

# Norma Compatibile

Se  $\|A\|$  è una norma indotta da quella di vettore:

- Se  $x$  è un vettore:  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$  (**norma compatibile**)
- Se  $B$  è una matrice:  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  (**norma sub-moltiplicativa**)

# Condizionamento di un sistema lineare

Dato un sistema lineare  $Ax = b$  si vuole stimare la variazione relativa  $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$  della soluzione rispetto alla variazione relativa del termine noto  $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$  e della matrice  $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ .

Variatione sul termine noto:

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Il **numero di condizionamento**  $K_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$  dà indicazione sull'amplificazione dell'errore sul risultato del problema.  $p$  specifica la norma utilizzata per i calcoli.

## Osservazioni sul numero di condizionamento 1

- Le matrici unitarie ( $AA^T = A^T A = I$  se  $A$  a coefficienti reali) sono le meglio condizionate.
- $K_2(A) = 1$  se  $A$  è proporzionale ad una matrice unitaria.
- Il numero di condizionamento non deve essere troppo grande.
- Relativamente alla risoluzione di un sistema lineare, il  $\det(A)$  non è un buon indice di condizionamento (può essere  $\det(A) = 1$  con  $K(A) = 3^n$ ).

## Osservazioni sul numero di condizionamento 2

- Il condizionamento può essere modificato da uno scaling della matrice.
- Anche il residuo  $r = A\bar{x} - b$  ( $\bar{x} \equiv$  soluzione calcolata) non dà una buona indicazione della precisione della soluzione quando la matrice è mal-condizionata: può essere  $\|r\| \sim 0$ , ma  $\bar{x} \neq$  soluzione esatta.

# Matrici Singolari

Relazione tra matrici singolari e numero di condizionamento: se una matrice è singolare, il reciproco del numero di condizionamento è nullo.

Teorema: se  $A$  è una matrice regolare e  $B$  è singolare:

$$\frac{1}{K_p(A)} \leq \frac{\|A - B\|_p}{\|A\|_p}.$$

Tanto più  $A$  è "vicina" ad una matrice singolare, tanto più il numero di condizionamento è grande.

# Nomenclatura di matrici

- Matrici Simmetriche:  $A = A^T$ .
- Matrici definite positive:  $x^T A x > 0$  per ogni vettore  $x$  non nullo.
- Matrici a banda: gli elementi diversi da zero sono vicini alla diagonale principale. Se  $i$  è l'indice di riga, gli elementi con indice di colonna  $j$  pari a  $j > i + p$  e  $j < i + q$  sono tutti nulli. Se  $p = q = 1$  la matrice si dice *tridiagonale*.
- Matrici sparse: il numero degli elementi della matrice che non sono nulli è  $\mathcal{O}(n)$  (ci sono molti elementi nulli).
- Matrici diagonalmente dominanti:  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ .

# Algoritmo di Thomas

Se  $A$  è una matrice tridiagonale, si utilizza la fattorizzazione LU senza pivoting:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

# Algoritmo di Thomas

Se  $A$  è una matrice tridiagonale, si utilizza la fattorizzazione LU senza pivoting:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & c_3 & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = a_1, \beta_i = b_i / \alpha_{i-1}, \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}, i = 1, \dots, n$$

## Fattorizzazione di Cholesky

Se  $A$  è matrice simmetrica e definita positiva,  $\exists$  matrice  $L$  triangolare inferiore con  $l_{ii} > 0$  tale che:

$$A = LL^T$$

Ai fini della fattorizzazione si calcola solo la matrice  $L$ , si dimezza la complessità di calcolo:  $n^3/3$ .

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk})/l_{jj}, \quad j = 1, \dots, i-1$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

Il comando MATLAB è: chol( $A$ ).

## Metodi iterativi

Caratteristiche dei metodi iterativi per risolvere i sistemi di equazione  $Ax = b$  (con  $\det(A) \neq 0$ ):

- Utili quando matrice dei coefficienti  $A$  è di ordine elevato e sparsa. La sparsità viene preservata e gli algoritmi sono di semplice implementazione.
- Studio preliminare di convergenza.
- A volte si devono utilizzare tecniche di accelerazione.
- Si deve costruire una *Matrice di iterazione*, con tecniche di decomposizione (Jacobi e Gauss-Seidel).

## Metodi di decomposizione

Dato  $Ax = b$  si costruisce una procedura di iterazione:

$$Ax = b \text{ se } A = M - N \Rightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

Sostituendo  $N$  con  $M - A$ :

$$x^{(n+1)} = (I - M^{-1}A)x^{(n)} + M^{-1}b$$

si dice che

$$B = (I - M^{-1}A)$$

è la matrice di iterazione.

NOTA: non confondere  $B$  con  $A$ .

## Metodi di decomposizione

Si sceglie un vettore iniziale  $x^{(0)}$  (che approssima la soluzione), e si crea una sequenza di vettori  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots$  che risulta da applicazioni successive della matrice di iterazione  $B$ .

- Se il procedimento è convergente, per  $n \rightarrow \infty$  la sequenza tende alla soluzione.
- Dalla matrice di iterazione dipendono la convergenza e la rapidità di convergenza.
- La scelta della matrice  $M$ , e quindi di  $B$ , è dettata anche da criteri di praticità nei calcoli.

Vedremo due scelte.

## Metodo di Jacobi

La matrice  $M$  è la parte diagonale di  $A$ . Sia  $M = D = \text{diag}(A)$ , sostituendo nell'equazione di iterazione, si ha:

$$x^{(n+1)} = B_J x^{(n)} + D^{-1}b \quad B_J = I - D^{-1}A$$

oppure

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - D^{-1}Ax^{(n)} + D^{-1}b$$
$$\underbrace{(x^{(n+1)} - x^{(n)})}_{\delta x^{(n)}} = D^{-1} \underbrace{b - (Ax^{(n)})}_{r \equiv \text{residuo}} = -D^{-1}r$$

## Metodo di Jacobi

Formula esplicita di iterazione:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Si ottiene direttamente dal sistema di equazione, isolando le  $x_i$ .

Il metodo è parallelizzabile (sostituzioni simultanee).

NOTA: se qualche elemento della diagonale di  $A$  è nullo, il metodo non si può applicare. Bisogna effettuare degli scambi di righe e/o colonne per evitare questo inconveniente.