

Esame di ANALISI MATEMATICA - 6, 9 e 12 CFU

Docente: *Prof.ssa P. Cavaliere*

6 novembre 2013



I S T R U Z I O N I

▷ Svolgere i seguenti esercizi attenendosi alle domande in essi formulate e **MOTIVANDO LE RISPOSTE IN MODO CHIARO ED ESAURIENTE.**

▷ **Non è consentito l'uso di calcolatrici, libri ed appunti.**

▷ **Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato SCRITTO IN MODO CHIARO E LEGGIBILE** scrivendo sulla 1^a pagina cognome e nome e numero di matricola.

Quesito preliminare: Fornire le definizioni di:

1. funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva;
2. funzione periodica;
3. radice n-esima di un numero complesso;
4. funzione radice quadrata e cubica;
5. asintoto per una funzione;
6. punto angoloso.

Es. 1: Esprimere in forma algebrica il numero complesso

$$i^{100} + i^{27} + i^{17}.$$

Calcolarne poi le radici quarte e rappresentarle nel piano complesso.

Es. 2: Descrivere le principali proprietà (dominio, comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivabilità, intervalli di monotonia, intervalli di concavità e convessità) della funzione

$$f(x) := \sqrt[4]{1+x^4},$$

tracciandone un grafico qualitativo. Risolvere inoltre l'equazione $f(x) = 0, 5$.

Es. 3 *SOLO per esami da 9 e 12 CFU:* Calcolare, se esiste, il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx.$$

Es. 4 *SOLO per esame da 12 CFU:* Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \tan^2\left(\frac{1}{n}\right).$$

Risoluzione Compito del 6 novembre 2013
- c.e.t. in Informatica -

Quesiti preliminari

1. Siano $X, Y \neq \emptyset$ e $f: X \rightarrow Y$.
 - f è detta "iniettiva" $\Leftrightarrow^{\text{def}} \forall x, y \in X$ t.c. $x \neq y : f(x) \neq f(y)$
 - " " " " "suriettiva" $\Leftrightarrow^{\text{def}} \forall y \in Y \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$
 - " " " " "biiettiva" $\Leftrightarrow^{\text{def}} f$ è sia iniettiva sia suriettiva
2. Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $T > 0$.
 f è detta "T-periodica" $\Leftrightarrow^{\text{def}} \begin{cases} 1) \forall x \in X: x+T \in X \\ 2) f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in X \end{cases}$
3. Sia $w \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}$. Si dice UNA radice m-esima in \mathbb{C} un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ t.c. $z^m = w$.
Ogni numero complesso non nullo ammette esattamente "m" radici m-esime distinte.
4. La funzione radice quadrata è l'inversa della restrizione della funzione $f(x) = x^2$ all'intervallo $[0, +\infty[$.
La funzione radice cubica è l'inversa della funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$
5. Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che X non è limitato superiormente [risp. inferiormente].
Una retta $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, è detta

un "asintoto per f a $+\infty$ [risp. a $-\infty$] " $\Leftrightarrow^{\text{def}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \quad [\text{risp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax+b) = 0].$$

6. Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X \cap D_{dx}(X) \cap D_{sx}(X)$

x_0 è detto un 'punto angoloso' per f

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_{dx}(x_0) \in \mathbb{R} \\ 2. \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_{sx}(x_0) \in \mathbb{R} \\ 3. f'_{dx}(x_0) \neq f'_{sx}(x_0). \end{array} \right.$$

Es. 1

Basta ricordare che

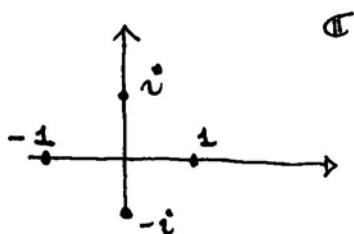
$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

Allora

$$\begin{aligned} i^{100} + i^{27} + i^{17} &= (i^4)^{25} + i^3 \cdot (i^4)^6 + i(i^4)^4 \\ &= 1 - i + i = 1 \end{aligned}$$

Le radici quarte distinte di 1 in \mathbb{C} sono

$$z_0 = 1, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -i$$



Esercizio

Studiare

$$f(x) = \sqrt[4]{1+x^4}$$

Ris.

- $X = \text{dom} f = \mathbb{R}$
- f è pari, sufficiente studiare $f|_{[0, +\infty[} =: f_1$

STUDIO di f_1

- $f_1 \in C^\infty([0, +\infty[) \subset C^2([0, +\infty[)$
- $f_1 > 0$ in $[0, +\infty[$
- $f_1(0) = 1$ $f_1 \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ ma as. orizz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1+x^4} - x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt[4]{\frac{1}{x^4} + 1} - x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^4} + 1\right)^{1/4} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^8} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x^4} + 1\right)^{1/4} - 1}{\frac{1}{x^4}} \\ &= 0 \cdot \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ è un asintoto obliquo a $+\infty$ per f_1

$$\bullet f_1'(x) = \frac{1}{4} (1+x^4)^{-3/4} \cdot 4x^3$$

$$f_1' > 0 \text{ in }]0, +\infty[$$

$$f_1' = 0 \text{ in } x=0$$

$x=0$ è un p. di minimo assoluto per f_1

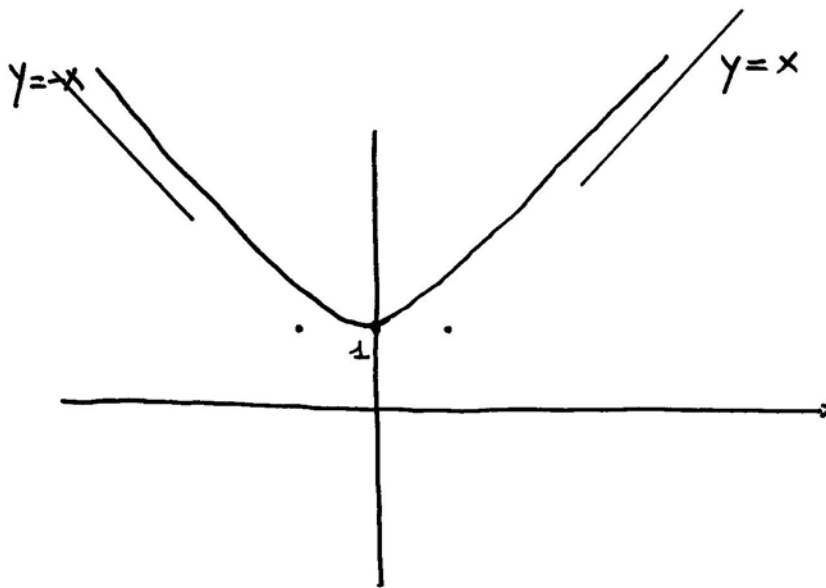
$$\bullet f_1''(x) = -\frac{3}{16} (1+x^4)^{-7/4} \cdot (4x^3)^2 + \frac{1}{4} (1+x^4)^{-3/4} \cdot 12x^2$$

$$= 3x^2 (1+x^4)^{-7/4} \left\{ -x^4 + (1+x^4) \right\}$$

$$= 3x^2 (1+x^4)^{-7/4}$$

$$f_1''(x) > 0 \text{ in }]0, +\infty[\iff f_1 \text{ conv. in }]0, +\infty[$$

$$f_1''(x) = 0 \text{ in } x=0$$



l'equazione $f(x) = 0,5$ non ha chiaramente soluzione, in quanto

$$f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es. 3

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} D(e^x) dx$$

↑
effettuando
la sostituz.
 $t = e^x$

$$= \int \frac{t^2}{t+1} dt = \int \frac{t^2-1}{t+1} + \frac{1}{t+1} dt$$

$$= \int (t-1) dt + \int \frac{1}{t+1} dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - t + \ln|t+1| + c$$

↑
 $t = e^x$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln(1+e^x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Es. 4

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^2$$

La serie assegnata è una serie a segni alterni.
Tale serie converge assolutamente, in base al criterio
del confronto asintotico con la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$