Stima dell'errore con la formula trapezoidale composita

Sia T_{n+1} il valore dell'integrale ottenuto con la formula trapezoidale composita su n sottointervalli di ampiezza h. Il modulo dell' errore è dato da:

$$|R_{n+1}| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\xi_1)| \qquad \xi_1 \in (a,b)$$

Sia T_{2n+1} il valore dell'integrale ottenuto con la formula trapezoidale composita su $2n$ sottointervalli di ampiezza $h/2$. Il modulo dell' errore è dato da:

$$|R_{2n+1}| = \frac{b-a}{12} \frac{h^2}{2} |f''(\xi_2)| \qquad \xi_2 \in (a,b)$$

Il valore esatto I dell'integrale valutato sulle due serie di punti è dato da:

$$I = T_{n+1} + R_{n+1} = T_{2n+1} + R_{2n+1}$$

Se

$$f''(\xi_1) \simeq f''(\xi_2) \Rightarrow |R_{2n+1}| \simeq |R_{n+1}/4|$$

si può scrivere:

$$|T_{n+1} - T_{2n+1}| = |R_{n+1} - R_{2n+1}| \simeq |R_{n+1} - R_{n+1}/4| = \frac{3}{4}|R_{n+1}|$$

Quindi l'errore stimato con l'applicazione della formula trapezoidale composita è:

$$|R_{n+1}| \simeq \frac{4}{3}|T_{n+1} - T_{2n+1}| \qquad |R_{2n+1}| \simeq \frac{1}{3}|T_{n+1} - T_{2n+1}|$$

Si sottolinea che con questa formula si riesce da dare una stima dell'errore a partire dai valori calcolati con la formula trapezoidale.

Se applichiamo lo stesso procedimento all'errore della formula di Simpson:

$$R_{n+1} = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(iv)}(\xi)$$

si ottiene:

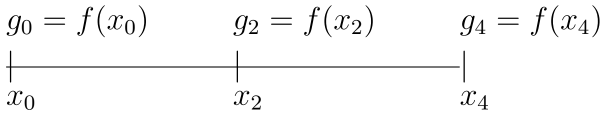
$$|R_{n+1}| \simeq \frac{16}{15}|T_{n+1} - T_{2n+1}|, \qquad |R_{2n+1}| \simeq \frac{1}{15}|T_{n+1} - T_{2n+1}|$$

Algoritmo a schema fisso basato sulla formula composita di Simpson

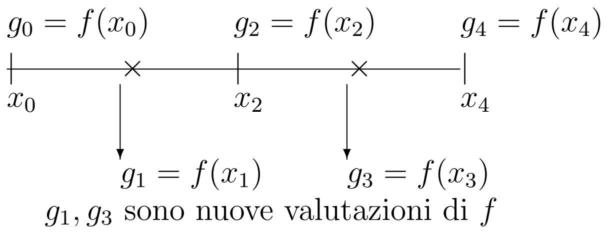
Idea

Ad ogni iterazione il numero di intervalli viene raddoppiato, in modo da conservare tutte le valutazioni già fatte della funzione

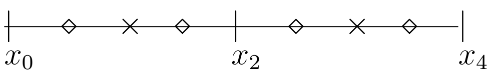
- Primo passo:



- Secondo passo:



- Terzo passo:



Le valutazione della funzione nei passi precedenti, si conservano nel vettore g.

Il procedimento termina se:

- la stima dell'errore dell'integrale raggiunge l'accuratezza desiderata

- sono state impiegate tutte le N_{max} iterazioni previste.

Descrizione

Bisogna fornire i seguenti parametri di input:

- algoritmo per il calcolo della funzione integranda
- gli estremi di integrazione: a, b.
- l'accuratezza desiderata: ϵ.
- il numero massimo di iterazioni: N_{max}.

pseudo-codice dell'algoritmo:

```
g_0 = f(a)
g_2 = f((a+b)/2)
g_4 = f(b)

\\ formula di Simpson
s_0 = (b-a)(g_0 + 4*g_2 + g_4)/6
N = 4
h = (b-a)/4

g_1 = f(a+h)
g_3 = f(a+3h)

\\ formula di Simpson composta su due intervalli
s_1 = h(g_0 + 4*(g_1 + g_3) + 2*g_2 + g_4)/3

for m = 1 to N_max do
        if |s_1 - s_0| <= 15 epsilon then
                I = s_1 + (s_1 - s_0)/15
                exit;
        s_0 = s_1
        h = h/2
        N_2 = 2*N   // raddoppio del numero dei sottointervalli

                    // le valutazioni gia' fatte di f vengono spostate
                    // nelle componenti di g di indice pari
        for j=0 to N-1 do
```

```
                g_(N_2-2j) = g_(n-j)
        end j

        for k=0 to N-1 do
                g_(2k+1) = f(a+(2k+1)h)
        end k

        sum = 0
        for i=0 to N-1 do
                sum = sum + g_(2i) + 4*g_(2i+1) + g_(2i+2)
        end i

        s_1 = h*sum/3
        N=N_2
end m

write "La precisione richiesta non e' stata raggiunta in
       N_max iterazioni"
```