

Programma dettagliato del corso di ANALISI MATEMATICA

C.l.t. in Informatica - a.a. 2013 -'14

Docente: *Prof.ssa Paola Cavaliere*

*Nozioni preliminari.*¹ Prodotto cartesiano di insiemi. Definizione di relazione. Relazioni di equivalenza, d'ordine parziale e totale. Insiemi (X, \preceq) parzialmente e totalmente ordinati. Definizione di maggiorante, minorante, massimo e minimo, estremo superiore ed inferiore di un sottoinsieme di (X, \preceq) e loro proprietà. Definizione di insieme parzialmente ordinato completo. Definizione di funzione e suo grafico. Restrizioni di funzioni. Funzioni composte. Funzioni iniettive, suriettive, biettive, invertibili, funzione inversa.

Il campo dei numeri reali. Definizione assiomatica del campo dei numeri reali. Conseguenze degli assiomi. Sottoinsiemi induttivi di \mathbb{R} . Definizione dell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali. Principio di induzione ed applicazioni. Principio di buon ordine. \mathbb{N} non è superiormente limitato (\mathbb{R} è archimedeo). Definizione dell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi e sue proprietà. Definizione dell'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ campo totalmente ordinato non completo. Definizione dei numeri irrazionali. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Polinomi. Equazioni e disequazioni di primo grado. Disequazioni prodotto e quoziente. Radici n-esime aritmetiche. Intervalli in \mathbb{R} . Valore assoluto di un numero reale. Equazioni e disequazioni di secondo grado. Equazioni e disequazioni con il valore assoluto.

Funzioni reali. Somma, differenza, prodotto e quoziente di funzioni reali. Estremi di una funzione reale. Funzioni limitate. Funzioni reali di una variabile reale. Grafico. Funzioni pari, dispari e funzioni monotone. Le funzioni elementari nel campo reale: funzioni costanti, affini lineari, potenza n-esima e radice n-esima. Disequazioni irrazionali. Funzioni trigonometriche e loro inverse locali. Funzione esponenziale e funzione logaritmo. Determinazione del dominio di definizione di una funzione composta di funzioni elementari.

Concetto di limite. Definizione di intorno, di intorno destro e sinistro di un punto $x_o \in \mathbb{R}$; chiusura rispetto all'intersezione finita di $\mathcal{I}(x_o)$ e proprietà di

¹Il programma è relativo al corso di Analisi da 12 c.f.u. Per quello da 9 c.f.u. bisogna escludere il capitolo serie numeriche, mentre per quello da 6 c.f.u. bisogna escludere i capitoli dell'integrazione secondo Riemann e delle serie numeriche.

separazione di Hausdorff (o T_2) di $\overline{\mathbb{R}}$. Definizione di punto d'accumulazione per un insieme numerico reale X . Esempi. $D_\infty(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$. Caratterizzazione dei punti di accumulazione. Condizione necessaria e sufficiente affinché $+\infty$ ($-\infty$) sia punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}$. Definizione di limite di una funzione reale di una variabile reale. Unicità del limite. Verifiche di limite: funzioni costanti, funzioni lineari, funzioni seno e coseno in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Interpretazione geometrica del concetto di limite. Località del limite. Limite delle restrizioni. Controesempi. Definizione di punto di accumulazione a destra e sinistra per X . Definizione di limite da destra e da sinistra. Proposizione di giunzione.

Dal limite alla funzione. Limitatezza locale di una funzione convergente. Controesempi. Teorema di confronto. Controesempio. Corollario e teorema di permanenza del segno. Corollario al teorema di permanenza del segno (condizione sufficiente per l'annullamento del limite di f).

Dalla funzione al limite. Monotonia dell'operazione di limite. Teorema dei due carabinieri. Corollario (condizione sufficiente affinché una funzione f sia infinitesima). Applicazione del teorema dei due carabinieri: calcolo del limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Operazione di limite ed operazioni algebriche nel caso di limiti finiti ed estensioni. Forme indeterminate. Limiti di polinomi e limiti di funzioni razionali. Limite di funzioni composte ed applicazioni. Limite di funzioni monotone. Applicazioni.

*Successioni.*¹ Definizione di successione reale. Somma, differenza, prodotto e rapporto di successioni. Successioni limitate inferiormente e superiormente. Successioni limitate. Successioni monotone. Limite di una successione. Successioni convergenti, divergenti ed indeterminate. Riscrittura in termini di successioni dei teoremi di località del limite, delle restrizioni, di confronto, di monotonia del limite, dei due carabinieri. Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima. Limitatezza GLOBALE delle successioni convergenza. Teorema sui limiti di successioni monotone. Il numero di Neper.

Funzioni continue. Definizione di funzione continua. Continuità delle funzioni costanti, lineari, seno e coseno. Funzioni continue ed operazioni algebriche. Continuità funzione potenza n-esima, polinomi e funzioni razionali. Limitatezza locale di una funzione continua in un punto. Continuità delle restrizioni. Continuità delle funzioni composte. Punti di discontinuità. Continuità della funzione esponenziale e della funzione logaritmo. Teorema di permanenza del segno per funzioni continue.

Funzione continue su intervalli. Teorema dell'esistenza degli zeri. Teorema di Bolzano (o dei valori intermedi). Condizione sufficiente per la stretta monotonia

¹Riscrittura dei risultati precedenti al caso particolare di funzioni definite su \mathbb{N} .

di una funzione definita su un intervallo. Condizione sufficiente affinché una funzione monotona su un intervallo sia ivi continua. Teorema sulla continuità della funzione inversa. Limiti notevoli. Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione).

Campo dei numeri complessi. Forma algebrica, coniugato, modulo e forma trigonometrica di un numero complesso. Formule di De Moivre. Radici n-esime di un numero complesso.

Funzioni derivabili. Definizione di rapporto incrementale. Definizione di derivata e derivabilità in un punto. Continuità di una funzione derivabile. Derivabilità delle funzioni lineari, potenza n-esima, seno, coseno, potenza reale e esponenziale. Significato geometrico dell'esistenza della derivata e della derivabilità. Derivata e derivabilità destra e sinistra. Caratterizzazione della derivabilità. Punti angolosi e cuspidi. Derivazione e operazioni algebriche. Derivabilità della funzione tangente. Derivazione e composizione di funzioni. Derivabilità della funzione inversa. Derivabilità della funzione radice n-esima, logaritmo, arcoseno, arcocoseno e arcotangente. Punti di massimo e minimo relativo. Punti critici. Teorema di Fermat. Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange e corollari: test di monotonia, caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla, test di riconoscimento dei punti stazionari, test di stretta monotonia. Teoremi di de L'Hôpital ed applicazione alle forme indeterminate. Funzioni concave e convesse. Caratterizzazione. Asintoti ad un grafico. Studio del grafico di una funzione.

Teoria dell'integrazione secondo Riemann. Suddivisione di un intervallo $[a,b]$ e sua ampiezza. Somme inferiori e superiori di una funzione $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata relativamente ad una data suddivisione dell'intervallo $[a,b]$. Prime proprietà. Integrale inferiore e superiore. Funzioni Riemann integrabili. Funzione di Dirichlet. Interpretazione geometrica del concetto di integrale. Somme integrali. Integrabilità delle funzioni continue e di quelle monotone su un intervallo $[a,b]$. Proprietà degli integrali. Primo e secondo teorema della media. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrale indefinito. Proprietà degli integrali indefiniti. Integrali definiti. Metodo di integrazione per scomposizione in somma, per parti e per sostituzione.

Serie numeriche. Carattere di una serie. Serie di Mengoli, serie geometrica e serie armonica. Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica. Serie a termini non negativi. Regolarità. Serie armonica. Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico. Operazioni sulle serie. Criterio della radice. Criterio del rapporto. Serie a segni alterni e criterio di Leibniz. Serie armonica alternata. Convergenza assoluta.

Testi consigliati:

- E. Acerbi - G. Buttazzo, *Matematica ABC*, Pitagora Editrice, Bologna.

4 Programma del corso di ANALISI MATEMATICA (C.l.t. in Informatica - a.a. 2013 -'14)

- E. Acerbi - G. Buttazzo, *Primo corso di Analisi Matematica*, Pitagora Editrice, Bologna.
- E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 1*, Pitagora Editrice, Bologna.
- C. D. Pagani - S. Salsa, *Analisi Matematica, vol. 1*, Masson, Milano.
- A. Alvino - L. Carbone - G. Trombetti, *Esercitazioni di Matematica, vol. I, parte I e II*, Liguori Editore, Napoli.