Avviso

I contenuti di queste slide non sono esaustivi ai fini del buon esito dell'esame. Fare riferimento anche alle lezioni tenute in aula ed ai testi consigliati:

- G. Monegato, Fondamenti di Calcolo Numerico. Ed. CLUT
- A. Quarteroni, F. Saleri, 'Calcolo Scienifico, esercizi e problemi risolti con matlab e octave' Springer.

Sistemi di equazioni lineari

La risoluzione di un sistema lineare rappresenta un tipico esempio di problema inverso.

- Il modello lineare è più generale del sistema lineare. Molti di questi modelli possono essere discretizzati e ricondotti a sistemi lineari.
- modello lineare:

$$\boldsymbol{y = Ax \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = A(\alpha x_1 + \beta x_2)}$$

- Ad una varietà di sistemi lineari corrisponde una varietà di algoritmi risolutivi.

Metodi diretti e iterativi

- Metodi diretti:
  - forniscono la soluzione esatta (in assenza errori di arrotondamento) in un numero <u>finito</u> di operazioni.
  - Esiste un procedimento algebrico per esplicitare tutte le incognite.
  - Si basano principalmente sul metodo di eliminazione di Gauss.
- Metodi iterativi:
  - il problema lineare viene inizialmente trasformato,
  - poi si procede per iterazione.
  - La soluzione è ottenuta come limite di una successione.

Notazione matriciale

Si usa la notazione matriciale per scrivere in modo compatto i sistemi di equazione:

$$Ax = b$$

- $A \in R^{n\times n}$: matrice dei coefficienti.
- $b \in R^n$: vettore dei termini noti.
- x: vettore delle n incognite.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Determinante di una matrice

Determinante della matrice A:

$$|A| = \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} (-1)^{[p_1,\cdots,p_n]} a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$$

- $(p_1, \cdots, p_n)$: insieme di tutte le permutazioni degli indici $1, 2, \cdots, n$.
- $[p_1, \cdots, p_n]$: segno della permutazione.

Metodo di Cramer

Metodo di Cramer per la risoluzione di sistemi lineari.

- Calcolare il deteminante della matrice dei coefficienti.
- sostituire la colonna $j-$esima con il vettore b dei coefficienti.
- Calcolare il determinante di questa nuova matrice.
- Dividere questo determinante per il precedente: si ottiene il valore dell'incognita x_j.

Complessità dello sviluppo di Laplace

Se si utilizza lo sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante (o la sua definizione), il metodo di Cramer risulta poco applicabile da un punto di vista pratico: si devono calcolare $n+1$ determinanti.
Infatti si trova che il numero di moltiplicazioni da effettuare è:

- $n-1$ moltiplicazioni per ogni addendo.
- $n!$ addendi (permutazione di n indici).

In totale si hanno $(n-1)(n+1)!$ moltiplicazioni.

La complessità computazionale è dell'ordine del fattoriale.