Prova A dell' esame di ANALISI MATEMATICA

Docente: *Prof.sa P. Cavaliere*

7 giugno 2013

I S T R U Z I O N I

▷ *Svolgere i seguenti esercizi attenendosi alle domande in essi formulate e MOTIVANDO LE RISPOSTE IN MODO CHIARO ED ESAURIENTE.*

▷ *Non è consentito l'uso di calcolatrici, libri ed appunti.*

▷ *Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato SCRITTO IN MODO CHIARO E LEGGIBILE scrivendo sulla 1^a pagina cognome e nome e numero di matricola,* **nonché anno di appartenenza e il numero di CFU dell'esame che si sta sostenendo**.

Quesito preliminare: Fornire le definizioni di:

1. intervallo;
2. punto di accumulazione;
3. funzione continua;
4. funzione arcocoseno.

Es. 1: Determinare, se esistono, tutti e soli i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano l'equazione

$$\left|\overline{z} - \frac{4}{z}\right| (z^3 - 27i) \;=\; 0,$$

e rappresentare le soluzioni nel piano complesso.

Es. 2: Descrivere le principali proprietà (dominio, comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivabilità, intervalli di monotonia, intervalli di concavità e convessità) della funzione

$$f(x) \;:=\; x^2(\log|x| - 1),$$

tracciandone un grafico qualitativo.

Es. 3: Determinare, se esiste, la famiglia di tutte e sole le primitive della funzione

$$f(x) := \frac{\log x}{x(2 - \log x)}\,.$$

Es. 4: Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n^3)}{n^2}.$$

Risoluzione

Quesito preliminare:

1. un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, con $X \neq \emptyset$, si dice un intervallo se, e soltanto se,
$$\forall x, y \in X, x < y : \{z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y\} \subseteq X\,;$$
ossia, se e soltanto se, per ogni coppia di punti distinti dell'insieme il segmento dell'asse reale da essi individuato è sempre interamente contenuto nell'insieme X
2. sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Un punto $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ è detto un punto di accumulazione per l'insieme X se, e soltanto se,
$$\forall U \in \mathcal{I}(x_o) : X \cap (U \setminus \{x_o\}) \neq \emptyset\,;$$
ossia, se e soltanto se, in ogni intorno U di $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ cade sempre almeno un punto dell'insieme X diverso da x_o.
3. sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f è detta continua in un punto $x_o \in X$ se, e soltanto se,
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 t.c. |f(x) - f(x_o)| < \epsilon \quad \forall x \in X t.c. |x - x_o| < \delta\,.$$
Ne segue quindi che una funzione è sempre continua nei punti isolati del suo dominio di definizione, in ogni altro punto $x_o \in X$ -che è chiaramente un punto d'accumulazione- la funzione è continua se, e soltanto se, converge in x_o al valore $f(x_o)$.
4. la funzione arcocoseno è la funzione inversa della restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$. È quindi definita in $[-1, 1]$ ed ha valori su $[0, \pi]$ ed è strettamente decrescente.

Es. 1: Si osserva che un numero $z \in \mathbb{C}$ soddisfa l'equazione

$$\left|\overline{z} - \frac{4}{z}\right| (z^3 - 27i) \; = \; 0 \tag{1}$$

se, e soltanto se,

$$\left|\overline{z} - \frac{4}{z}\right| \; = \; 0 \qquad \text{oppure} \qquad (z^3 - 27i) \; = \; 0\,. \tag{2}$$

La prima equazione in (5) è soddisfatta da tutti e soli i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| = 2$, i.e. da tutti e soli i punti del piano complesso della circonferenza di centro l'origine e raggio 2. Per la seconda equazione in (5) si osserva che

$$(z^3 - 27i) \; = \; 0 \iff z^3 = 27i \iff z^3 = \left[3^3, \frac{\pi}{2}\right] \iff z = \left[3, \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right] \quad \text{al variare di}\, k \in \mathbb{Z}\,. \tag{3}$$

Per rappresentare le soluzioni dell'equazione (4) nel piano bisogna quindi disegnare la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 ed i punti $P_o := \left[3, \frac{\pi}{6}\right]$, $P_1 := \left[3, \frac{5\pi}{6}\right]$ e $P_2 := \left[3, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Es. 2: Detto X il dominio della funzione

$$f(x) \; := \; x^2(\log|x| - 1),$$

si ha che $X :=]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$ e la funzione è derivabile almeno due volte in X essendo prodotto di funzioni derivabili almeno due volte.

La funzione f è pari. È sufficiente quindi studiare $f_1 = f_{|]0,+\infty[}$. Si osserva che

1. $f_1 > 0$ in $]e, +\infty[$, $f_1(x) = 0$ in $x = e$, $f_1 < 0$ in $]0, e[$
2. $\lim_{x\to 0^+} f_1 = 0$, quindi la funzione f_1 è prolungabile per continuità in 0
3. $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = +\infty$, quindi la funzione f_1 non ammette asintoti a $+\infty$.

Inoltre la funzione f_1 è derivabile due volte e

$$f_1'(x) \;=\; x(2\log x - 1), \qquad f_1''(x) \;:=\; 1 + 2\log x,$$

Con lo studio di opportune disequazioni si ottiene quindi che

1. $f_1 \downarrow$ in $]0, \sqrt{e}[$, $f_1 \uparrow$ in $]\sqrt{e}, +\infty[$ e $x = \sqrt{e}$ è un punto di minimo relativo per f_1
2. $\lim_{x\to 0^+} f_1' = 0$, quindi la funzione f_1 è prolungabile per continuità in 0 e qui presenta una tangente orizzontale
3. f_1 è concava in $]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[$ ed è convessa in $]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$. Il punto $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è un punto di flesso per f_1.

Es. 3: La funzione

$$f(x) := \frac{\log x}{x(2 - \log x)}$$

è continua nel suo dominio di definizione e quindi ammette primitive. Osservando che $(\log x)' = \frac{1}{x}$ ed effettuando la sostituzione $t = \log x$, si ha che

$$\int \frac{t}{2-t)} dt \;=\; -t - 2\log|t-2| + c \qquad \text{al variare di } \; c \in \mathbb{R}\,,$$

quindi tutte e sole le primitive della funcione f assegnata sono

$$-\log x - 2\log|\log x - 2| + c \qquad \text{al variare di } \; c \in \mathbb{R}\,.$$

Es. 4: La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n^3)}{n^2},$$

a segni alterni, converge assolutamente, quindi semplicemente. Infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n^3)}{n^2} \;\preceq\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} \;=\; \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \;<+\infty$$

Prova B dell' esame di ANALISI MATEMATICA

Docente: *Prof.sa P. Cavaliere*

7 giugno 2013

I S T R U Z I O N I
▷ *Svolgere i seguenti esercizi attenendosi alle domande in essi formulate e MOTIVANDO LE RISPOSTE IN MODO CHIARO ED ESAURIENTE.*
▷ *Non è consentito l'uso di calcolatrici, libri ed appunti.*
▷ *Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato SCRITTO IN MODO CHIARO E LEGGIBILE scrivendo sulla* 1^a *pagina cognome e nome e numero di matricola,* **nonché anno di appartenenza e il numero di CFU dell'esame che si sta sostenendo**.

Quesito preliminare: Fornire le definizioni di:

1. intervallo;
2. punto di accumulazione;
3. funzione derivabile;
4. funzione arcoseno.

Es. 1: Determinare, se esistono, tutti e soli i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano l'equazione

$$\left|\overline{z} - \frac{9}{z}\right| (z^4 - 16i) \;=\; 0,$$

e rappresentare le soluzioni nel piano complesso.

Es. 2: Descrivere le principali proprietà (dominio, comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivabilità, intervalli di monotonia, intervalli di concavità e convessità) della funzione

$$f(x) \;:=\; x^2(1 - \log|x|),$$

tracciandone un grafico qualitativo.

Es. 3: Determinare, se esiste, la famiglia di tutte e sole le primitive della funzione

$$f(x) := \frac{\tan x}{\cos^2 x\;(2 - \tan x)}\,.$$

Es. 4: Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \;\frac{\log(2 + \cos n)}{n^2}\;.$$

Breve risoluzione

Es. 1: Si osserva che un numero $z \in \mathbb{C}$ soddisfa l'equazione

$$\left|\overline{z} - \frac{9}{z}\right| (z^4 - 16i) \;=\; 0 \tag{4}$$

se, e soltanto se,

(5) $$\left|\overline{z} - \frac{9}{z}\right| \;=\; 0 \qquad \text{oppure} \qquad (z^4 - 16i) \;=\; 0\,.$$

La prima equazione in (5) è soddisfatta da tutti e soli i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| = 3$, i.e. da tutti e soli i punti del piano complesso della circonferenza di centro l'origine e raggio 3. Per la seconda equazione in (5) si osserva che

(6) $$(z^4 - 16i) \;=\; 0 \iff z^4 = 16i \iff z^4 = \left[2^4, \frac{\pi}{2}\right] \iff z = \left[3, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right] \quad \text{al variare di}\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Per rappresentare le soluzioni dell'equazione (4) nel piano bisogna quindi disegnare la circonferenza di centro l'origine e raggio 3 ed i punti $P_o := \left[2, \frac{\pi}{8}\right]$, $P_1 := \left[2, \frac{5\pi}{8}\right]$, $P_2 := \left[2, \frac{9\pi}{8}\right]$ e $P_3 := \left[2, \frac{13\pi}{8}\right]$

Es. 2: Detto X il dominio della funzione

$$f(x) \;:=\; x^2(1 - \log|x|),$$

si ha che $X :=]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$ e la funzione è derivabile almeno due volte in X essendo prodotto di funzioni derivabili almeno due volte.

La funzione f è pari. È sufficiente quindi studiare $f_1 = f_{|]0,+\infty[}$. Si osserva che

1. $f_1 > 0$ in $]0, e[$, $f_1(x) = 0$ in $x = e$, $f_1 < 0$ in $]e, +\infty[$
2. $\lim_{x\to 0^+} f_1 = 0$, quindi la funzione f_1 è prolungabile per continuità in 0
3. $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = -\infty$, quindi la funzione f_1 non ammette asintoti a $+\infty$.

Inoltre la funzione f_1 è derivabile due volte e

$$f_1'(x) \;=\; x(1 - 2\log x), \qquad f_1''(x) \;:=\; -(1 + \log x),$$

Con lo studio di opportune disequazioni si ottiene quindi che

1. $f_1 \uparrow$ in $]0, \sqrt{e}[$, $f_1 \downarrow$ in $]\sqrt{e}, +\infty[$, e $x = \sqrt{e}$ è un punto di massimo relativo per f_1
2. $\lim_{x\to 0^+} f_1' = 0$, quindi la funzione f_1 è prolungabile per continuità in 0 e qui presenta una tangente orizzontale
3. f_1 è convessa in $]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[$ e f_1 è concava in in $]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$. Il punto $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è un punto di flesso per f_1.

Es. 3: La funzione

$$f(x) := \frac{\tan x}{\cos^2 x\;(2 - \tan x)}$$

è continua nel suo dominio di definizione e quindi ammette primitive. Osservando che $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ si ha che, effettuando la sostituzione $t = \tan x$, si ha che

$$\int \frac{t}{2-t)} dt \;=\; -t - 2\log|t-2| + c \qquad \text{al variare di} \;\; c \in \mathbb{R}\,,$$

quindi tutte e sole le primitive della funcione f assegnata sono

$$-\tan x - 2\log|\tan x - 2| + c \qquad \text{al variare di} \;\; c \in \mathbb{R}\,.$$

Es. 4: La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \; \frac{\log(2+\cos n)}{n^2},$$

a segni alterni, converge assolutamente, quindi semplicemente. Infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(2+\cos n)}{n^2} \;\preceq\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log 3}{n^2} \;=\; \log 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \;<+\infty$$