I VOLUMI DELLA COLLANA ESAMI

1 SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI. Esercizi
43 esercizi risolti e discussi forniscono un'efficace guida pratica alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Vengono affrontati 17 sistemi non omogenei fondamentali, 8 sistemi omogenei fondamentali, 10 sistemi parametrici. Compendiano gli argomenti trattati 8 temi d'esame risolti.

2 INTRODUZIONE ALLO STUDIO DELLE FUNZIONI
Guida alla conoscenza degli argomenti basilari per lo studio sistematico delle funzioni: disequazioni, valori assoluti, estrazione di radice, funzioni inverse, calcolo di periodi, limiti, derivate, ecc. Gli argomenti sono corredati di esercizi esplicativi nei quali alle considerazioni algebriche è abbinata l'interpretazione grafica.

3 FUNZIONI DA ESAME
67 funzioni scelte per dare un'opportuna preparazione all'esame scritto di ANALISI I. Ognuna di esse è svolta integralmente in modo da rendere facilmente comprensibile ed ogni operazione difficile (limiti, derivate, ...) è eseguita. Tutti i grafici sono stati realizzati con l'ausilio di un calcolatore.

4 LIMITI. Esercizi
400 esempi ed esercizi scelti in modo da condurre lo studente ad un agevole calcolo di limiti di funzioni comunque complicate e di qualsiasi tipo: funzioni razionali e irrazionali, funzioni logaritmiche ed esponenziali, funzioni circolari dirette ed inverse, funzioni iperboliche dirette e inverse.

5 DERIVATE. Esercizi
252 esercizi di derivazione di funzioni in coordinate cartesiane ortogonali, in coordinate parametriche e polari. Derivazione di funzioni esplicite ed implicite, ad una o a due variabili. Derivate successive. Differenziali. L'applicazione della derivata a problemi tecnici fondamentali ha lo scopo di rendere meno difficoltoso lo studio delle scienze applicate.

6 INTEGRALI. Esercizi
274 integrali completamente svolti, preceduti da una parte introduttiva comprendente richiami di algebra e di trigonometria circolare e iperbolica.

7 ALGEBRA DELLE MATRICI. Volume primo
178 esercizi per spiegare organicamente le leggi che governano l'algebra delle matrici; interpretazione vettoriale delle matrici; proprietà dei determinanti; ricerca del rango di una matrice; applicazioni dei determinanti alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

8 ALGEBRA DELLE MATRICI. Volume secondo
140 esempi ed esercizi per illustrare in modo efficace gli spazi vettoriali, le trasformazioni lineari, la ricerca degli autovalori e degli autovettori di una matrice, le matrici simili e i procedimenti per triangolarizzare o per diagonalizzare una matrice; applicazioni a coniche e quadriche.

9 L'ALGEBRA DELLE MATRICI E LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI
80 sistemi omogenei, non omogenei, parametrici, trigonometrici affrontati con il metodo di Gauss-Jordan, il più efficace nella risoluzione dei problemi tecnici.

10 NUMERI COMPLESSI
100 esercizi sufficienti per acquisire la pratica necessaria sui numeri complessi nelle loro quattro forme e per meglio fissare i concetti teorici espressi nel modo più elementare possibile. 22 temi d'esame risolti.

11 CORSO PROPEDEUTICO DI MATEMATICA PER GLI STUDENTI DEL PRIMO ANNO DI UNIVERSITÀ
284 esempi ed esercizi: dai polinomi alle disequazioni, dai logaritmi alle funzioni trigonometriche: i fondamenti della matematica necessari per affrontare in modo sicuro gli studi universitari.

12 LO STUDIO DELLA FUNZIONE
36 funzioni di vario tipo, precedute da una parte introduttiva avente la funzione di traccia per lo studio di qualsiasi funzione. Corredati di numerosi esempi ed esercizi, sono trattati: disequazioni, valori assoluti, estrazione di radice, funzioni inverse, calcolo di periodi, limiti, derivate, ecc.

13 IL LIMITE
337 esercizi scelti per condurre lo studente ad un'agevole ricerca dei limiti di funzioni di qualunque tipo e comunque complicate.

14 LA DERIVATA
215 esercizi di derivazione di funzioni vario tipo, esplicite ed implicite, ad una e a due variabili. Differenziali. Derivate successive. Significato ed applicazioni della derivata.

15 L'INTEGRALE
250 esercizi di integrazione di funzioni di vario tipo; hanno lo scopo di condurre gradualmente lo studente ad una rapida familiarizzazione con l'operatore integrale.

16 CIRCUITI TRIFASE
36 esercizi concernenti l'analisi di reti trifase in regime sinusoidale: reti simmetriche equilibrate e non equilibrate; sistemi trifase simmetrici con neutro. Misure di potenze attive, reattive, apparenti nei sistemi trifase.

17 CAMPI E CIRCUITI MAGNETICI
46 esercizi completamente svolti, concernenti campi e circuiti magnetici, induttori mutuamente accoppiati, azioni meccaniche generate dalle correnti elettriche, elettromagneti.

18 EQUAZIONI DIFFERENZIALI
273 esercizi per acquisire la tecnica necessaria ad affrontare le equazioni differenziali nelle loro più svariate forme.

19 GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO
173 esercizi svolti concernenti la retta nelle sue varie forme e le sue proprietà; fasci di rette a centro proprio ed a centro improprio; traslazione e rotazione degli assi di riferimento; luoghi geometrici; circonferenza e sue proprietà; coniche in forma canonica: ellisse, parabola, iperbole; funzione omografica.

continua in seconda di copertina

ISBN 88-85255-29-9
9 788885 255296

€ 5,50

29 - SERIE NUMERICHE - ESERCIZI

29 TECNOS

Collana Esami

Giulio PANZARASA
Salvatore TRIBULATO

SERIE NUMERICHE

ESERCIZI

94 esercizi svolti conducono gradualmente il lettore dalle progressioni aritmetiche e geometriche sino allo studio delle serie a termini reali di qualsiasi segno, attraverso l'esame dei diversi criteri di convergenza: criterio del confronto, del quoziente, del rapporto, della radice, di Kummel, di Raabe, dell'integrale

Giulio PANZARASA - Salvatore TRIBULATO

SERIE NUMERICHE

ESERCIZI

EDIZIONI TECNOS S.r.l. – MILANO

Stampa della EDIZIONI TECNOS s.r.l. - Milano
Via Rucellai, 23 - Tel. (02) 25 71 834

INDICE

1. UTILI NOZIONI FONDAMENTALI

2. SERIE NUMERICHE

3. CRITERI DI CONVERGENZA E DI DIVERGENZA

4. SERIE IN GENERALE

1 - UTILI NOZIONI FONDAMENTALI

1.1.- Progressioni aritmetiche e geometriche

Consideriamo una sequenza di numeri quale ad esempio

a) $\quad 2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$

Tale sequenza è costituita mediante una ben definita regola alla quale ciascun termine soddisfa: nell'esempio scelto ciascun termine è dato dal precedente aumentato di 3 (o, se si vuole, dal seguente diminuito di 3). La regola ci permette di determinare il termine successivo e di estendere la sequenza sino all'infinito.

Una sequenza di numeri soddisfacente ad analoghe condizioni è detta successione o progressione numerica. Così

b) $2, 4, 6, 8, \ldots$ è una progressione aritmetica
(regola: ogni termine è dato dal precedente aumentato di 2)

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ è una progressione geometrica
(regola: ogni termine è dato dal precedente moltiplicato per 1/2)

$1, -2, 3, 5, 11, \frac{1}{2}, \ldots$ non è una successione numerica
(non esiste una regola che permetta di determinare il termine successivo di un qualunque termine).

In generale indicheremo con:

u_1 il primo termine

u_2 il secondo termine

u_n l'ennesimo termine

La successione, in generale, si indicherà con

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n, \ldots \qquad [1.1.1]$$

Se la regola (legge di formazione) è tale che ciascun termine è dato dal precedente più una costante d (detta ragione) [cfr. es. a), b)] la sequenza è una *progressione aritmetica*; se la regola è tale che ciascun termine è dato dal precedente moltiplicato per una costante q (detta ragione) [cfr. es. c)] la sequenza è una *progressione geometrica*.

L'esempio: a) è quello di una progressione aritmetica di ragione $d = 3$;
b) è quello di una progressione aritmetica di ragione $d = 2$;
c) è quello di una progressione geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$

1.2.- Somma di n termini di una progressione aritmetica

In base alla definizione una *progressione aritmetica* avente ragione d e primo termine u_1 si può, in generale, scrivere:

$$u_1,\ u_1 + d,\ u_1 + 2d,\ u_1 + 3d, \dots \text{ (}^1\text{)} \qquad [1.2.1]$$

Cosicché l'n-esimo termine è

$$u_n = u_1 + (n-1)d \qquad [1.2.2]$$

È facile verificare che

a) la somma di due termini estremi (1° ed n^{esimo}) è uguale a quella di due termini equidistanti dagli estremi [ad esempio 2° ed $(n-1)^{esimo}$; 3° ed $(n-2)^{esimo}$; ecc.]. Infatti

$u_1 + u_n = u_1 + [u_1 + (n-1)d] = 2u_1 + (n-1)d$

$u_2 + u_{n-1} = u_2 + [u_1 + (n-2)d] = (u_1 + d) + [u_1 + (n-2)d] = 2u_1 + (n-1)d$

Esempio.

1. Sia $u_1 = -7$; costruire la progressione aritmetica di 10 termini di ragione $d = 3$ e verificare l'asserto a).

La progressione è:

$-7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$

Si ha:

$u_1 + u_{10} = -7 + 20 = 13$

$u_2 + u_9 = -4 + 17 = 13$

$u_3 + u_8 = -1 + 14 = 13$

$u_4 + u_7 = 2 + 11 = 13$

$u_5 + u_6 = 5 + 8 = 13$

Sulla base dell'asserto a) si può dimostrare che

b) la somma S_n dei primi n termini di una *progressione aritmetica* di ragione d il cui primo termine è u_1, è:

$$S_n = n\left(u_1 + \frac{n-1}{2}d\right) = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] \qquad [1.2.3]$$

Infatti

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n-1} + u_n =$$
$$= (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \dots$$

(¹) Si osservi che nel termine di posto n compare $(n-1)$ come coefficiente di d.

Il numero di binomi in parentesi è metà di n e per l'asserto a) le somme in parentesi sono tutte uguali. Quindi:

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = [\text{per la } [1.2.2]] = \frac{n}{2}[u_1 + u_1 + (n-1)d] =$$
$$= \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] = n\left(u_1 + \frac{n-1}{2}d\right)$$

Esempi

2. Trovare la somma dei primi 50 interi naturali.

Si tratta di una *progressione aritmetica* con ragione $d = 1$ e primo termine 1. Quindi per la [1.2.3]:

$$S_{50} = 50\left(1 + \frac{50-1}{2}\cdot 1\right) = 25(2 + 49) = 25\cdot 51 = 1\,275$$

3. Trovare la somma dei primi 200 numeri dispari.

Si tratta di una *progressione aritmetica* con ragione 2 e primo termine 1. Quindi per la [1.2.3]:

$$S_{200} = \frac{200}{2}[2\cdot 1 + (200-1)\cdot 2] = 100(2 + 398) = 100\cdot 400 = 40\,000$$

4. Trovare la somma dei primi 35 termini della progressione aritmetica:

$12, 8, 4, 0, -4, -8, -12, \dots$

Si ha: $u_1 = 12 \quad d = -4$.

Per la [1.2.3]:

$$S_{35} = \frac{35}{2}[2\cdot 12 + (35-1)(-4)] = \frac{35}{2}(24 - 136) = \frac{35}{2}(-112) = -35\cdot 56 =$$
$$= -1\,960$$

1.3.- Somma di n termini di una progressione geometrica

In base alla definizione una *progressione geometrica* avente ragione q e primo termine u_1, in generale, si può scrivere:

$$u_1,\ u_1 q,\ u_1 q^2,\ u_1 q^3, \dots \text{ (}^1\text{)} \qquad [1.3.1]$$

Cosicché l'n-esimo termine u_n è:

$$u_n = u_1 q^{n-1} \qquad [1.3.2]$$

(¹) Si osservi che nel termine di posto n compare $(n-1)$ come esponente di q.

a) Anche in questo caso è facile verificare che il prodotto di due termini estremi (1° ed n^{esimo}) è uguale a quello di due termini equidistanti dagli estremi [ad es. 2° e $(n-1)^{\text{esimo}}$; 3° ed $(n-2)^{\text{esimo}}$; ecc.].

Infatti:

$$u_1 \cdot u_n = u_1 \cdot u_1 q^{n-1} = u_1^2 q^{n-1}$$
$$u_2 \cdot u_{n-1} = u_2 \cdot u_1 q^{n-2} = u_1 q \cdot u_1 q^{n-2} = u_1^2 q^{n-1}$$

Esempio

5. Sia $u_1 = 3$; costruire la *progressione geometrica* di 10 termini con ragione $q = 2$ e verificare l'asserto a).

La progressione è:

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1 536

Si ha:

$u_1 \cdot u_{10} = 3 \cdot 1\,536 = 4\,608$

$u_2 \cdot u_9 = 6 \cdot 768 = 4\,608$

$u_3 \cdot u_8 = 12 \cdot 384 = 4\,608$

$u_4 \cdot u_7 = 24 \cdot 192 = 4\,608$

$u_5 \cdot u_6 = 48 \cdot 96 = 4\,608$

b) La somma S_n dei primi n termini di una *progressione geometrica* è:

$$S_n = u_1 \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \right) = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1 q^n}{1-q} \qquad [1.3.3]$$

Infatti:

$$S_n = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + u_1 q^4 + \dots + u_1 q^{n-1} \qquad [1.3.4]$$

moltiplicando 1° e 2° membro per $-q$:

$$-q S_n = -u_1 q - u_1 q^2 - u_1 q^3 - u_1 q^4 - u_1 q^5 + \dots - u_1 q^n \qquad [1.3.5]$$

Sommando membro a membro la [1.3.4] e la [1.3.5] si ottiene:

$$S_n - q S_n = u_1 - u_1 q^n$$

$$(1-q) S_n = u_1 (1 - q^n) \quad \rightarrow \quad S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = u_1 \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \right)$$

Esempi

6. Trovare la somma dei primi 8 termini della progressione geometrica avente ragione $q = \frac{1}{2}$ e primo termine 3.

La progressione è:

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \frac{3}{128}, \dots$$

Per la [1.3.3] si ha:

$$S_8 = 3 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} \right) = 3 \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 \right] = 3 \left(2 - \frac{1}{128} \right) = 3 \cdot \frac{255}{128} = \frac{765}{128}$$

7. Calcolare il 15° termine della progressione dell'es. 6.

Per la [1.3.2] si ha:

$$u_{15} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = \frac{3}{2^{14}}$$

8. Trovare l'espressione generale della somma dei primi n interi naturali.

La sequenza è una progressione aritmetica di ragione $d = 1$: 1, 2, 3, 4, 5, ... n, ...
Per la [1.2.3] si ha:

$$S_n = n \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot 1 \right) = n \frac{n+1}{2} = \frac{n}{2}(n+1)$$

1.4 - Somma di n termini di una successione

La somma S_n di n termini di una successione

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

si indica con $\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

ove u_n è il termine n^{esimo} della successione.

Così, ad esempio:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$$

$\sum_{i=1}^{n} i$ è la somma dei primi n interi naturali

$\sum_{i=1}^{n} i^2$ è la somma dei quadrati dei primi n interi naturali.

Esempi:

Il termine generale della successione dell'es. 2 è $u_n = n$.
La somma dei primi 50 termini è quindi (cfr. es. 2):

$$\sum_{i=1}^{50} i = 1\,275$$

Nell'es. 3 è $u_n = 2n - 1$, quindi il risultato dell'esempio può essere scritto

$$\sum_{i=1}^{200} (2i - 1) = 40\,000$$

Nell'es. 4 è $u_n = 16 - 4n$, quindi il risultato dell'esempio può essere scritto

$$\sum_{i=1}^{35} (16 - 4i) = -1\,960$$

Nel caso dell'esempio 6 è $u_n = \frac{3}{2^{n-1}}$ ed il risultato dell'esempio può essere scritto

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{3}{2^{i-1}} = \frac{765}{128}$$

Nel caso di una successione (progressione) aritmetica di ragione d e primo termine u_1 è $u_n = u_1 + (n-1)d$, quindi per la [1.2.3] si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} [u_1 + (i-1)d] = n\left(u_1 + \frac{n-1}{2}d\right) \qquad [1.4.1]$$

mentre per una successione (progressione) geometrica di ragione q e primo termine u_1 è $u_n = u_1 q^{n-1}$, quindi per la [1.3.3] si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} u_1 q^{i-1} = u_1\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) \qquad [1.4.2]$$

Consideriamo ora la sequenza numerica seguente:

$$\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{25}{8}, \frac{65}{16}, \frac{161}{32}, \frac{385}{64}, \ldots \qquad [1.4.3]$$

A prima vista è difficile individuare la regola di formazione di tale sequenza. Mentre i denominatori crescono in proporzione geometrica ($q = 2$), i numeratori non sono in progressione geometrica né in progressione aritmetica.

La sequenza può essere scritta:

$$1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{8}, 4 + \frac{1}{16}, 5 + \frac{1}{32}, 6 + \frac{1}{64}, \ldots$$

In questa forma si individua la regola di formazione, ad esempio, del 7° termine $\left(7 + \frac{1}{128}\right)$ e quindi dei successivi.

Il termine generale u_n di tale sequenza è allora costituito dalla somma:

$$n + \frac{1}{2^n} \quad \text{per} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Al variare di n il primo addendo cresce in progressione aritmetica (ragione $d = 1$, primo termine 1); contemporaneamente il secondo addendo decresce in progressione geometrica (ragione $q = 1/2$, primo termine $1/2$).

Alla richiesta:

9. Calcolare la somma dei primi n termini di tale successione cioè

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i + \frac{1}{2^i}\right)$$ si può rispondere in due modi:

1) $S_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(2 + \frac{1}{4}\right) + \left(3 + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right) =$

$$= (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = S_{1n} + S_{2n}$$

Il primo addendo per la [1.4.1] dà:

$$S_{1n} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$$

Il secondo addendo per la [1.4.2] dà:

$$S_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Per cui

$$S_n = S_{1n} + S_{2n} = \frac{n}{2}(n+1) + \frac{2^n - 1}{2^n}$$

2) $\sum_{i=1}^{n}\left(i + \frac{1}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2^n - 1}{2^n}$$

L'uguaglianza dei risultati ottenuti nei due modi ci assicura che la sommatoria gode della proprietà distributiva rispetto alla somma, cioè

$$\sum_{i=1}^{n} [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i) \qquad [1.4.4]$$

Per esempio per $n = 6$ si calcola la somma dei primi 6 termini della sequenza [1.4.3]:

$$\sum_{i=1}^{6}\left(i + \frac{1}{2^i}\right) = \frac{6(6+1)}{2} + \frac{2^6 - 1}{2^6} = 21 + \frac{63}{64} = \frac{1\,407}{64}$$

10. Data la successione

$1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \dots, n^2, \dots$

calcolare $\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 \quad$ cioè la somma dei quadrati dei primi n numeri interi naturali.

La successione può essere scritta:

$$1,\ 2+2,\ 3+3+3,\ \dots,\ \underbrace{n+n+n+n+\dots}_{n \text{ volte}}$$

e la somma da calcolare:

$$(1+2+3+\dots+n)+(2+3+\dots+n)+(3+\dots+n)+\dots+(n-1+n)+n$$

Ognuna delle somme in parentesi è una progressione aritmetica con ragione $d = 1$ e primo termine rispettivamente $1, 2, 3, 4, \dots, (n-1), n$.

Per la [1.2.3] l'espressione

$$S_i = (n+1-i)\left(i + \frac{n-i}{2}\right) \qquad \text{con} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

rappresenta, al variare di i, ciascuna delle somme suddette:

per $i = 1$ la prima somma
per $i = 2$ la seconda somma
per $i = 3$ la terza somma
....
per $i = n$ l'n^{esima} somma

Pertanto la somma cercata si può scrivere:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(n+1-i)\left(i+\frac{n-i}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n^2 - i^2 + n + i)$$

Si osservi che, sviluppando la sommatoria, gli addendi n^2 ed n compaiono n volte, per cui:

$$\sum_{i=1}^{n}(n^2 - i^2) = n\cdot n^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = n^3 - \sum_{i=1}^{n} i^2 \qquad \sum_{i=1}^{n}(n+1) = n\cdot n + \sum_{i=1}^{n} i = n^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

Pertanto:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(n^2 - i^2) + \sum_{i=1}^{n}(n+i)\right] = \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = [\text{cfr. es. 8}] = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2}{3}\,\frac{2n^3 + 2n^2 + n^2 + n}{4} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

11. Calcolare la somma dei cubi dei primi n interi naturali:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

La successione può essere scritta

$$1 + (2^2 + 2^2) + (3^2 + 3^2 + 3^2) + \dots + \underbrace{(n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2)}_{n \text{ volte}}$$

$$(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (3^2 + \dots + n^2) + \dots +$$
$$+ [(n-1)^2 + n^2] + (n^2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{1} i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{2} i^2\right) + \dots + \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n-2} i^2\right) +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2\right)$$

Cioè

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = n\sum_{i=1}^{n} i^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i^2 + \sum_{i=1}^{2} i^2 + \sum_{i=1}^{3} i^2 + \dots + \sum_{i=1}^{n-1} i^2\right) =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{i} i^2\right) = [\text{per l'es. 10}] = n\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)(2i+1)}{6} =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n-1}(2i^3 + 3i^2 + i) = n\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-1} i^3 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n-1} i$$

Essendo

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 - n^3 \qquad \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 - n^2 \qquad \sum_{i=1}^{n-1} i = \sum_{i=1}^{n} i - n$$

si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = n\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^3 - n^3\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - n^2\right) - \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{n} i - n\right) =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{6}n$$

$$\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(n - \frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} =$$

$$= \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{6}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(2n-1)}{12} - \frac{n(n+1)}{12} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}(4n^2 - 1 - 1 + 4n + 2) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}(4n^2 + 4n) = \frac{1}{3}n^2(n+1)^2$$

e quindi:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Riepiloghiamo i più importanti risultati ottenuti riguardanti la somma dei primi termini di particolari successioni.

$$\sum_{i=1}^{n}[u_1 + (i-1)d] = n\left(u_1 + \frac{n-1}{2}d\right) \qquad [1.4.5\text{-a}]$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_1 q^{i-1} = u_1\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) \qquad [1.4.5\text{-b}]$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad [1.4.5\text{-c}]$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad [1.4.5\text{-d}]$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \qquad [1.4.5\text{-e}]$$

Applicazioni delle [1.4.5]:

12. Il termine generale di una successione numerica è

$u_n = n(2n+1)$

Trovare la somma $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(2i+1)$ dei primi n termini (caso particolare $n = 10$).

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i(2i+1) = \sum_{i=1}^{n}(2i^2 + i) = 2\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i = [\text{per la } [1.4.5\text{-d}] \text{ e la } [1.4.5\text{-c}]] =$$

$$= 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(4n+2+3) =$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$$

Per $n = 10$ si ha:

$$S_{10} = \frac{1}{6}10(10+1)(40+5) = \frac{1}{6}110 \cdot 45 = 825$$

13. Trovare la somma dei primi 12 termini della successione numerica il cui termine generale è $u_n = 2n + n^3$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i + i^3) = \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} i^3 = [\text{per la } [1.4.5\text{-c}] \text{ e la } [1.4.5\text{-e}]] =$$

$$= 2\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n(n+1)(4 + n^2 + n)$$

Per $n = 12$ si ha:

$$S_{12} = \frac{1}{4}12 \cdot 13 \cdot (4 + 144 + 12) = 39 \cdot 160 = 6\,240$$

14. Il termine generale di una successione è:

$u_n = n(2n+1) + 2^{n+1}$

Trovare $S_n = \sum_{i=1}^{n}[i(2i+1) + 2^{i+1}]$

Si ha:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i^2 + i) + \sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} = 2\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 2^{i+1}$$

Nell'espressione $\sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot 2^i = 2\sum_{i=1}^{n} 2^i$ il fattore $\sum_{i=1}^{n} 2^i$ è la somma di n termini di una progressione geometrica di ragione $q = 2$ e primo termine 2. Segue per la [1.4.5-b]:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2\left(\frac{1}{1-2} - \frac{2^n}{1-2}\right) = 2(-1 + 2^n)$$

Quindi per la [1.4.5-d] e la [1.4.5-c]:

$$S_n = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 2 \cdot 2(2^n - 1) =$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5) + 4(2^n - 1)$$

1.5.- Limite di una successione

Sia $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n, \ldots$ una successione.

Se al crescere di n il termine u_n si avvicina sempre più ad un numero ℓ, ℓ è detto *limite della successione*.

Il significato della suddetta proposizione è il seguente:

scelto un numero $\varepsilon > 0$, piccolo quanto si vuole; se si verifica che esiste un indice N tale che per tutti i termini u_n con $n > N$ è verificata la relazione:

$$|\ell - u_n| < \varepsilon \qquad [1.5.1]$$

allora ℓ è il *limite della successione*.

Per esempio:

15. La successione il cui termine generale è $u_n = \frac{2n-1}{n}$, cioè:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$$

ha limite $\ell = 2$.
Infatti, scelto $\varepsilon > 0$, la disequazione

$$\left|2 - \frac{2n-1}{n}\right| < \varepsilon$$

ha soluzioni per tutti gli $n > \frac{1}{\varepsilon}$ come risulta dal calcolo seguente:

$$\left|2 - \frac{2n-1}{n}\right| = \left|\frac{2n - 2n + 1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = N$$

Per esempio, per

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$ basta che sia $n > 1000$

Quanto più cresce n per valori superiori a 1000 tanto più u_n si avvicina al numero 2 per difetto.

Quando la [1.5.1] ha soluzioni si suole scrivere

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \ell$$

Il limite ℓ della successione può essere anche nullo. Per esempio la successione

$$u_n = \frac{1}{n}$$

ha limite nullo essendo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Al crescere di n il termine u_n di una successione può crescere indefinitamente; tale affermazione ha il seguente significato:

se si verifica che, scelto un numero $k > 0$, grande quanto si vuole, esiste un indice N tale che per tutti gli $n > N$ la disequazione:

$$|u_n| > k \qquad [1.5.2]$$

ha soluzioni, allora il limite della successione è indefinitamente grande, cioè infinito (∞).

Si suole scrivere

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \infty$$

Esempi.

16. Sia $u_n = n^2$, cioè $1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots$

Fissato $k = 10^{18}$ (un miliardo di miliardi), la disequazione

$$|n^2| = n^2 > 10^{18}$$

è verificata per tutti gli $n > 10^9 = N$

La disequazione [1.5.2] ha soluzioni qualunque sia il k scelto, quindi si può scrivere:

$$\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$$

17. Trovare il limite della successione

$$u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

Si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

18. Trovare il limite della successione

$$u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1-n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right)n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = -1$$

2 - SERIE NUMERICHE

2.1.- Generalità

Si consideri la successione formata da un numero infinito di elementi

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

La somma degli infiniti termini

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$$

prende il nome di *serie* e si suole indicare con $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

La somma di tutti i termini (e cioè la serie) può avere valore

finito o infinito

nel primo caso la serie è detta *convergente*
nel secondo caso la serie è detta *divergente*.

19. Consideriamo la successione dell'es. 6 estesa sino a contenere un numero infinito di termini. La corrispondente serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \ldots + \frac{3}{2^n} + \ldots$$

Trattandosi di una progressione geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$ e primo termine 3, la somma di n termini è (cfr. [1.4.5-b]):

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{3}{2^n} = 3\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Al crescere di n S_n va crescendo perché $\frac{1}{2^{n-1}}$ decresce con n [1].

Il massimo valore che la somma assume è quello corrispondente al minimo valore di $\frac{1}{2^{n-1}}$. Pertanto, quando n tende all'infinito $\frac{1}{2^{n-1}}$ tende a zero e la serie assume valore $S = 3(2 - 0) = 6$. Cioè:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 3\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 6$$

La serie è convergente ed ha per somma $S = 6$

[1] Tale quantità viene sottratta al numero 2.

20. Consideriamo la serie degli interi naturali:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + (n + 1) + \ldots$$

Sappiamo che è

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Al crescere di n cresce indefinitamente S_n, cioè è:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

Ciò vuol dire che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ è divergente

Dato che il termine generale $u_n = \frac{3}{2^n}$ della *serie convergente* dell'esempio 19 tende a zero al tendere all'infinito di n cioè è:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{2^n} = 0$$

senza perdere di generalità si può affermare che:

a) una serie il cui termine generale tende a zero può essere convergente;
b) una serie il cui termine generale non tende a zero non può essere convergente, quindi è divergente (cfr. es. 20).

L'affermazione a) fa intendere che la condizione

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

non è sufficiente per decidere se la serie è convergente, ma è solo una condizione necessaria. La condizione b), cioè:

$$\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$$

è invece sufficiente per affermare che la serie è divergente.

Esempio.

21. Nella serie dei reciproci degli interi naturali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{n} + \ldots$$

è

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Eppure la serie *non converge*. Infatti essa può essere scritta nella forma:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

e poiché è:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

....

cioè la somma S della serie data è:

$$S>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots$$

cioè:

$$S>1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\ldots$$

$$S>1+2+3+4+5+\ldots+n+\ldots$$

Poiché la serie al secondo *membro diverge* (somma degli interi naturali) a maggior ragione diverge la serie data.

Pertanto l'affermazione a) può essere espressa nel modo seguente:

condizione necessaria ma non sufficiente perché una serie converga è che

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Gli esempi 19 e 20 mostrano chiaramente che non v'è alcuna difficoltà a determinare la somma S di una serie se se ne conosce l'espressione generale S_n. Infatti se è:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{(finito)}$$

la serie è convergente ed ha per somma S; se è

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

la serie è divergente.

La difficoltà allora è quella di determinare l'espressione generale della somma S_n.

Tale difficoltà è stata superata nell'es. 21 mediante un artificio o, se vogliamo, un criterio; tale criterio ci permette di scrivere che:

$$S_n > \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(cfr. es. 21)}$$

Cosicché

$$\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty \rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Ed è a questi criteri che lo studente deve abituarsi per affrontare agevolmente i problemi connessi con le serie.

Allo scopo generalizziamo quanto è stato detto sinora.

Una serie può essere intesa come quell'algoritmo (procedimento di calcolo) che permette di ottenere la somma di un numero infinito di termini mediante l'associazione dell'operazione aritmetica dell'addizione a quella di passaggio al limite.

Sia data la successione numerica di infiniti termini reali $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ e ci si proponga di trovare la somma degli infiniti addendi

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

L'algoritmo consiste nel costruire la seguente successione:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

dove $\quad s_1=u_1 \quad s_2=u_1+u_2 \quad s_3=u_1+u_2+u_3 \quad \ldots \quad s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$

e determinare il limite per $n\to\infty$ della successione (§1.5). Se tale limite esiste finito si parla di serie convergente, se non esiste, o esiste ma è infinito, si parla di serie divergente.

Per rappresentare una serie si usa la seguente notazione

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

dove u_n è il termine generale; le somme $s_1, s_2, \ldots, s_n$, sono le somme parziali della serie.

Sommare una serie significa trovare il limite della successione delle somme parziali, cioè calcolare

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

Studiare una serie significa stabilirne la convergenza o la divergenza e, nel primo caso, calcolarne la somma S data da

$$S=\lim_{n\to\infty} s_n \tag{2.1.1}$$

2.2.- La serie geometrica

I suoi termini sono quelli di una progressione geometrica con ragione q e primo termine a, per cui ha la seguente espressione:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n \qquad [2.2.1]$$

La somma parziale ennesima è data da:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

che può essere scritta (cfr. la [1.4.5]):

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \qquad [2.2.2]$$

Ragioniamo ora sulla [2.2.2].

a) se $|q| < 1$ per $n \to \infty$ si ha $q^n \to 0$ e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$$

per cui la serie [2.2.1] è convergente e ha per somma

$$S = \frac{a}{1-q}$$

b) se $|q| > 1$ per $n \to \infty$ si ha $|q|^n \to +\infty$ e $q^n \to \infty$ e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} s_n \to \infty$$

per cui la serie [2.2.1] è divergente essendo infinito il limite di s_n per $n \to \infty$

c) se $q = 1$ la serie [2.2.1] diventa:

$$a + a + a + a + \dots + a + \dots$$

e la somma parziale n^{esima} diventa $s_n = na$ che, per $n \to \infty$, diventa $+\infty$ (per $a > 0$) o $-\infty$ (per $a < 0$), per cui la serie è divergente.

d) se $q = -1$ la serie [2.2.1] diventa:

$$a - a + a - a + \dots$$

e la successione delle somme parziali è

$$a, 0, a, 0, \dots$$

la quale chiaramente non ha limite, per cui la serie è divergente.

In conclusione la serie geometrica è:

convergente per $|q| < 1$

divergente per $q \geq 1$

2.3.- Criterio generale di convergenza di Cauchy

Un criterio generale di convergenza di una serie a termini reali è il seguente: condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie a termini reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad [2.3.1]$$

è che, preso un numero $\epsilon > 0$, piccolo a piacere, esista un intero N tale che per tutti gli $n > N$ e per qualunque intero $r > 0$ sia verificata la relazione

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+r} u_k\right| < \epsilon \qquad [2.3.2]$$

Tale condizione è diretta conseguenza del fatto che esista il limite finito della successione (§1.5) delle somme parziali della serie. Se infatti la serie è convergente esiste il

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \quad \text{(finito)} \qquad \text{(cfr. la [2.1.1])}$$

cioè, scelto $\epsilon > 0$, esiste N tale che, per tutti gli $n > N$, la disequazione

$$|S - S_n| < \epsilon \qquad [2.3.3]$$

ha soluzioni.

Essendo

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

la [2.3.3] diventa

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| < \epsilon$$

Tale criterio è di grande importanza teorica ma di scarsa utilità pratica per le difficoltà presentate dalla sua applicazione nei calcoli.

2.4.- Condizione necessaria per la convergenza

Un criterio di grande utilità pratica perché serve a stabilire con certezza la divergenza di una serie ma non la sua convergenza è quello considerato nel §2.1, asserti a) e b). Esso può essere reso più rigoroso ed enunciato nel seguente modo: condizione necessaria per la convergenza di una serie è che per $n \to \infty$ il suo termine generale u_n tenda a zero; in altre parole se per $n \to \infty$ si ha $u_n \to 0$ la serie può essere convergente o divergente mentre se per $n \to \infty$ si ha che u_n non tende a zero, la serie è divergente. Per qualunque serie (convergente o divergente) è

$$s_{n+1} - s_n = u_{n+1}$$

e, passando al limite per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=\lim_{n\to\infty}u_{n+1} \qquad [2.4.1]$$

Inoltre per qualunque serie che converga è (cfr. la [2.1.1]):

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}s_{n+1}=S$$

Perciò per una serie convergente la [2.4.1] diventa:

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=S-S=0 \qquad [2.4.2]$$

Si conclude che in una serie convergente il termine generale tende a zero per $n\to\infty$; la condizione è necessaria ma non sufficiente.

2.5.- La serie armonica

Una serie che si presta bene a dimostrare che la [2.4.2] è sì condizione necessaria, ma non sufficiente, è quella dei reciproci degli interi naturali, detta *serie armonica*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots \qquad [2.5.1]$$

Per questa è:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

eppure la serie *non converge*. Infatti, come abbiamo visto nell'es. 21, la sua somma S è tale che

$$S>\sum_{n=1}^{\infty}n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=\infty$$

e poiché la serie al secondo membro diverge, a maggior ragione diverge la [2.5.1].

22. Si consideri la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$$

per il suo termine generale si ha:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$$

quindi la serie può essere convergente o divergente; dimostriamo che è convergente.

In base all'uguaglianza

$$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$$

la somma parziale ennesima diventa:

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

Passando al limite si ha:

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

cioè la serie data è convergente con somma $S=1$.

23. Nella serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\dots$$

per il termine generale si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}$$

quindi la serie è divergente e la sua somma è infinita.

2.6.- Resto di una serie e suo comportamento

Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\dots \qquad [2.6.1]$$

si chiama resto n-esimo R_n la nuova serie ottenuta togliendo i primi n termini, con n qualunque ma finito, per cui si ha:

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\dots=\sum_{i=1}^{\infty}u_{n+i} \qquad [2.6.2]$$

La somma parziale r-esima della serie R_n si può esprimere mediante le somme parziali della [2.6.1]:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+r} = s_{n+r} - s_n \qquad (r = 1, 2, 3, \dots) \qquad [2.6.3]$$

La serie [2.6.1] e il suo resto [2.6.2] hanno identico comportamento: se uno dei due è convergente (divergente) anche l'altro è convergente (divergente). Tale risultato è importante perché permette di studiare una serie trascurando un numero qualunque di termini iniziali.

Dimostrazione nel caso della convergenza: se la serie [2.6.1] è convergente con somma S, si ha che:

$$\lim_{r\to\infty} s_{n+r} = u_1 + u_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

Passando ora al limite per $r \to \infty$ nella [2.6.3] si ottiene:

$$R_n = S - s_n$$

che ci permette di concludere che R_n ha per somma un valore finito e quindi è convergente.

Se invece è convergente il resto, passando al limite per $r \to \infty$ nella [2.6.3], si ha che il primo membro tende a R_n che, per ipotesi, è convergente, per cui anche il termine s_{n+r} deve avere limite finito perché s_n è costante; si può scrivere:

$$R_n = \lim_{r\to\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+r}) = \lim_{r\to\infty} (s_{n+r} - s_n) = \lim_{r\to\infty} s_{n+r} - s_n$$

ora

$$\lim_{r\to\infty} s_{n+r} = R_n + s_n = [\text{valore finito}]$$

per cui si può concludere che la serie [2.6.1] è convergente perché il limite delle somme parziali è un valore finito.

Si procede in modo del tutto analogo nel caso della divergenza.

Nota I

Si può sempre scrivere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) = s_n + R_n$$

Nel caso di convergenza della serie tale relazione diventa:

$$S = s_n + R_n$$

e passando al limite per $n \to \infty$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} S = S = \lim_{n\to\infty} (s_n + R_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} R_n = S + \lim_{n\to\infty} R_n$$

da cui
$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Nota II

Il comportamento di una serie rimane inalterato se si moltiplicano i suoi termini per una costante diversa da zero. Infatti per la stessa costante viene moltiplicata la somma parziale n-esima il cui limite rimane finito (ma moltiplicato per la costante) se la serie data è convergente e infinita se la serie data è divergente.

2.7.- Somma, differenza e prodotto di serie convergenti

Se le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots \qquad [2.7.1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \dots \qquad [2.7.2]$$

sono convergenti e hanno somme rispettivamente S' e S'', la serie ottenuta sommando la [2.7.1] e la [2.7.2] termine a termine, cioè la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots \qquad [2.7.3]$$

è convergente e ha per somma $S' + S''$. Infatti la somma parziale n-esima della serie [2.7.3] indicata con σ_n è data dalla somma delle somme parziali n-esime della serie [2.7.1] e della [2.7.2], indicate rispettivamente con s_n' e s_n'':

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) = \\ &= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \\ &= s_n' + s_n''\end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = [\text{somma della serie [2.7.3]}] = \lim_{n\to\infty} (s_n' + s_n'') = S' + S''$$

In modo del tutto analogo si dimostra la convergenza della serie ottenuta sottraendo termine a termine la [2.7.2] dalla [2.7.1], cioè della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots$$

La serie

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1) &= \\ = u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \dots\end{aligned}$$

è detta prodotto delle due serie [2.7.1] e [2.7.2].

Si dimostra che:

a) se le serie [2.7.1] e [2.7.2] sono entrambe a termini reali positivi e convergenti la serie prodotto è convergente e ha per somma il prodotto $S'S''$.

b) se le serie [2.7.1] e [2.7.2] sono a termini qualunque e assolutamente convergenti, la serie prodotto è assolutamente convergente e ha per somma il prodotto $S'S''$.

NOTA

Le considerazioni teoriche finora svolte valgono per serie a termini reali qualunque, il cui studio verrà ripreso ed esteso in seguito. Proseguiamo ora il discorso sulle serie a termini reali positivi.

2.8.- Serie a termini reali positivi

In tale serie i termini sono positivi e nulli, oppure negativi e nulli; il secondo caso si riconduce al primo moltiplicando, com'è lecito, per la costante -1. La successione delle somme parziali è non decrescente: infatti, siccome $u_{n+1} \geqslant 0$, si ha:

$$s_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geqslant s_n$$

Per essa vale la proprietà commutativa e cioè: se si scambia comunque l'ordine dei suoi termini, una serie convergente, avente somma S, rimane convergente ancora con somma S, mentre una serie divergente rimane divergente.

Dimostrazione: indichiamo con $\sum u_n$ la serie data e con $\sum v_n$ la serie ottenuta dallo scambio dell'ordine dei termini, con s_n e σ_n le rispettive somme parziali n-esime.

1° caso Per ipotesi $\sum u_n$ è convergente e ha somma S; nella serie $\sum v_n$ consideriamo la somma parziale σ_{n_1} avente n_1 termini; è chiaro che la più piccola somma parziale della serie $\sum u_n$ che contenga tutti gli n_1 termini di σ_{n_1} deve avere un numero di termini $n_2 \geqslant n_1$ e quindi si può scrivere

$$\sigma_{n_1} \leqslant s_{n_2} < S \qquad [2.8.1]$$

dalla quale relazione, data l'arbitrarietà di n_1, si deduce che la successione delle somme parziali σ_{n_1} è non decrescente e limitata ($< S$) e quindi ammette limite finito (che però può essere diverso da S) per cui la serie $\sum v_n$ è convergente e ha somma che indichiamo con $\bar{S}$; per dimostrare che $\bar{S} = S$ ripetiamo il ragionamento precedente ma assumendo come serie di partenza la $\sum v_n = \bar{S}$ e considerando $\sum u_n$ come serie ottenuta dallo scambio dei termini di $\sum v_n$ si arriva alla seguente relazione:

$$s_{n_1} \leqslant \sigma_{n_2} < \bar{S}$$

che, passando al limite per $n \to \infty$, diventa:

$$S \leqslant \bar{S}$$

che, confrontata con la

$$\bar{S} \leqslant S$$

ottenuta passando al limite per $n_1 \to \infty$ nella [2.8.1], ammette come unica soluzione $S = \bar{S}$.

2° caso Per ipotesi la $\sum u_n$ è divergente; assunto un numero $M > 0$, grande ad arbitrio, si può sempre trovare un intero n_1 tale che $s_{n_1} > M$; la più piccola somma parziale di $\sum v_n$ che contenga tutti gli n_1 termini della s_{n_1} deve avere un numero di termini $n_2 \geqslant n_1$ per cui si ha:

$$\sigma_{n_2} \geqslant s_{n_1} > M$$

da cui si conclude che è divergente anche $\sum v_n$ perché la successione delle somme parziali ha limite infinito essendo M grande ad arbitrio.

3 - CRITERI DI CONVERGENZA E DI DIVERGENZA

3.1.- Criterio del confronto

Confrontiamo le seguenti due serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad [3.1.1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad [3.1.2]$$

$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$ Se la [3.1.1] è convergente con somma S e se u_n è non maggiore di v_n, cioè se

$$u_n \leqslant v_n \qquad [3.1.3]$$

anche la serie [3.1.2] è convergente e ha somma $\bar{S} \leqslant S$; infatti le [3.1.1] e [3.1.2] comportano tra le somme parziali $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ e $\sigma_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ la seguente relazione:

$$s_n \leqslant \sigma_n$$

che, passando al limite, diventa:

$$\lim_{n \to \infty} s_n \leqslant \lim_{n \to \infty} \sigma_n = S$$

che dimostra la convergenza della [3.1.2].

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ Se la serie [3.1.1] è divergente e se u_n è non minore di v_n, cioè se:

$$u_n \geqslant v_n \qquad [3.1.4]$$

anche la serie [3.1.2] è divergente; infatti la [3.1.4] comporta:

$$s_n \geqslant \sigma_n \quad \rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} s_n \geqslant \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \infty$$

cioè la [3.1.2] è divergente.

Esempi

24. Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots$

Trascurando, come è lecito, il primo termine essa può essere scritta nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \qquad [3.1.5]$$

Confrontando la [3.1.5] con la serie convergente dell'es. 22:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

si ha:

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

da cui, per il presente criterio del confronto, si deduce che la [3.1.5] (e quindi la serie data) converge.

25. Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots$$

Dal confronto con la serie armonica (divergente):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots$$

si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$$

Poiché la serie armonica diverge, diverge anche la serie data.

3.2.- Serie armonica generalizzata o serie p

È la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$$

con p reale; essa è convergente per $p > 1$ e divergente per $p \leqslant 1$.

Infatti:

— per $p = 1$ si ha la serie armonica che è divergente;

— per $p = 0$ essa è divergente perché:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^0} = 1$$

— per $p < 0$ essa è divergente perché

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=\infty$$

— per $p = 2$ essa è convergente (vedere esempio 24)

— per $p > 2$ essa è convergente per il criterio del confronto; infatti se si confrontano le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ con $p > 2$ si ha:

$$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{n^2}$$

— per $1 < p < 2$ essa è convergente come risulta dalle seguenti considerazioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)}_{2^2\text{ termini}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\dots+\frac{1}{14^p}+\frac{1}{15^p}\right)}_{2^3\text{ termini}}+$$

$$+\dots+\underbrace{\left[\frac{1}{(2^n)^p}+\frac{1}{(2^n+1)^p}+\dots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}\right]}_{2^n\text{ termini}}+\dots<1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+$$

$$+\left[\frac{1}{(2^2)^p}+\frac{1}{(2^2)^p}+\frac{1}{(2^2)^p}+\frac{1}{(2^2)^p}\right]+2^3\cdot\frac{1}{(2^3)^p}+\dots+2^n\cdot\frac{1}{(2^n)^p}+\dots=$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\frac{1}{(2^{p-1})^3}+\dots+\frac{1}{(2^{p-1})^n}+\dots$$

che è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ e quindi convergente (cfr. §2.2, a).

3.3. - Criterio del quoziente

Confrontiamo le seguenti due serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad [3.3.1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad [3.3.2]$$

Se la [3.3.1] è convergente e se valgono le relazioni

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n} \qquad [3.3.3]$$

anche la [3.3.2] è convergente. Infatti in base alla [3.3.3] si ottengono le relazioni:

$$\frac{u_2}{u_1}\leqslant\frac{v_2}{v_1}\quad\frac{u_3}{u_2}\leqslant\frac{v_3}{v_2}\quad\dots\quad\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant\frac{v_n}{v_{n-1}}$$

che, moltiplicate membro a membro, danno

$$\frac{u_2}{u_1}\frac{u_3}{u_2}\frac{u_4}{u_3}\dots\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{u_n}{u_1}\leqslant\frac{v_n}{v_1}\quad\to\quad u_n\leqslant\frac{u_1}{v_1}v_n=k\,v_n \qquad [3.3.4]$$

dove k è costante.

Dal teorema del confronto applicato alle serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} kv_n$ (che è convergente perché $\sum kv_n = k\sum v_n$), siccome per la [3.3.4] si ha:

$$u_n\leqslant k\,v_n$$

la [3.3.2] risulta convergente.

In modo del tutto analogo si dimostra che, se la [3.3.1] è divergente e se valgono le relazioni:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}\quad\to\quad u_n\geqslant k\,v_n \qquad [3.3.5]$$

anche la [3.3.2] risulta divergente.

Nell'applicazione pratica di tale criterio è conveniente riferirsi anziché ai rapporti [3.3.3], al seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\ell \qquad [3.3.6]$$

in base al quale si ha:

1) se $\ell \neq 0$ cioè finito o infinito, le due serie sono entrambe convergenti o entrambe divergenti

2) se $\ell = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ è convergente, anche $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ è convergente.

3) se $\ell = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ è divergente, anche $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ è divergente.

I suddetti risultati si ottengono da considerazioni svolte sui seguenti limiti ottenuti dalla [3.3.4] e dalla [3.3.5]:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\leqslant k \qquad [3.3.4\text{-a}]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\geqslant k \qquad [3.3.5\text{-a}]$$

Dalla [3.3.4-a] si deduce che:

— se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ è convergente ($v_n \to 0$), anche $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ deve essere convergente;

— se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ è divergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ può essere sia convergente che divergente.

Dalla [3.3.5-a] si deduce che:

— se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ è divergente, anche $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ deve essere divergente;

— se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ è convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ può essere convergente o divergente.

Molto spesso, capita di dover usare, come serie di confronto $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$; in tal caso la serie da studiare $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (con riferimento alle conclusioni tratte dalla [3.3.6]) è:

1) *convergente* se $p > 1$ e $\ell = 0$ oppure $\ell =$ valore finito

infatti per $p > 1$ la serie armonica generalizzata (cfr. §3.2) è convergente, quindi lo è anche la serie da studiare (conclusioni 2ª e 1ª);

2) *divergente* se $p \leqslant 1$ e $\ell = \infty$ oppure $\ell =$ valore finito

infatti per $p \leqslant 1$ la serie armonica generalizzata è divergente, quindi lo è anche la serie da studiare (conclusioni 3ª e 1ª).

3.4.- Criterio del rapporto o di d'Alembert

Una serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad [3.4.1]$$

è convergente, se il rapporto fra un termine e il precedente cioè se il rapporto

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \qquad [3.4.2]$$

è minore o uguale a un numero $q < 1$; è divergente se tale rapporto è maggiore o uguale ad un numero $q \geqslant 1$.

Se $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1$ si può scrivere:

$$u_2 \leqslant q u_1 \qquad u_3 \leqslant q u_2 \leqslant q^2 u_1 \qquad u_4 \leqslant q u_3 \leqslant q^3 u_1$$

per cui sostituendo nella [3.4.1] si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots \leqslant \underbrace{u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \ldots}_{\text{serie geometrica di ragione } q < 1}$$

Per il criterio del confronto la [3.4.1] risulta convergente.

Se $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ si ha:

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \ldots \leqslant u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$$

cioè il termine generale non tende a zero e quindi la [3.4.1] risulta divergente.

In pratica, invece che al rapporto, è più conveniente riferirsi al seguente limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \qquad [3.4.3]$$

in base al quale si ha:

1) se $\ell < 1$ la serie è *convergente*

2) se $\ell > 1$ la serie è *divergente*

3) se $\ell = 1$ bisogna ricorrere alla [3.4.2] o ad un altro criterio.

Tali risultati derivano dalla definizione di limite e dal presente criterio del rapporto: se $\ell < 1$ esiste un intero N tale che per tutti gli $n > N$ i rapporti [3.4.2] si mantengono minori di uno per cui la [3.4.1] è convergente; se $\ell > 1$ si può sempre determinare un N tale che per tutti gli $n > N$ i rapporti [3.4.2] si mantengono maggiori di 1 e quindi la serie [3.4.1] diverge perché il suo termine generale non tende a zero; se $\ell = 1$ non si può affermare nulla perché i rapporti [3.4.2] possono mantenersi maggiori di 1 o minori di 1 per cui bisogna studiare la serie mediante la [3.4.2] anziché mediante la [3.4.3] o ricorrere ad un altro metodo (vedere esempi).

26. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

è convergente come si può dedurre dal rapporto tra un termine della serie ed il termine precedente:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)\,n!} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} = q < 1$$

o dal limite di detto rapporto:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

27. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

è divergente come si può dedurre dal rapporto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{n+n}{n+1} > 1$$

o dal limite di detto rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

28. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Dal rapporto e dal suo limite:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

non si può concludere nulla: infatti il rapporto è sì minore di 1, ma non esiste un $q < 1$ tale che sia:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$$

per cui il criterio non è applicabile. La serie è però convergente (cfr. es. 22).

29. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Come nel caso precedente, dal rapporto e dal suo limite non si può concludere nulla:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

La serie è però divergente perché è la serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$ (cfr. es. 25).

3.5.- Criterio della radice o di Cauchy

Una serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad [3.5.1]$$

è convergente se la radice n-esima di u_n è minore o uguale a un numero $q < 1$, cioè se si ha:

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1 \qquad [3.5.2]$$

è invece divergente se

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \qquad [3.5.3]$$

Infatti: dalla condizione $\sqrt[n]{u_n} \leq q$ risulta $u_n \leq q^n$ e dal confronto tra le serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ (convergente perché geometrica di ragione $q < 1$) si conclude che $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ è convergente per il criterio del confronto; se invece vale la [3.5.3], la serie [3.5.1] è divergente perché il suo termine generale non tende a zero.

In pratica è conveniente studiare una serie mediante il limite della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

in base al quale si ha:

1) se $\ell < 1$ la serie è *convergente*
2) se $\ell > 1$ la serie è *divergente*
3) se $\ell = 1$ bisogna ricorrere alle [3.5.2] e [3.5.3] o ad un altro criterio.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del paragrafo precedente. Esempi.

30. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$ con $a > 0$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$$

la serie è convergente.

31. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ (somma degli interi naturali, che sappiamo essere divergente).

Applichiamo il criterio del limite della radice n-esima $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \ell$

Posto $y = \sqrt[n]{n}$ si ha:

$$\log y = \frac{1}{n} \log n \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \log y = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = \frac{\infty}{\infty}$$

Applicando la regola di de L'Hôpital si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \log y = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Il criterio del limite è inefficace perché $\ell = 1$. Ricorriamo perciò alle [3.5.2] e [3.5.3] (criterio della radice n-esima); per ogni n finito si ha:

$$\sqrt[n]{n} > 1$$

la serie è quindi divergente.

32. Studiare la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (divergente).

Col criterio del limite della radice n-esima non si può affermare nulla perché

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

siccome poi $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1$, ma non esiste un numero $q < 1$ tale che $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leqslant q$ anche il criterio della radice è inefficace.

3.6.- Criterio di Kummer

Una serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad [3.6.1]$$

è convergente se esiste una successione di numeri positivi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ per la quale si abbia:

$$\alpha_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} \geqslant \alpha > 0 \qquad [3.6.2]$$

dove α è una costante; è divergente se si ha:

$$\alpha_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} \leqslant 0 \qquad [3.6.3]$$

e se inoltre è divergente la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}$$

Dalla [3.6.2] si ottengono le relazioni

$$\alpha_1u_1 - \alpha_2u_2 \geqslant \alpha u_2$$
$$\alpha_2u_2 - \alpha_3u_3 \geqslant \alpha u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n-1}u_{n-1} - \alpha_nu_n \geqslant \alpha u_n$$

che, sommate termine a termine, danno:

$$\alpha_1u_1 - \alpha_nu_n \geqslant \alpha(u_2+u_3+\ldots+u_n) = \alpha(-u_1+u_1+u_2+\ldots+u_n) = \alpha(s_n-u_1)$$

da cui si ottiene l'espressione della somma parziale n-esima:

$$s_n \leqslant \frac{\alpha_1u_1-\alpha_nu_n}{\alpha}+u_1 < \frac{\alpha_1u_1}{\alpha}+u_1 \qquad [3.6.4]$$

La [3.6.4] ci permette di affermare che le somme parziali n-esime sono crescenti (i termini della serie sono positivi) e limitati (si mantengono inferiori alla costante $\frac{\alpha_1u_1}{\alpha}+u_1$) per cui hanno limite finito; questo per definizione, è la somma della serie [3.6.1] che pertanto è convergente.

Dalla [3.6.3] si ricava l'espressione

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \quad — \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}{\frac{1}{\alpha_n}}$$

da cui si deduce che, per il criterio del quoziente, la serie [3.6.1] è divergente se la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}$ è divergente.

3.7.- Criterio di Raabe

Si può considerare un caso particolare del criterio di Kummer. Se, infatti, come successione di numeri positivi α_n si assume quella dei numeri interi naturali la [3.6.2] diventa:

$$n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) \geqslant \alpha > 0 \qquad [3.7.1]$$

da cui si ottiene:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) \geqslant \alpha+1 \qquad [3.7.2]$$

Se come serie divergente $\frac{1}{\alpha_n}$ si assume quella armonica la [3.6.3] diventa:

$$n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) < 0$$

cioè:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) \leqslant 1 \qquad [3.7.3]$$

È conveniente in pratica applicare tale criterio calcolando il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\ell \qquad [3.7.4]$$

in base al quale si ha:

1) se $\ell > 1$ la serie è *convergente*
2) se $\ell < 1$ la serie è *divergente*
3) se $\ell = 1$ bisogna ricorrere alle [3.7.2] e [3.7.3] o ad un altro criterio.

Infatti dalla definizione di limite si ha che: se $\ell > 1$ si può determinare un N tale che per tutti gli $n > N$ vale la [3.7.2] e quindi la serie è convergente; analogamente, se $\ell < 1$, vale la [3.7.3] e la serie è divergente; se $\ell = 1$ non si può affermare nulla perché si può tendere a 1 per valori maggiori di 1 o per valori minori di 1, per cui bisogna studiare la serie in base alla [3.7.2] o alla [3.7.3], o con un altro criterio.

Dimostriamo che l'espressione [3.7.4] può essere scritta nel seguente modo:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\ell \qquad [3.7.4\text{-a}]$$

Infatti per ℓ finito si ha:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\ell$$

Poiché il primo fattore tende all'infinito e il prodotto tende ad ℓ finito, il secondo fattore deve tendere a zero; cioè:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=0 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=1 \qquad [3.7.5]$$

Perciò anche

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left[n\frac{u_n}{u_{n+1}}\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=$$

$$=[\text{per la } [3.7.5]]=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

e quindi la [3.7.4-a]. Esempio.

33. Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ che sappiamo essere convergente (cfr. es. 24) quale serie p con $p > 1$.

Il criterio del rapporto e quello della radice non portano ad alcuna conclusione:

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1$$ (il criterio è inefficace)

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2=1$$ (cfr. es. 31) (il criterio è inefficace)

c) il criterio di Raabe è invece efficace:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1+2n-n^2)}{n^2+1+2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2n^2}{n^2+1+2n}=2>1 \quad (\text{v. la } [3.7.2])$$

e quindi la serie è convergente.

3.8.- Criterio dell'integrale o di Cauchy

Si può applicare solo alle serie a termini positivi non crescenti, cioè quando valgono le disuguaglianze:

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots$$

Se esiste una funzione $f(x)$ positiva, continua, non crescente e tale che per $x = 1, 2, \ldots$ valgano le seguenti uguaglianze:

$$f(1)=u_1 \quad f(2)=u_2 \quad f(3)=u_3 \quad \ldots$$

si può affermare che la serie risulta convergente o divergente a seconda che l'integrale improprio $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ (¹) converga o diverga. Infatti, in base alle ipotesi, e limitandoci per semplicità al caso di $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$, il diagramma di $f(x)$ è del tipo rappresentato in fig. 3.8.1.

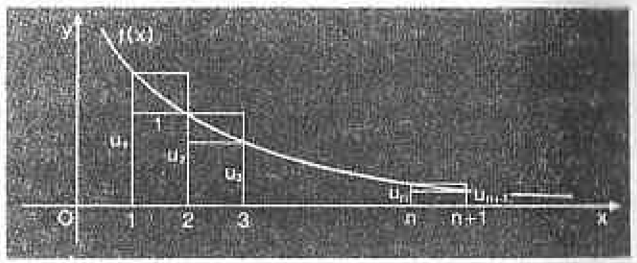


Fig. 3.8.1

(¹) Più in generale $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ con $N > 0$ intero finito.

In corrispondenza dell'intervallo $1 \leqslant x \leqslant 2$ si hanno tre aree per le quali valgono le disuguaglianze:

$$u_2 \cdot 1 < \int_1^2 f(x)\,dx < u_1 \cdot 1$$

e, analogamente, per i successivi intervalli si ha:

$$u_3 < \int_2^3 f(x)\,dx < u_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_{n+1} < \int_n^{n+1} f(x)\,dx < u_n$$

Sommando membro a membro si ottiene, per ogni n finito:

$$u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1} = (s_{n+1} - u_1) < \int_1^{n+1} f(x)\,dx < s_n \quad (^1)$$

a) Se supponiamo che l'integrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converga, allora converge la serie. Infatti per ogni n si verificano le seguenti disuguaglianze:

$$(s_{n+1} - u_1) < \int_1^{n+1} f(x)\,dx < \int_0^\infty f(x)\,dx$$

da cui si ha:

$$s_{n+1} < \int_0^\infty f(x)\,dx + u_1$$

cioè la successione delle somme parziali è limitata; siccome essa è crescente perché $u_n > 0$, ammette limite finito che è la somma della serie e che è diverso dal valore, pure finito, dell'integrale

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

b) Se supponiamo divergente l'integrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$, allora la serie diverge. Infatti l'integrale $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ cresce al crescere di n e quindi, dalla disuguaglianza

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

si conclude che le somme parziali crescono per $n \to \infty$ e quindi la serie diverge. Esempio.

(1) Si ricorda che $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

34. Studiamo la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Come funzione $f(x)$ assumiamo $\frac{1}{x^p}$.

Per $p \neq 1$ si ha:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^p} = \lim_{M\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^M =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{M^{-p+1} - 1}{1-p} = \begin{cases} \infty & \text{per } p < 1 \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{per } p > 1 \end{cases}$$

e per $p = 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} [\log x]_1^M = \infty$$

Per $p > 1$ l'integrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$ è convergente e quindi lo è anche la serie;

Per $p \leqslant 1$ l'integrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$ è divergente e quindi lo è anche la serie.

4 - SERIE IN GENERALE

4.1.- Serie alternate o a segni alterni

Sono delle serie i cui termini, a differenza delle serie esaminate sinora, sono preceduti alternativamente dal segno più (+) e dal segno meno (−):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots \qquad [4.1.1]$$

ove i termini $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sono reali e positivi.

Un criterio per stabilire la loro convergenza è dato dal seguente teorema di Leibnitz:

se la successione dei termini positivi della [4.1.1] è non crescente e tendente a zero, cioè se

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant \ldots \geqslant 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad [4.1.2]$$

la [4.1.1] è convergente.

Consideriamo infatti la successione delle somme parziali:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ \ldots,\ s_{2m},\ s_{2m+1},\ \ldots$$

La successione delle somme parziali di posto pari ha come termine generale:

$$s_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m}$$

e quella delle somme parziali di posto dispari:

$$s_{2m+1} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2m} + u_{2m+1}$$

Questi due termini si possono scrivere nel modo seguente:

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

$$s_{2m+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m} - u_{2m+1})$$

Per la prima delle [4.1.2] ciascuna delle differenze entro parentesi è positiva quindi la successione di termini di posto pari è non decrescente:

$$s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \ldots \leqslant s_{2m} \leqslant \ldots$$

quella di posto dispari è non crescente:

$$s_1 \geqslant s_3 \geqslant s_5 \geqslant \ldots \geqslant s_{2m+1} \geqslant \ldots$$

Valgono pertanto le disuguaglianze:

$$s_{2m} \geqslant u_1 - u_2 \qquad [4.1.3\text{-a}]$$

$$s_{2m+1} \leqslant u_1 \qquad [4.1.3\text{-b}]$$

D'altronde è:

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \qquad [4.1.4\text{-a}]$$

e quindi:

$$s_{2m+1} \geqslant s_{2m} \qquad [4.1.4\text{-b}]$$

Cosicché dalle [4.1.3] e [4.1.4-b] si ottiene:

$$u_1 - u_2 \leqslant s_{2m} \leqslant s_{2m+1} \leqslant u_1 \qquad [4.1.5]$$

Per la [4.1.5] si conclude che entrambe le successioni sono limitate ed ammettono limite finito entro l'intervallo $(u_1 - u_2,\ u_1)$.

Per poter affermare che la serie [4.1.1] è convergente basta dimostrare che le successioni delle somme parziali aventi termine generale, rispettivamente, s_{2m} ed s_{2m+1}, hanno lo stesso limite S, che naturalmente è la somma della serie [4.1.1].

Dalla [4.1.4-a], passando al limite per $n \to \infty$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2m} + \lim_{n\to\infty} u_{2m+1}$$

Per la seconda delle [4.1.2] è $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2m+1} = 0$ e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2m} = S$$

Le considerazioni fatte sinora conducono alla seguente interpretazione grafica: ciascun termine s_{2m} è a sinistra di S mentre ciascun termine s_{2m+1} è a destra di S (fig. 4.1.1), infatti la successione delle somme parziali di posto pari S_{2m} è non decrescente, quindi la somma S è maggiore di ciascun elemento S_{2m}; la successione delle somme parziali di posto dispari s_{2m+1} è non crescente, quindi la somma S è minore di ciascun elemento s_{2m+1}.

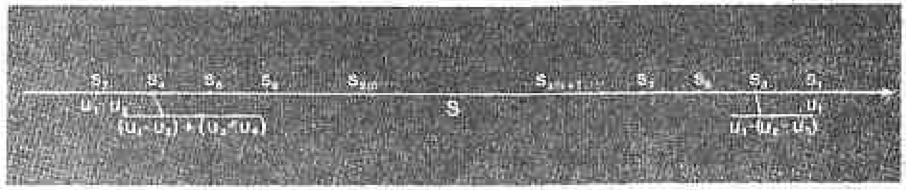


Fig. 4.1.1

Se come somma S si assume una somma parziale si commette un errore; tale errore è (in valore assoluto) minore del valore del primo termine della serie non facente parte della somma parziale. Cioè:

a) si sostituisca ad S la somma parziale s_{2m}; l'errore è

$$S - s_{2m} \qquad [4.1.6]$$

Essendo:

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m} + u_{2m+1} - \ldots$$

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m} \qquad [4.1.7]$$

si ha:

$$S - s_{2m} = u_{2m+1} - u_{2m+2} + u_{2m+3} - u_{2m+4} + u_{2m+5} - \dots =$$
$$= u_{2m+1} - (u_{2m+2} - u_{2m+3}) - (u_{2m+4} - u_{2m+5}) - \dots$$

I termini in parentesi sono positivi (e vanno sottratti ad u_{2m+1}), quindi l'errore che si commette è:

$$S - s_{2m} < u_{2m+1}$$

cioè minore del primo termine non contenuto in s_{2m} (cfr. la [4.1.7]).

b) Analogamente, sostituendo ad S una somma parziale dispari, l'errore è:

$$s_{2m+1} - S$$

(si ricordi che $s_{2m+1} > S$, vedi fig. 4.1.1).
Essendo:

$$s_{2m+1} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots - u_{2m} + u_{2m+1} \qquad [4.1.8]$$
$$S - s_{2m+1} = -u_{2m+2} + u_{2m+3} - u_{2m+4} + u_{2m+5} - \dots =$$
$$= -u_{2m+2} + (u_{2m+3} - u_{2m+4}) + (u_{2m+5} - u_{2m+6}) - \dots$$
$$s_{2m+1} - S = u_{2m+2} - (u_{2m+3} - u_{2m+4}) - (u_{2m+5} - u_{2m+6}) - \dots$$

I termini in parentesi sono positivi (e vanno sottratti ad u_{2m+2}), quindi l'errore che si commette è:

$$s_{2m+1} - S < u_{2m+2}$$

cioè minore del primo termine non contenuto in s_{2m+1} (cfr. la [4.1.8]).

c) **Per le serie a segni alternati, contrariamente a quanto avviene per quelle a termini positivi, non vale la proprietà commutativa come risulta evidente dallo studio delle serie che si ottengono permutando opportunamente i termini della serie seguente:**

35. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \qquad [4.1.9]$$

Per questa serie sono verificate le due condizioni del teorema di Leibnitz:

$$1)\ 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots > 0 \qquad 2)\ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

quindi è convergente e ha per somma S (1).

— Se scambiamo i termini della serie [4.1.9] in modo da avere una successione di due termini positivi seguiti da uno negativo si ottiene la serie:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \dots \qquad [4.1.10]$$

(1) Questa serie, detta armonica a segni alternati, converge ad $S = \log 2$ (cfr. P.30, *Serie di funzioni*).

Dimostriamo che essa è convergente ed ha per somma $\frac{3}{2} S$. Infatti, dividendo per 2 la [4.1.9] si ottiene:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots \qquad [4.1.11]$$

Sommiamo termine a termine la [4.1.9] e la [4.1.11]:

$$S + \frac{S}{2} = \frac{3}{2} S = (1 + 0) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + 0\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{5} + 0\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + 0\right) + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots =$$
$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Si ottiene così la serie [4.1.10] che pertanto converge a $\frac{3}{2} S$

— Se ora scambiamo i termini della serie [4.1.9] in modo da avere una successione di un termine positivo seguito da due negativi si ottiene la serie:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) \qquad [4.1.12]$$

le cui somme parziali $\bar{s}_{3m}$ sono:

$$\bar{s}_{3\times 1} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$
$$\bar{s}_{3\times 2} = \bar{s}_6 = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)$$
$$\bar{s}_{3\times 3} = \bar{s}_9 = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right)$$
$$\bar{s}_{3m} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{4m-2} - \frac{1}{4m}\right) =$$

= [sommando i primi due termini all'interno di ogni parentesi] =

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4m-2} - \frac{1}{4m}\right) =$$

= [mettendo in evidenza 1/2] =

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right)}_{\text{somma dei primi } 2m \text{ termini della serie [4.1.9]}} = \frac{1}{2} \cdot s_{2m}$$

Passando ora al limite per $n \to \infty$ si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \bar{s}_{3m} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} s_{2m} = \frac{1}{2} S = \bar{S}$$

Possiamo affermare che la serie [4.1.12] ha per somma $\bar{S}$ perché le due somme intermedie tra $\bar{s}_{3m}$ e $\bar{s}_{3(m+1)}$ e cioè:

$$\bar{s}_{3m+1} = \bar{s}_{3m} + \frac{1}{2m-1} \quad \text{e} \quad \bar{s}_{3m+2} = \bar{s}_{3m} + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{4m-2}$$

hanno lo stesso limite $\bar{S}$ per $n \to \infty$ come risulta da:

$$\lim_{n \to \infty} \bar{s}_{3m+1} = \lim_{n \to \infty} \left(\bar{s}_{3m} + \frac{1}{2m-1} \right) = \lim_{n \to \infty} \bar{s}_{3m} + 0 = \bar{S}$$

$$\lim_{n \to \infty} \bar{s}_{3m+2} = \lim_{n \to \infty} \bar{s}_{3m} + 0 - 0 = \bar{S}$$

Resta quindi dimostrato che nelle serie a segni alternati non si deve scambiare l'ordine dei termini se non si vuole cambiare la somma della serie.

4.2.- Serie a termini reali e di segno qualsiasi. Convergenza assoluta e condizionata

Una serie a termini reali si presenta nella forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots \qquad [4.2.1]$$

dove i termini u_n possono essere $\gtreqless 0$.

È chiaro che:

1) la [4.2.1] può essere convergente o divergente
2) la serie alternata è un caso particolare della [4.2.1]
3) la serie dei moduli $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ può essere studiata con i criteri delle serie a termini positivi.

Si ha il seguente criterio di convergenza, detto *di assoluta convergenza*: condizione sufficiente perché la [4.2.1] sia convergente è che la serie dei suoi moduli $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ sia convergente. Infatti in base al criterio di Cauchy (cfr. §2.3), dalla convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ deriva che, fissato ad arbitrio un $\epsilon > 0$, si può determinare un N tale che per tutti gli $n > N$ e per ogni intero positivo r, si abbia:

$$\left| \sum_{n+1}^{n+r} |u_n| \right| = \sum_{n+1}^{n+r} |u_n| = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+r}| < \epsilon \qquad [4.2.2]$$

Siccome la somma dei moduli è maggiore o uguale al modulo della somma, dalle [4.2.2] deriva la relazione:

$$\left| \sum_{n+1}^{n+r} u_n \right| = |u_{n+1} + \dots + u_{n+r}| \leqslant |u_{n+1}| + \dots + |u_{n+r}| < \epsilon$$

che in base alla [2.3.4] assicura la convergenza della [4.2.1].

Per esempio la serie a termini qualunque:

36. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3} \qquad (\alpha = \text{costante qualunque}) \qquad [4.2.3]$$

ha la seguente serie dei moduli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^3}$$

che è convergente. Infatti essendo $|\cos n\alpha| < 1$, risulta:

$$\left| \frac{\cos n\alpha}{n^3} \right| \leqslant \frac{1}{n^3}$$

La serie al secondo membro è la armonica generalizzata con $p = 3$ che, come sappiamo, converge; a maggior ragione converge il primo membro.
Quindi la serie [4.2.3] è convergente perché lo è quella dei suoi moduli.

È chiaro che la condizione

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+r}| < \epsilon$$

che assicura la convergenza della serie (criterio di Cauchy) non comporta necessariamente che sia:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+r}| < \epsilon$$

(che assicura la convergenza dei moduli) e quindi la convergenza della [4.2.1] non comporta quella dei suoi moduli.

Per esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \qquad [4.2.4]$$

è convergente e ha somma $S = \log 2$ ma la serie dei moduli è la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che è divergente.

Conclusioni:
a) una serie, la cui serie dei moduli è convergente, è convergente e viene detta *assolutamente convergente*
b) una serie convergente, la cui serie dei moduli è divergente viene detta *semiconvergente* o *semplicemente* o *condizionatamente convergente*.

La serie [4.2.3] è assolutamente convergente, la [4.2.4] è semiconvergente.

4.3.- Esercizi proposti

37. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ è convergente e calcolarne la somma S.

Studiare la convergenza delle serie:

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-3}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 5^n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-3}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(3n+2)\,n^{\frac{4}{3}}}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3+5n-2}{n(n^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-\log n}{n^2+10n^3}}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3}}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\operatorname{sen}^2\frac{1}{n}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

56. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1}$

58. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^3}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

60. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n}$

61. $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{2^{\log(\log n)}}{n\log n}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\operatorname{arctg} n}}{n^2+1}$

63. Dimostrare che $\frac{9}{8}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$

64. Dimostrare che $\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}$

Studiare la convergenza delle serie:

65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2n+2}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{3n-1}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}$

69. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{\log n}$

Determinare se la convergenza delle seguenti serie è assoluta o condizionata:

70. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$

71. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$

72. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n^2+1)^{\frac{4}{3}}}$

74. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}$

75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{2^n+1}$

76. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\alpha}{x^2+n^2}$ per x e α reali.

77. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}$

78. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{2n}}$

Studiare la convergenza delle serie:

79. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{2n}}{(2n+1)!}$

80. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$

81. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$

82. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

83. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\ldots$

34. Dimostrare che, se a, b, d, sono numeri positivi con $b > a$, la serie

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$$

converge se $(b-a) > d$ e diverge se $(b-a) \leq d$.

Studiare la convergenza delle serie:

35. $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6} + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9} + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \dots$

36. $\frac{2}{9} + \frac{2\cdot 5}{9\cdot 12} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{9\cdot 12\cdot 15} + \dots$

37. Verificare che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\frac{\pi}{3}}}$ è convergente. Determinare p in modo che la somma parziale $s_p = \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{(n-1)^{\frac{\pi}{3}}}$ differisca dalla somma della serie per $|e| < 10^{-1}$.

Soluzioni degli esercizi proposti

37. Il termine generale u_n può essere scritto nel seguente modo:

$$u_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right)$$

La somma parziale n-esima è data da:

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3}\right)$$

e quindi:

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{12}$$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

Essendo: $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ [= termine generale della serie p con $p > 1$ e quindi convergente]

per il criterio del confronto la serie è convergente.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3}$

Siccome $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n^2-3} = 0$ la serie può convergere o divergere.

Essendo:

$$\frac{n}{4n^2-3} > \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$$ [= termine generale serie armonica (divergente)]

per il criterio del confronto la serie diverge.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = 1\cdot 0 = 0$$

la serie può convergere o divergere. Essendo:

$$\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}} > \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} > \frac{n+2}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+3}$$

[= termine generale serie armonica senza i termini $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$]

per il criterio del confronto la serie diverge.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 5^n}$

Si ha: $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

Essendo:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n < \left(\frac{3}{5}\right)^n$$ [= termine generale serie geometrica di ragione $q < 1$]

per il criterio del confronto la serie converge.

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-3}$

Si ha: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Essendo:

$$\frac{1}{5n-3} > \frac{1}{5n} \quad [= \text{termine generale serie armonica}]$$

per il criterio del confronto la serie diverge.

43. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(3n+2)\,n^{\frac{4}{3}}}$$

Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3}\cdot 0 = 0$$

Applichiamo il criterio del quoziente assumendo $v_n = \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$

Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}(2n-1)}{(3n+2)\,n^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3}$$

essendo $p > 1$ ed ℓ finito la serie converge.

44. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Inoltre si ha: $$\frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{\frac{3}{2}}} < \frac{4n^2+5n-2}{n^4}$$

Applichiamo il criterio del quoziente alla serie al secondo membro assumendo

$$v_n = \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\,\frac{4n^2+5n-2}{n^4} = 4$$

La serie al secondo membro quindi converge e per il criterio del confronto converge anche la serie data.

45. $$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-\log n}{n^2+10n^3}}$$

Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-\log n}{n^2+10n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+10n^3} - \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^2+10n^3} = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Applichiamo il criterio del quoziente assumendo $v_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} n\sqrt{\frac{n-\log n}{n^2+10n^3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3-n^2\log n}{n^2+10n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1-\frac{\log n}{n}}{\frac{1}{n}+10}} = \sqrt{\frac{1}{10}}$$

Essendo v_n divergente, anche la serie data è divergente.

46. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} = 0$$

Applichiamo il criterio del quoziente assumendo $v_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\operatorname{arctg} n}{n} = \frac{\pi}{2}$$

Essendo v_n divergente lo è anche la serie data.

47. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Poiché $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x\log 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2^x(\log 2)^2} = 0$$

si ha: $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

Siccome:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2x^2}{2^x}=0$$

applicando il criterio del quoziente con $v_n=\frac{1}{n^2}$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{n^2}{2^n}=0$$

e quindi la serie è convergente.

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^2}{n^2}$

Siccome $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ si ha: $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log n}{n}\right)^2=0$

Applichiamo il criterio del quoziente assumendo $v_n=\frac{1}{n^p}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\frac{\log^2 n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\log n}{n}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\log n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\cdot 2\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{\sqrt{n}}=0$$

La serie è quindi convergente.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n^3}}$

Siccome $\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^6}}\cdot\frac{-3x^2}{x^6}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{x^6+1}=0$

si ha:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n^3}}=0$$

Applichiamo il criterio del quoziente assumendo $v_n=\frac{1}{n}$

Poiché

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^6}\cdot\frac{-3x^2}{x^6}}{\frac{-3x^2}{x^6}}=1$$

si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty} n\sqrt{n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n^3}}=1$$

e quindi la serie diverge.

50. $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{n}$

Siccome $\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{sen}^2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=0$

si ha $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

Applichiamo il criterio del quoziente assumendo $v_n=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2=1$$

La serie quindi diverge.

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

Analogamente a quanto visto nell'es. 47 si può verificare che la serie converge applicando il criterio del quoziente dopo aver assunto $v_n=\frac{1}{n^2}$

Oppure, applicando il criterio dell'integrale, si ha:

$$\int_1^{\infty}\frac{x\,dx}{2^x}=\int_1^{\infty}e^{-x\log 2}x\,dx=\left[\frac{e^{-x\log 2}}{-\log 2}\right]_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\frac{e^{-x\log 2}}{\log 2}dx=$$

$$= \frac{e^{-\log 2}}{\log 2} + \frac{1}{\log 2}\left[\frac{-e^{-x\log 2}}{\log 2}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{2(\log 2)^2}$$

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$

Poiché $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$

la serie diverge.

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}$

Si ha: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Applichiamo il criterio del quoziente assumendo $v_n = \dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^3}{n+6}} = \infty$$

la serie quindi diverge.

54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

La presenza della potenza suggerisce l'impiego del criterio della radice che dà:

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1^{\infty} \quad \text{(forma indeterminata)}$$

Calcoliamo il limite per $x \to \infty$ di $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$ prendendo i logaritmi di ambo i membri:

$$\log y = x \log\frac{x}{x+1} \quad - \quad \lim_{x\to\infty} \log y = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x+1}{x} \cdot \dfrac{-x+(x+1)}{(x+1)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

quindi $\quad y = e^{-1} = \dfrac{1}{e} < 1$

Essendo il limite minore di 1, per il criterio della radice, la serie è convergente.

55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\infty^{(1+0)}} = 0$$

Per il criterio del quoziente, assumendo $v_n = \dfrac{1}{n}$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n\, n^{\frac{1}{n}}} = 1$$

e quindi la serie diverge.

56. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Applicando il criterio dell'integrale si ha:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\log x} = \int_2^{\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\log x}\,dx = [\log(\log x)]_2^{\infty} = \log(\log\infty) - \log(\log 2) = \infty$$

e quindi la serie diverge.

57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Applicando il criterio dell'integrale si ha:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2\,dx}{2x^3-1} = \frac{1}{6}\int_1^{\infty} \frac{6x^2}{2x^3-1}\,dx = \frac{1}{6}\left[\log(2x^3-1)\right]_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty$$

e quindi la serie diverge.

58. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^3}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Applicando il criterio dell'integrale si ha:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^3} = \int_2^{\infty} \frac{d(\log x)}{(\log x)^3} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\log x)^2}\right]_2^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log^2\infty} - \frac{1}{(\log 2)^2}\right) = \frac{1}{2(\log 2)^2}$$

e quindi la serie è convergente.

59. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Applicando il criterio dell'integrale si ha:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}\,2t\,dt}{t} = 2\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt = \frac{2}{e}$$

e quindi la serie è convergente.

60. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Applicando il criterio dell'integrale si ha:

$$\int_2^{\infty} \frac{\log x}{x}\,dx = \left[\frac{\log^2 x}{2}\right]_2^{\infty} = \infty$$

e quindi la serie è divergente.

61. $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{2^{\log(\log n)}}{n\log n}$

Applichiamo il criterio dell'integrale:

$$I = \int_{10}^{\infty} \frac{2^{\log(\log x)}}{x\log x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_{10}^{M} \frac{2^{\log(\log x)}}{x\log x}\,dx$$

Ponendo $\log x = t \;\rightarrow\; \dfrac{dx}{x} = dt$ con $\log 10 \leqslant t \leqslant \log M = M_1$ si ha:

$$I = \lim_{M_1\to\infty}\int_{\log 10}^{M_1} \frac{2^{\log t}}{t}\,dt$$

Poniamo adesso

$\log t = y \;\rightarrow\; \dfrac{dt}{t} = dy$ con $\log\log 10 \leqslant y \leqslant \log M_1 = M_2$

Si ottiene:

$$I = \lim_{M_2\to\infty}\int_{\log(\log 10)}^{M_2} 2^y\,dy = \lim_{M_2\to\infty}\int_{\log(\log 10)}^{M_2} e^{y\log 2}\,dy = \lim_{M_2\to\infty}\left[\frac{e^{y\log 2}}{\log 2}\right]_{\log(\log 10)}^{M_2} = \infty$$

e quindi la serie diverge.

62. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{arc\,tg}\,n}}{n^2+1}$

Applicando il criterio dell'integrale si ha:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\mathrm{arc\,tg}\,x}}{1+x^2}\,dx = \left[e^{\mathrm{arc\,tg}\,x}\right]_1^{\infty} = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{4}}$$

e quindi la serie converge.

63. Per dimostrare che $\displaystyle\frac{9}{8} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{5}{4}$ consideriamo il grafico della funzione $\dfrac{1}{x^2}$:

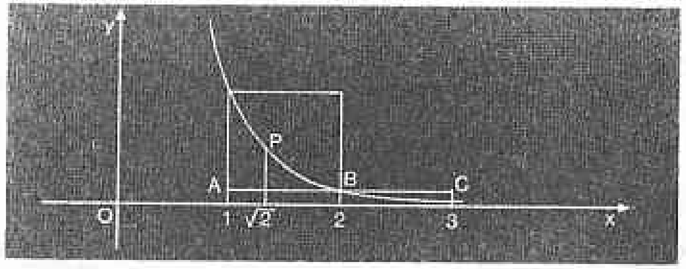


Fig. 4.3.1

In un generico intervallo (a, b) il suo integrale definito è:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2}$$

Dalla fig. 4.3.1 si può rilevare che:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - 1 < \frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

da cui si ottiene:

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2}$$

È richiesta però una precisione superiore perché, come si vede dal seguente diagramma, l'intervallo richiesto è interno a quello ottenuto:

Osservando dalla fig. 4.3.1 che, al crescere di n, la spezzata si avvicina alla curva $\frac{1}{x^3}$ e che

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}$$

è anche l'area dei rettangoli AB21 e BC32 (infatti l'ordinata di B è 1/8), si ha che:

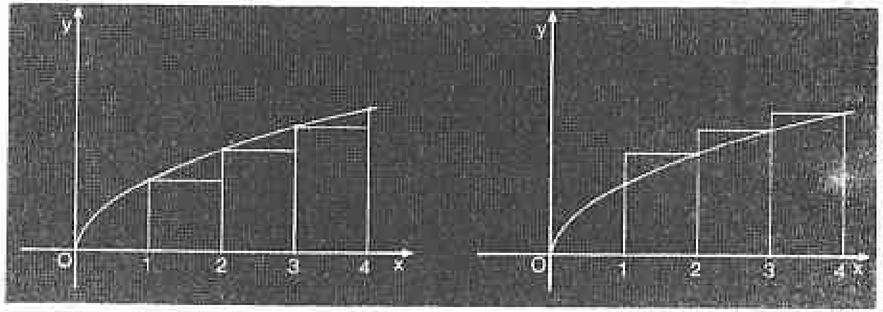
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - 1 < \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$$

e che

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{8} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - 1 \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} > \frac{9}{8}$$

il che è quanto si voleva dimostrare.

64. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ e la funzione $y = \sqrt{x}$ hanno la rappresentazione grafica indicata in fig. 4.3.2.



(a) (b)

Fig. 4.3.2

Dalla fig. 4.3.2-a si deduce che:

$$\int_1^n \sqrt{x}\, dx > \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} > \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} + \sqrt{n} > \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} + \sqrt{n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Dalla fig. 4.3.2-b si deduce che:

$$\int_1^n \sqrt{x}\, dx < \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} < \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} \quad \rightarrow$$

$\rightarrow$ [sommando 1 ad ambo i membri] $\rightarrow$

$$\rightarrow \quad \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} < \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} + 1 = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$

Essendo la serie a segni alterni si applica il criterio di Leibnitz.

Poiché $u_1 > u_2 > \dots > u_n > u_{n+1}$

e $\quad \lim_{n \to \infty} |u_n| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

la serie converge.

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2n+2}$

Essendo: $u_1 > u_2 > \dots > u_n > u_{n+1}$

e $$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+2n+2} = 0$$

la serie converge.

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3n-1}$

Siccome $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$

la serie diverge.

68. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{n}$

Si ha: $u_1 > u_2 > \dots > u_n > u_{n+1} > \dots$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{n} = 0$$

la serie quindi converge.

69. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\log n}$

Poiché $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$$

la serie diverge.

70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$

Siccome per il termine generale della serie dei valori assoluti vale la relazione:

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$ [= termine generale della serie p con $p = 2$ e quindi convergente]

la serie è assolutamente convergente.

71. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$

La serie non è assolutamente convergente come si può constatare applicando il criterio dell'integrale alla serie dei valori assoluti (cfr. es. 53).
Considerata la serie a segni alterni si ha:

$$u_2 > u_3 > u_4 > \dots \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \log n} = 0$$

quindi la serie è condizionatamente convergente.

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$

Applicando il criterio dell'integrale:

$$\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log(x^2+1)\right]_1^{\infty} = \infty$$

si constata che la serie non è assolutamente convergente.
Per la serie a segni alterni si ha:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

quindi la serie è condizionatamente convergente.

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^3+1)^{\frac{4}{3}}}$

Si ha:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^{\frac{4}{3}}} = \infty$$ [il numeratore è un infinito di ordine superiore al denominatore]

La serie diverge perché il suo termine generale $|u_n|$ non tende a zero per cui non può essere assolutamente convergente né verificare il criterio di Leibnitz per le serie alternate.

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}}$

La serie è assolutamente convergente, come si può verificare con il criterio del quoziente, assumendo:

$$v_n = \frac{1}{n^p} \qquad \text{con} \quad p = \frac{3}{2}$$

$$\frac{|u_n|}{v_n} = n^{\frac{3}{2}}\,|u_n| = \frac{n \cdot n^{\frac{1}{2}}}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{2n-1}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

per cui: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{v_n} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

75. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{2^n+1}$

La serie è assolutamente convergente, come si può verificare con il criterio del quoziente, assumendo $v_n = \frac{1}{n^2}$

Si ha:

$$\frac{|u_n|}{v_n} = \frac{n^5}{2^n+1}$$

e quindi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{2^n+1} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^{n\log 2}} = 0$$

76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi a}{x^2+n^2}$ con x e a reali

La serie è assolutamente convergente. Infatti, per il criterio del confronto, si ha:

$$\left|\frac{\cos n\pi a}{x^2+n^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\ [= \text{termine generale di serie convergente}]$$

77. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}$

La serie è assolutamente convergente, come si può verificare con il criterio del rapporto applicato ai moduli:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+1}{(n+2)e^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)e^n}{n} = \frac{1}{e}\cdot\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{e} < 1$$

Allo stesso risultato si perviene applicando il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{e}\cdot\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \to \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{e}$$

78. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{2n}}$

La serie è assolutamente convergente, come si può verificare con il criterio del rapporto applicato ai moduli:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}\cdot\frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{8}{9} < 1$$

Col criterio della radice si ha:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{8}{9}$$

Si osservi che $|u_n|$ è anche la serie geometrica di ragione $\frac{8}{9}$

79. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$

La serie è convergente, come si può verificare con il criterio del rapporto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10^{2n+2}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{10^{2n}} = \frac{10^2}{2n(2n+1)}$$

e quindi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$$

80. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{3^n} = 3\,\frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 > 1$$

la serie quindi diverge.

81. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\sqrt{5}-1)^{n+1}}{n^2+2+2n} \cdot \frac{n^2+1}{(\sqrt{5}-1)^n} = (\sqrt{5}-1)\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = (\sqrt{5}-1) > 1$$

e quindi la serie diverge.

82. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n(n+1)\,n!}{(n+1)^n(n+1)\,n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^{\infty}$$

Si perviene ad una forma indeterminata. Il valore del limite può essere individuato con le seguenti considerazioni.

Poniamo: $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

Prendendo i logaritmi di ambo i membri si ha:

$$\log y = x \log\frac{x}{x+1} = \frac{\log\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{1}{x}}$$

Passando al limite:

$$\lim_{x\to\infty} \log y = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{-x+(x+1)}{(x+1)^2}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2+x} = -1$$

In definitiva si ha:

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{1}{e}$$

La serie è quindi convergente.

83. $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^6 + \dots$

La serie è convergente perché somma di due serie convergenti che sono:

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots = \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\text{serie geometrica di ragione } \tfrac{1}{9} < 1)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots\right] =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot(\text{serie geometrica di ragione } \tfrac{4}{9} < 1)$$

84. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a(a+d)}{b(b+d)} + \dfrac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a(a+d)\dots(a+nd)(a+nd+d)}{b(b+d)\dots(b+nd)(b+nd+d)} \cdot \frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{a(a+d)\dots(a+nd)} =$$

$$= \frac{a+nd+d}{b+nd+d}$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

il criterio risulta inefficace; applichiamo il criterio di Raabe che dà:

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n - \frac{an + n^2d + nd}{b+nd+d} = \frac{n(b-a)}{nd+b+d}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(b-a)}{nd+b+d} = \frac{b-a}{d}$$

Per $b - a > d$ il limite è > 1 quindi la serie converge

Per $b - a < d$ il limite è < 1 quindi la serie diverge

Per $b - a = d$ il rapporto vale $\dfrac{nd}{nd+b+d} < 1$ quindi la serie diverge.

85. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6} + \dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9} + \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \dots$

È un caso particolare della serie studiata nell'esercizio precedente con $a = 1$, $b = 3$, $d = 3$; siccome $b - a = 2 < d = 3$ la serie diverge.

86. $\dfrac{2}{9} + \dfrac{2 \cdot 5}{9 \cdot 12} + \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8}{9 \cdot 12 \cdot 15} + \ldots$

Si ha:

$a = 2 \quad b = 9 \quad d = 3$

$(b - a) = 7 > d = 3$

quindi la serie converge.

87. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\frac{n}{2}}}$

Siccome è una serie numerica a termini positivi si può applicare il criterio della radice che dà:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} = 0$$

per cui la serie è convergente. Indicando con S la sua somma si ha:

$S = s_n + R_n$

dove

$$R_n = \frac{1}{n^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{1}{(n+1)^{\frac{n+2}{2}}} + \frac{1}{(n+2)^{\frac{n+3}{2}}} + \ldots < \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} n} +$$

$$+ \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} n^{\frac{3}{2}}} + \ldots = \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \ldots \right] =$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \cdot (\text{serie geometrica di ragione } q = \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 \text{ per } n > 1) =$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} (\sqrt{n} - 1)}$$

Ponendo $n = 2, 3, 4, \ldots$ si ottiene rispettivamente:

$$R_2 < \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)}$$

$$R_3 < \frac{1}{3^{\frac{3}{2}} (\sqrt{3} - 1)}$$

$$R_4 < \frac{1}{4^2 (2 - 1)} = \frac{1}{16} < 10^{-1}$$

Quindi si può scrivere:

$$S - s_4 = S - \left(1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^2} \right) = R_4 < 10^{-1}$$

cioè la somma parziale s_4 differisce dalla somma S per $|e| < 10^{-1}$

4.4.- Esercizi da esame

Si determinino i valori del parametro reale a per i quali convergono le serie:

88. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^n$

89. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a+2}{a+1} \right)^n$

90. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + \sqrt{n})^a}{(n+2)^3} \cdot (n^3 + \sqrt[3]{n^2})^{2-a}$

91. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-n)^3}{(n + \sqrt[3]{n})^{a+1}} \cdot (n^2 - 2)^{a-1}$

92. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^a}{n^3 + \log^3 n}$

Studiare il carattere delle seguenti serie:

93. $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty} \left(1 - \frac{6}{n} \right)^{\frac{n^3}{3n^2+1}}$

94. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{\frac{n^2+1}{2n}}$

Soluzioni

88. La condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza implica che sia:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^n = 0$$

Essendo n intero positivo, detta condizione si traduce in:

$$\frac{1+a}{1-a} < 1 \quad \to \quad \frac{1+a-1+a}{1-a} < 0 \quad \to \quad \frac{2a}{1-a} < 0 \quad \to \quad a < 0 \, , \; a > 1$$

La serie data è quella geometrica con ragione $q = \frac{1+a}{1-a}$ che converge per:

$$\left|\frac{1+a}{1-a}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < \frac{1+a}{1-a} < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < -1 + \frac{2}{1-a} < 1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 0 < \frac{2}{1-a} < 2 \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{1}{1-a} < 1 \quad \rightarrow \quad a < 0$$

89. Il procedimento è analogo a quello dell'esercizio precedente.
La condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza implica, essendo n intero positivo, che:

$$\frac{a+2}{a+1} < 1 \quad \rightarrow \quad \frac{a+2-a-1}{a+1} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a+1} < 0 \quad \rightarrow \quad a < -1$$

La serie data, essendo geometrica con ragione $q = \frac{a+2}{a+1}$, converge per:

$$\left|\frac{a+2}{a+1}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < \frac{a+2}{a+1} < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < 1 + \frac{1}{a+1} < 1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -2 < \frac{1}{a+1} < 0 \quad \rightarrow \quad a < -\frac{3}{2}$$

90. Per la condizione necessaria di convergenza deve essere nullo il limite per $n \rightarrow \infty$ del termine generale della serie. Si ha quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+\sqrt{n})^a}{(n+2)^3} \cdot (n^2 + \sqrt[3]{n^2})^{2-a} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^a \cdot n^{2(2-a)}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)^{2-a}}{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)^3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a+4-2a-3} \cdot [\text{espressione tendente a 1 per } n \rightarrow \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-a}$$

Affinché il limite sia nullo e la serie possa convergere, deve essere quindi:

$1 - a < 0 \quad \rightarrow \quad a > 1$

Per verificare l'eventuale convergenza applichiamo il criterio del quoziente scegliendo $v_n = \frac{1}{n^p}$, termine generale della serie armonica generalizzata che converge per $p > 1$. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-a+p} \cdot [\text{espressione tendente a 1 per } n \rightarrow \infty]$$

Perché il limite sia finito deve essere:

$1 - a + p \leqslant 0 \quad \rightarrow \quad a \geqslant 1 + p$

Essendo $p > 1$ la condizione ottenuta è più restrittiva della condizione necessaria per la convergenza ($a < 1$), quindi per $a \geqslant 1 + p$ la serie è convergente.

91. Con procedimento analogo a quello seguito nell'esercizio precedente si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n}-1\right)^2 \cdot n^{2(a-1)}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{a-1}}{n^{a+1}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^{a-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1} \cdot [\text{termine tendente a 1 per } n \rightarrow \infty]$$

Il limite è nullo per:

$a - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad a < 1$

Applicando il criterio del quoziente scegliendo per il confronto $v_n = \frac{1}{n^p}$, termine generale della serie armonica generalizzata che converge per $p > 1$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1+p} \cdot [\text{termine tendente a 1 per } n \rightarrow \infty]$$

Questo limite risulta finito per:

$a - 1 + p \leqslant 0 \quad \rightarrow \quad a \leqslant 1 - p$

relazione più restrittiva rispetto a quella scaturita dalla condizione necessaria per la convergenza ($a < 1$), per cui la serie risulta convergente per:

$a \leqslant 1 - p$

92. Verifichiamo se la serie può convergere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^a}{n^3 + \log^3 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{a-3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(\frac{\log n}{n}\right)^3}$$

Questo limite è nullo per

$a - 3 < 0 \quad \rightarrow \quad a < 3$

Applichiamo il criterio del quoziente scegliendo per il confronto $v_n = \frac{1}{n^p}$, termine generale della serie armonica generalizzata che converge per $p > 1$. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-3+p} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(\frac{\log n}{n}\right)^3}$$

Questo limite è finito per:

$a - 3 + p \leqslant 0 \quad \rightarrow \quad a \leqslant 3 - p$

relazione più restrittiva rispetto a quella scaturita dalla condizione necessaria per la convergenza ($a < 3$), pertanto la serie risulta convergente per:

$a \leqslant 3 - p$

93. Verifichiamo se la serie può essere convergente:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{6}{n}\right)^{\frac{n^3}{3n^2+1}} = (1^\infty) = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{6}{n}\right)^{-\frac{n}{6}}\right]^{\frac{-6n^2}{3n^2+1}} = \left[\text{ponendo } -\frac{n}{6} = m\right] =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{-6 \cdot 36m^2}{3 \cdot 36m^2 + 1}} = e^{-2}$$

Poiché il limite è diverso da zero la serie non può essere convergente.

94. Verifichiamo se la serie può essere convergente:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n^3+1}{2n}} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right]^{\frac{n^3+1}{n^2}} = \left[\text{ponendo } -\frac{n}{2} = m\right] =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{-8m^3+1}{4m^2}} = e^{-\infty} = 0$$

La serie può quindi essere convergente.
Poiché tutti i termini della serie sono positivi, applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n^3+1}{2n^2}} = \lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{-8m^3+1}{8m^3}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

La serie è quindi convergente.