Esame di ANALISI MATEMATICA - 6, 9 e 12 CFU

Docente: *Prof.sa P. Cavaliere*

6 novembre 2013

I S T R U Z I O N I
▷ **Svolgere i seguenti esercizi attenendosi alle domande in essi formulate e MOTIVANDO LE RISPOSTE IN MODO CHIARO ED ESAURIENTE.**
▷ **Non è consentito l'uso di calcolatrici, libri ed appunti.**
▷ **Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato SCRITTO IN MODO CHIARO E LEGGIBILE scrivendo sulla 1^a pagina cognome e nome e numero di matricola.**

Quesito preliminare: Fornire le definizioni di:

1. funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva;
2. funzione periodica;
3. radice n-esima di un numero complesso;
4. funzione radice quadrata e cubica;
5. asintoto per una funzione;
6. punto angoloso.

Es. 1: Esprimere in forma algebrica il numero complesso

$$i^{100} + i^{27} + i^{17}\,.$$

Calcolarne poi le radici quarte e rappresentarle nel piano complesso.

Es. 2: Descrivere le principali proprietà (dominio, comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivabilità, intervalli di monotonia, intervalli di concavità e convessità) della funzione

$$f(x) := \sqrt[4]{1 + x^4},$$

tracciandone un grafico qualitativo. Risolvere inoltre l'equazione $f(x) = 0,5$.

Es. 3 *SOLO per esami da 9 e 12 CFU:* Calcolare, se esiste, il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1}\, dx\,.$$

Es. 4 *SOLO per esame da 12 CFU:* Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi)\ \tan^2(\frac{1}{n})\ .$$

Risoluzione Compito del 6 novembre 2013
- c.l.t. in Informatica -

Quesiti preliminari

1. Siano $X, Y \neq \emptyset$ e $f: X \to Y$.
   - f è detta "iniettiva" $\overset{def}{\iff}$ $\forall x, y \in X$ t.c. $x \neq y$: $f(x) \neq f(y)$
   - " " " "suriettiva" $\overset{def}{\iff}$ $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$
   - " " " "biiettiva" $\overset{def}{\iff}$ f è sia iniettiva sia suriettiva

2. Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $T > 0$.
   f è detta "T- periodica" $\overset{def}{\iff}$ $\begin{cases} 1) \ \forall x \in X: \ x + T \in X \\ 2) \ f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in X \end{cases}$

3. Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Si dice UNA radice n-esima in $\mathbb{C}$ un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ t.c. $z^n = w$.
   Ogni numero complesso non nullo ammette esattamente "n" radici n-esime distinte.

4. La funzione radice quadrata è l'inversa della restrizione della funzione $f(x) = x^2$ all'intervallo $[0, +\infty[$.
   La funzione radice cubica è l'inversa della funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$

5. Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che X non è limitato superiormente [risp. inferiormente].
   Una retta $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, è detta

un "asintoto per f a $+\infty$ [risp. a $-\infty$]" $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0 \qquad \left[\text{risp. } \lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0\right].$$

6. Sia $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $x_0\in X\cap D_{dx}(X)\cap D_{sx}(X)$

x_0 è detto un 'punto angoloso' per f

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1. \ \exists \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_{dx}(x_0)\in\mathbb{R} \\[2ex] 2. \ \exists \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_{sx}(x_0)\in\mathbb{R} \\[2ex] 3. \ f'_{dx}(x_0)\neq f'_{sx}(x_0). \end{cases}$$

Es. 1

Basta ricordare che

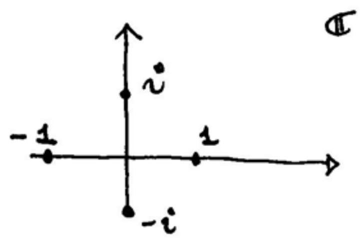
$$i^1=i, \quad i^2=-1, \quad i^3=-i, \quad i^4=1$$

Allora

$$i^{100}+i^{27}+i^{17} = (i^4)^{25} + i^3\cdot(i^4)^6 + i(i^4)^4$$
$$= 1-i+i=1$$

Le radici quarte distinte di 1 in $\mathbb{C}$ sono

$$z_0=1, \quad z_1=i, \quad z_2=-1, \quad z_3=-i$$



Esercizio

Studiare

$$f(x) = \sqrt[4]{1 + x^4}$$

Ris.

- $X = \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$
- f è pari. sufficiente studiare $f_{|[0,+\infty[} =: f_1$

STUDIO di f_1

- $f_1 \in C^\infty([0,+\infty[) \subset C^2([0,+\infty[)$
- $f_1 > 0$ in $[0,+\infty[$
- $f_1(0) = 1$ $\quad f_1 \longrightarrow +\infty$ per $x \to +\infty$ no as. oriz.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{1+x^4} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\sqrt[4]{\tfrac{1}{x^4}+1} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^4}+1\right)^{1/4} - 1}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x^4}+1\right)^{1/4} - 1}{1/x^4}$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$y = x$ è un asintoto obliquo a $+\infty$ per f_1

- $f_1'(x) = \frac{1}{4}(1+x^4)^{-3/4} \cdot 4x^3$

$f_1' > 0$ in $]0,+\infty[$

$f_1' = 0$ in $x=0$

$x=0$ è un p. di minimo assoluto per f_1

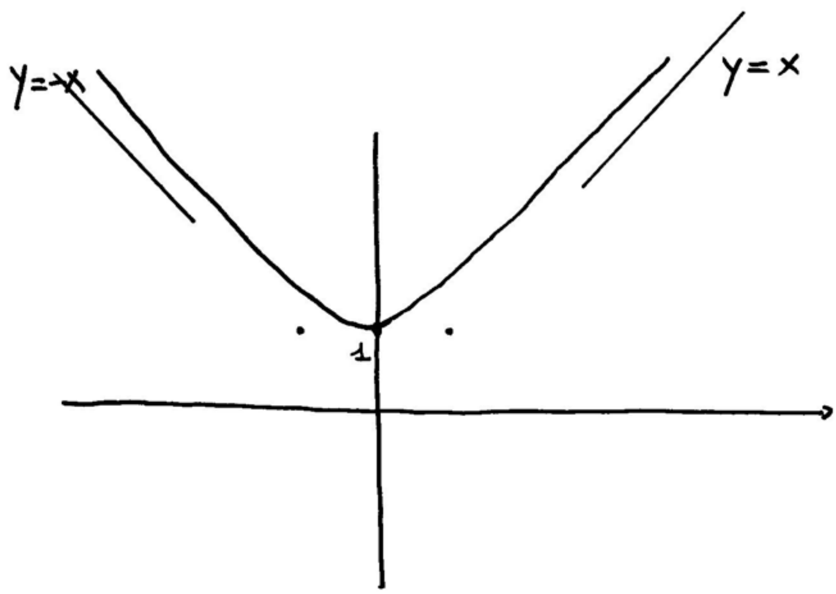
- $f_1''(x) = -\frac{3}{\cancel{16}}(1+x^4)^{-7/4} \cdot (\cancel{4}x^3)^2 + \frac{1}{\cancel{4}}(1+x^4)^{-3/4} \cdot \cancel{12}^{\,3} x^2$

$= 3x^2(1+x^4)^{-7/4} \left\{ -x^4 + (1+x^4) \right\}$

$= 3x^2(1+x^4)^{-7/4}$

$f_1''(x) > 0$ in $]0,+\infty[$ $\iff$ f_1 conv. in $]0,+\infty[$

$f_1''(x) = 0$ in $x=0$



L'equazione $f(x) = 0,5$ non ha chiaramente soluzione, in quanto

$$f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es. 3

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{e^x+1} D(e^x)\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{effettuando} \\ \text{la sostituz.} \\ t=e^x}}{=} \int \frac{t^2}{t+1}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t+1} + \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= \int (t-1)\,dt + \int \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - t + \ln|t+1| + c$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ t=e^x}}{=} \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln(1+e^x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Es. 4

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi)\left(\mathrm{tg}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\mathrm{tg}\frac{1}{n}\right)^2$$

La serie assegnata è una serie a segni alterni. Tale serie converge assolutamente, in base al criterio del confronto asintotico con la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$