CAPITOLO 6

Politiche di manutenzione

1 Introduzione

La funzionalità di un sistema dipende dal corretto funzionamento di tutti i suoi dispositivi che generalmente invecchiano con l'uso. D'altra parte, il cattivo funzionamento di un elemento durante un'operazione può provocare danni economici, da qui la necessità di sostituire preventivamente i componenti invecchiati.
Queste semplici osservazioni danno luogo a varie strategie di manutenzione dei sistemi, tra queste le più comuni sono quelle basate sull'età delle componenti e le sostituzioni in blocco. Altre politiche di manutenzione sono quella introdotta da Barlow e Proschan nel 1965 nota come "politica di sostituzione basata sulla minima riparazione" e la "politica basata su riparazione" introdotta nel 1993 da Block, Langberg e Savits.
La scelta della metodologia da adottare è basata sul confronto stocastico di due diverse strategie caratterizzate da unità di tempi di vita e/o comuni sostituzioni prestabilite. In particolare, Barlow e Proschan confrontarono le due politiche più comuni invece, Block, Langberg e Savits (1990 - 1993) studiarono un confronto più generale tra tutte e quattro le politiche. Nel 1972 Marshall e Proschan proposero due nuove classi di affidabilità che fornirono nuove condizioni per paragonare le varie politiche di sostituzione.

Definizione 1.1 *Una variabile aleatoria X non negativa q.c. è*

- *NBU (New Better then Used) se* $R(s)R(t) \geq R(s+t)$
- *NWU (New Worse then Used) se* $R(s)R(t) \geq R(s+t)$
- *NBUE (New Better then Used in Expectation) se* $\frac{\int_t^\infty R(s)ds}{R(t)} \leq E(X)$
- *NWUE (New Worse then Used in Expectation) se* $\frac{\int_t^\infty R(s)ds}{R(t)} \geq E(X)$.

Queste condizioni, NBU e NBUE, classificano le distribuzioni di vita viste precedentemente; esse sono state usate precedentemente come condizioni di età, Marshall e Proschan ne fanno un uso più completo. Esistono analoghe condizioni sull'età dette NWU e NWUE, qui la "w" sta per "worse" ossia peggiore.

Le politiche di sostituzioni si dividono in vari tipi:

- **riparazione completa** (sostituzioni di rinnovo), questa equivale alla sostituzione del componente che si trova nello stato "down" con un altro elemento del tutto identico,
- **sostituzioni minime**, ovvero riparare un componente e rimetterlo nelle stesse condizioni in cui si trovava prima del guasto,

- **sostituzioni preventive**, in questi casi il componente viene sostituito prima che si guasti secondo opportuni schemi.

Una riparazione completa è una politica base che riguarda la riparazione completa di un elemento, o la sua sostituzione con un altro identico. Denotiamo con $N(t)$ il numero di guasti verificatisi in $(0, t)$ che coincide con il numero di riparazioni effettuate in $(0, t)$. In questo modo $N(t)$ descrive un processo di rinnovo. Indicando con $X_1, X_2, \ldots$ i tempi di vita degli elementi completamente riparati si ha che

$$N(t) = k \qquad \textit{se e solo se} \qquad X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq t < X_1 + X_2 + \ldots + X_{k+1}.$$

Quindi $N(t)$ rappresenta il numero di rinnovi registrati fino all'istante t nel caso in cui si decide di effettuare una sostituzione quando si rompe la componente in funzione, assumiamo che la durata di ogni elemento sia caratterizzato da distribuzione F, con $F(x) < 1$ per ogni $x \geq 0$. Siano, inoltre, $N^A(T; t)$ e $N^B(T; t)$ il corrispondente processo di sostituzione basato sull'età e in blocco.

2 Riparazioni preventive

2.1 Sostituzioni basate sull'età

In questo caso l'elemento è sostituito, o riparato completamente appena si guasta o dopo T unità di tempo dall'inizio del suo utilizzo. Con questo criterio si cerca di ridurre la probabilità che un'apparecchiatura si guasti nel corso del funzionamento. Sia $B_T(t)$ l'affidabilità del dispositivo all'istante t, ossia la probabilità che il componente non si guasti prima dell'istante t, e sia $S_T = nT + X_{n+1}$ la durata del componente. Se $t \in [nT, (n+1)T)$ si ha che

$$B_T(t) = \mathbb{P}(S_T \geq t) = \mathbb{P}(X_1 \geq T, X_2 \geq T, \ldots, X_n \geq T, X_{n+1} \geq t - nT).$$

In altri termini, affinché $S_T \geq t$ si deve verificare che i primi n componenti siano sostituiti preventivamente ad intervalli di tempo regolari di ampiezza T e l'$(n+1)$-esimo componente non si guasti prima di t. Assumendo ragionevolmente l'indipendenza e l'identica distribuzione delle variabili X_i, segue che

$$B_T(t) = [R(T)]^n R(t - nT),$$

dove $R(t)$ rappresenta l'affidabilità di ciascun componente.

Proposizione 1 La politica di sostituzione di un componente basata sull'età aumenta la probabilità di sopravvivenza del dispositivo se la funzione di distribuzione $F(x)$ delle variabili X_i è dotata di derivata $f(x)$ ed è IFR (Increasing Failure Rate).

Dimostrazione Per dimostrare il risultato osserviamo che

$$\begin{aligned}\frac{dB_T(t)}{dT} &= -n\,[R(T)]^{n-1} f(T)\, R(t - nT) + n\,[R(T)]^n f(t - nT) \\ &= n\,[R(T)]^{n-1}\,[R(T)\, f(t - nT) - f(T)\, R(t - nT)],\end{aligned}$$

ossia

$$\frac{dB_T(t)}{dT} = n\,[R(T)]^n\,R(t-nT)\left\{\frac{f(t-nT)}{R(t-nT)} - \frac{f(T)}{R(T)}\right\} = n[R(T)]^n R(t-nT)[r(t-nT) - r(T)].$$

Da quest'ultima relazione si può notare che il segno della derivata di $B_T(t)$ dipende dal segno dell'espressione contenuta tra le parentesi graffe che si può leggere come la differenza tra failure rate: $r(t-nT) - r(T)$. Poiché per ipotesi $F(t)$ è IFR e visto che $nT \leq t < (n+1)T$ ossia $t - nT < T$ si ha che

$$r(t-nT) - r(T) \leq 0.$$

Pertanto, $B_T(t)$ è una funzione non crescente in T. In particolare, se si procede al limite per $t \to \infty$ si ha che

$$B_T(t) \to B(t),$$

dove $B(t)$ rappresenta l'affidabilità del dispositivo quando nessuna riparazione preventiva è effettuata. Dalle proprietà di monotonia di $B_T(t)$ si deduce che $B(t) \leq B_T(t)$ per ogni T finito. Quindi, per ogni intervallo di tempo di ampiezza finita T, effettuando delle sostituzioni dopo T unità di tempo dall'inizio dell'utilizzo del dispositivo si ottiene un sistema più affidabile rispetto ad un altro sistema in cui non viene effettuato alcun tipo di sostituzione.

Proposizione 2 Se la funzione di distribuzione $F(x)$ delle variabili X_i è IFR allora intensificando la frequenza di sostituzione si allunga il tempo medio di guasto di un componente.

Dimostrazione La durata S_T di un elemento è rappresentata dall'intervallo di tempo tra l'istante iniziale fino all'istante t in cui si guasta il componente per la prima volta se si sta adottando una politica di manutenzione basata sull'età. Quindi, il valor medio di S_T rappresenta il tempo medio in cui si verifica il primo guasto nell'intero corso del funzionamento dell'elemento. Indichiamo con $\mathbb{E}[S_T]$ la durata media dell'elemento. Osserviamo che $\mathbb{E}[S_T]$ dipende da T, così che poniamo $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T]$. Dalle proprietà del valore medio si ha:

$$\mathbb{E}[S_T] = \int_0^\infty \mathbb{P}(S_T > t)\,dt = \mathbb{E}[T].$$

La funzione integranda rappresenta l'affidabilità del componente quando le sostituzioni sono effettuate a intervalli di tempo T. Tale funzione è $B_T(t)$ e coincide con $R(t)$ visto che stiamo considerando la durata del primo elemento. Per ipotesi $F(x)$ è IFR e ciò implica, come visto nella Proposizione 1, che $B_T(t)$ è non crescente in T. Pertanto se $T_1 < T_2$ si ha:

$$\mathbb{E}[S_{T_1}] = \int_0^\infty \mathbb{P}(S_{T_1} > t)\,dt \geq \int_0^\infty \mathbb{P}(S_{T_2} > t)\,dt = \mathbb{E}[S_{T_2}]$$

il che equivale a dire che $\mathbb{E}[T_1] \geq \mathbb{E}[T_2]$ per $T_1 < T_2$.

2.2 Sostituzioni in blocco

Una politica di sostituzione in blocco è una politica di riparazione completa modificata per ottenere una manutenzione preventiva. È utilizzata per computer digitali e per altri sistemi elettronici complessi. In questo caso tutti gli elementi di un certo tipo sono sostituiti, o riparati completamente,

ad intervalli regolari di tempo di ampiezza kT per $k = 1, 2, \ldots$; per questo motivo si parla anche di sostituzione programmata. Il modello matematico per l'analisi di questo tipo di manutenzione è basato su un processo di rinnovo interrotto ad ogni intervallo di ampiezza T alla fine del quale si effettua la sostituzione.
È opportuno sottolineare che gli istanti in cui si verificano le sostituzioni sono scelti in modo del tutto indipendente dalla storia dei guasti che hanno caratterizzato il sistema.

2.3 Confronto tra le politiche di sostituzione basate sull'età e in blocco

Un confronto iniziale tra le due politiche fa emergere che la sostituzione in blocco

- è più pratica in quanto non è necessario memorizzare l'istante in cui ciascun componente entra in funzione diversamente da quanto accade per le sostituzioni basate sull'età che vengono effettuate solo se il componente ha funzionato almeno per un periodo di tempo di ampiezza T fissato per effettuare la sostituzione;
- è più dispendiosa in quanto comporta la sostituzione di un numero di componenti maggiore rispetto alla sostituzione basata sull'età;
- è caratterizzata da un numero medio di guasti inferiore rispetto alla strategia basata sull'età sotto l'ipotesi che $F(x)$ sia IFR.

Sia $N_A(t)$ il numero di sostituzioni effettuate in un intervallo di tempo di ampiezza t sotto una politica di sostituzione basata sull'età e denotiamo con $N_B(t)$ il numero di sostituzioni effettuate sotto una politica di sostituzione in blocco effettuate ad intervalli regolari di ampiezza c.

Teorema 1 Il numero di sostituzioni effettuate sotto una politica di sostituzioni in blocco è statisticamente maggiore del numero di sostituzioni effettuate in politica di sostituzioni basate sull'età; in altri termini si ha:

$$\mathbb{P}[N_A(t) \geq n] \leq \mathbb{P}[N_B(t) \geq n] \qquad per\ n = 0, 1, \ldots$$

Dimostrazione Sia $\{X_k; k = 1, 2, \ldots\}$ una realizzazione del processo che rappresenta la vita dei componenti che si susseguono nelle sostituzioni. Denotiamo con $T_A(n)$ e con $T_B(n)$ l'istante in cui si effettua l'n-esima sostituzione in regime A (sostituzione per età) e in regime B (sostituzione in blocco). Nella politica B gli intervalli di tempo in cui avvengono le sostituzioni sono scanditi in modo regolare a partire dall'istante iniziale ($t = 0$) e sono del tutto indipendenti dalle sostituzioni effettuate in seguito ad eventuali guasti. Pertanto, sotto il regime B, ogni componente potrà funzionare al massimo per un tempo T. Da ciò risulta evidente che, sebbene il conteggio inizi per entrambi i processi all'istante $t = 0$ così che $T_A(1) = T_B(1)$, per $n > 1$ risulta $T_A(n) \geq T_B(n)$. Quindi, per ogni realizzazione $\{X_k\}$, $N_A(t)$ è minore di $N_B(t)$ da cui segue la tesi.

Denotiamo con $N^*A(t)$ e con $N^*B(t)$ il numero di guasti verificatisi nell'intervallo di tempo $(0, t)$ sotto l'ipotesi di una politica di sostituzione di tipo A e di tipo B, rispettivamente.

Teorema 2 Sia

$$H(T) = \sum_{i \geq 1} F^{(i)}(T)$$

la funzione dei rinnovi calcolata in T; essa rappresenta il numero medio di rinnovi verificatisi fino all'istante T. Il numero di guasti per unità di tempo nelle sostituzioni in blocco ad intervalli di ampiezza T al crescere di t converge a $H(T)/T$, cioè:

$$\frac{N_B^*(t)}{t} \quad \rightarrow \quad \frac{H(T)}{T} \qquad \textit{per } t \rightarrow \infty.$$

Dimostrazione Denotiamo con $N_{B_i}^*$ il numero di guasti che si verificano all'istante t con t appartenente all'intervallo $[(i-1)T, iT]$. Le variabili $N_{B_i}^*$ sono indipendenti ed identicamente distribuite e per $t \in [kT, (k+1)T]$ risulta:

$$\sum_{i=1}^{k} N_{B_i}^* \leq N_B^*(t) \leq \sum_{i=1}^{k+1} N_{B_i}^*.$$

Osserviamo che nel regime di sostituzione in blocco il numero di sostituzioni fino all'istante t è pari a $t/T + N_B^*(t)$, dove $N_B^*(t)$ rappresenta il numero di guasti verificatisi fino all'istante t. Inoltre, se t cade nell'intervallo $[kT, (k+1)T]$ si ha che $1/[(k+1)T] \leq 1/t \leq 1/[kT]$, pertanto otteniamo

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{N_{B_i}^*}{(k+1)T} \leq \frac{N_B^*(t)}{t} \leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{N_{B_i}^*}{kT}, \tag{1}$$

ossia:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{N_{B_i}^*}{kT[(k+1)/k]} \leq \frac{N_B^*(t)}{t} \leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{N_{B_i}^*}{(k+1)T[k/(k+1)]}.$$

La tesi segue osservando che quando $t \rightarrow \infty$ anche $k \rightarrow \infty$ e per la legge dei grandi numeri per $k \rightarrow \infty$ risulta

$$\frac{1}{T}\frac{k}{k+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{N_{B_i}^*}{k} \rightarrow \frac{H(T)}{T}, \qquad \frac{1}{T}\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} kN_{B_i}^* \rightarrow \frac{H(T)}{T};$$

così che entrambe le somme che compaiono nella relazione (1) tendono al numero medio di guasti verificatisi nell'intervallo $(0, T)$, dato da $H(T)/T$.

Osservando che nel regime di sostituzioni in blocco il numero di sostituzioni è $N_B(t) = t/T + N_B^*(t)$, dal Teorema 2, si può concludere che per $t \rightarrow \infty$ risulta

$$\frac{\mathbb{E}[N_B(t)]}{t} \rightarrow \frac{H(T)}{T} + \frac{1}{T}.$$

Ricordiamo anche che $\mathbb{E}[N_A(t)]/t = H(t)/t$, dal Teorema di Blackwell, si ha anche che $H(t)/t \rightarrow 1/\mu$. Inoltre, per $t \rightarrow \infty$ si può dimostrare che

$$\frac{\mathbb{E}[N_A(t)]}{t} \rightarrow \frac{1}{\displaystyle\int_0^T R(x)dx}.$$

Dal Teorema 1 si che per $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_B(t)]}{t} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_A(t)]}{t}$$

che, da quanto detto, conduce alla seguente relazione:

$$\frac{H(T)}{T} + \frac{1}{T} \geq \frac{1}{\displaystyle\int_0^T R(x)\,dx}$$

o, equivalentemente,

$$H(T) \geq \frac{T}{\displaystyle\int_0^T R(x)\,dx} - 1.$$

Quest'ultima relazione fornisce un limite superiore alla funzione di rinnovo per tutti i valori di T. Osserviamo esplicitamente che, se la media della distribuzione F è tale che

$$\int_0^T R(x)\,dx \leq \mu_1 = \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx,$$

allora risulta anche $H(T) \geq T/\mu_1 - 1$, sebbene quest'ultima disuguaglianza sia più debole della precedente.

Teorema 3 Sia $\{Y_i\}$ la successione degli intervalli di tempo tra successivi guasti sotto una politica di sostituzione in blocco effettuate ad intervalli T. Risulta che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y_1 + Y_2 + \dots Y_{N_B^*(t)}}{N_B^*(t)} = \frac{T}{H(T)}.$$

Dimostrazione Osserviamo che

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots Y_{N_B^*(t)}}{N_B^*(t)} \leq \frac{t}{H(T)} \leq \frac{Y_1 + Y_2 + \dots Y_{N_B^*(t)+1}}{N_B^*(t)\frac{N_B^*(t)+1}{N_B^*(t)+1}}$$

da cui, procedendo al limite per $t \to \infty$ e facendo uso del Teorema 2 segue la tesi.

Teorema 4 Sia T l'intervallo di sostituzione. Per $t \geq 0$, $T > 0$ e $n = 0, 1, \dots$ risulta che

se F è IFR si ha

$$\mathbb{P}[N(t) \geq n] \geq \mathbb{P}[N_A^*(t) \geq n] \geq \mathbb{P}[N_B^*(t) \geq n]$$

se F è DFR si ha

$$\mathbb{P}[N(t) \geq n] \leq \mathbb{P}[N_A^*(t) \geq n] \leq \mathbb{P}[N_B^*(t) \geq n].$$

Inoltre, l'uguaglianza si ottiene in corrispondenza della distribuzione esponenziale.

Osseravazione Denotiamo con $N(t,x)$ il numero di rinnovi nell'intervallo $[0,t]$ dove x rappresenta l'età dell'apparecchiatura all'istante $t = 0$; dal Teorema 4 si ha che se F è IFR risulta

$$\mathbb{P}[N(t,x) \geq n] \geq \mathbb{P}[N_A^*(t,x) \geq n] \geq \mathbb{P}[N_B^*(t,x) \geq n]$$

Corollario 1 Se F è IFR allora per ogni t si ha che

$$H(t) \leq \frac{t\,F(t)}{\int_0^t [1-F(x)]\,dx}.$$

Dimostrazione Osserviamo che dal Teorema 2 si ha che per $t \to \infty$ risulta $N_B^*(t)/t \to H(T)/T$, da cui segue che

$$\frac{\mathbb{E}[N_B^*(t)]}{t} \quad \to \quad \frac{H(T)}{T} \qquad \textit{per } t \to \infty.$$

Facendo uso del Teorema elementare del rinnovo si può concludere che $h(t)/t$ tende al reciproco della media della distribuzione F, pertanto, ricordando che

$$\mathbb{E}_1[S_T] = \int_0^\infty \mathbb{P}(S_T > t)\,dt = \frac{\int_0^T R(t)\,dt}{F(T)} = \mathbb{E}_1[T],$$

si ha:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_A^*(t)]}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}_1[T]} = \frac{F(T)}{\displaystyle\int_0^T R(x)\,dx}$$

e, dal Teorema 4 segue che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_B^*(t)]}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_A^*(t)]}{t}.$$

Si può quindi concludere che quando $t \to \infty$ risulta:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_B^*(t)]}{t} = \frac{H(T)}{T} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_A^*(t)]}{t} = \frac{F(T)}{\displaystyle\int_0^T R(x)dx},$$

da cui segue immediatamente la tesi cioè $H(t) \geq tF(t)/\int R(x)dx$.

Quando F è IFR dal Corollario 1, ricordando che

$$H(T) \geq \frac{T}{\displaystyle\int_0^T R(x)\,dx} - 1,$$

otteniamo che

$$\frac{t}{\displaystyle\int_0^t R(x)\,dx} - 1 \leq H(t) \leq \frac{t\,F(t)}{\displaystyle\int_0^t R(x)\,dx}.$$