^{(k+1)} = B_{SOR}x^{(k)} + \omega(D + \omega L)^{-1}b$$
2. Con il parametro ottimale, calcolare la soluzione con accuratezze relativa $10^{-6}$, $10^{-10}$, eps (scrivere soluzioni, stime dell'errore e numero di iterazioni).
3. Confrontare le soluzioni ottenute con quella che si ottiene col comando Matlab " \ " e calcolare l' errore vero per ciascuna accuratezza. (scrivere i risultati in una opportuna tabella).
4. Enunciare una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo.
5. Ripetere il punto 2. con il metodo di Jacobi e confrontare i risultati.
6. (F + 2 punti) Risolvere i sistema con il metodo di eliminazione di Gauss con pivot totale e confrontare il risultato con quello al punto 3.
7. Qual'è l'utilità del pivoting nel metodo di eliminazione di Gauss?

---

**Quesito C (punti 6)** Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 + 5\cos^2(2x)}$ nell'intervallo $[0, \pi/2]$, e:

1. Calcolare i polinomi interpolatori $P_n(x)$ di grado $n = 6, 11, 20$, con nodi equispaziati nell'intervallo dato *(Scrivere esplicitamente il polinomio di grado 6 con coefficienti in formato "short").*
2. Disegnare i tre polinomi sovrapponendoli al grafico di $f(x)$ *(utilizzare un colore diverso per polinomio)*, evidenziando i nodi. [chiamare il docente per la verifica a video dei grafici]
3. Disegnare la funzione errore $f(x) - P_n(x)$ per ciascun grado $n$ calcolato. In base ai grafici ottenuti cosa si può affermare sulla convergenza dei polinomi interpolanti con nodi equispaziati al cresere di $n$ ? (Motivare la risposta). [chiamare il docente per la verifica a video dei grafici]
4. Disegnare la 'spline' su 15 nodi equispaziati. [chiamare il docente per la verifica a video dei grafici]

**Quesito D (punti 6)** E' data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & -9 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di modulo massimo e minimo con accuratezza relativa pari a $10^{-3}$,$10^{-9}$, eps, utilizzando il metodo delle potenze.
2. Per ciascuna accuratezza riportare in una tabella: l' autovalore, la stima dell' errore (assoluto o relativo), il numero di iterazioni effettuate. Confrontare i risultati con quelli ottenuti con un comando Matlab.
3. Scrivere la definizione di autovalore e autovettore di una matrice.
4. Illustrare brevemente il metodo delle potenze.

---

**Quesito E (punti 6)** Calcolare l' integrale definito $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx$, dove $f(x)$ è la funzione del quesito **C**, con accuratezza assoluta pari a: $10^{-4}, 10^{-9}, 10^{-14}$, utilizzando l' algoritmo adattivo di Cavalieri–Simpson.

1. Riportare in tabella il valore dell' integrale, la stima dell' errore assoluto che viene restituito dall' algoritmo e l' errore vero. (per trovare il risultato esatto avvelersi del comando `Q = QUADL(FUN,A,B,TOL)` ).
2. Confrontare i valori di stima di errore assoluto ed errore vero, e commentare.
3. (F) Ripetere i punti precedenti con l' algoritmo di quadratura dei trapezi non-adattiva, e confrontare i risultati (+ 2 punti).
4. Illustrare brevemente le formule di Newton–Cotes, spiegando il significato dei pesi, e gli eventuali problemi di convergenza.

---

Esempio tabella:

| Accuratezza richiesta | Valore dell' integrale | Stima errore assoluto | Errore vero assoluto |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |