# Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

- Problema del trasporto

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

# Problema del Flusso a costo Minimo

## FORMULAZIONE

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

con vincoli :

$$\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k\in BS(i)} x_{ki} = b_i \qquad i = 1,\dots n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \mathrm{i} \in \mathrm{A}$$

$x_{ij}$ = quantità di flusso sull'arco (i, j)

$c_{ij}$ = costo di trasporto di un'unità di flusso sull'arco (i, j)

$b_i$ = valore associato al nodo i :

se $b_i > 0$ : nodo offerta

se $b_i < 0$ : nodo domanda

se $b_i = 0$ : nodo di passaggio

# Problema del Flusso a costo Minimo

## FORMULAZIONE

In forma matriciale:

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

NOTA:

1. La matrice A(m,n) è la matrice di incidenza nodo-arco, ogni colonna $a_{ij}$ è associata all'arco (i,j), ed in particolare abbiamo che:

$$\underline{a}_{ij} = \underline{e}_i - \underline{e}_j$$

($\underline{e}_i$ vettore colonna con tutti 0 eccetto un 1 in posizione i-ma.)

2. Il rango di questa matrice è: r(A)=m-1

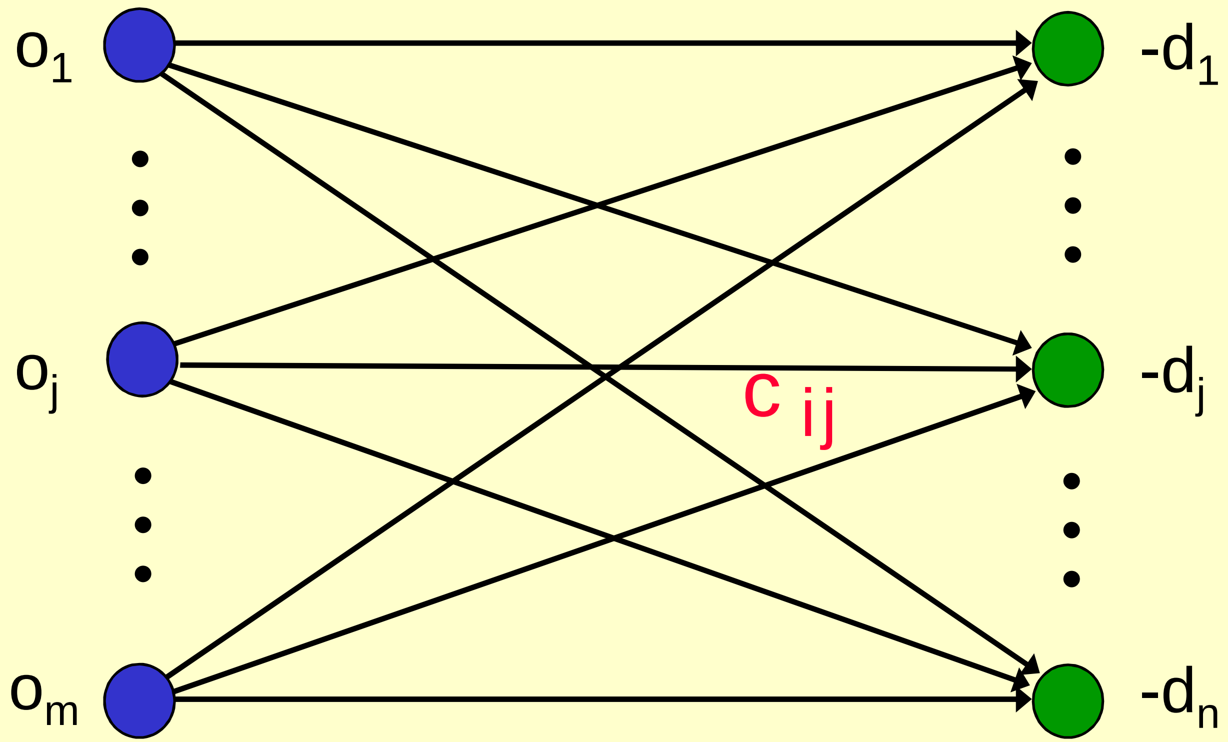
# Un particolare problema di flusso a costo minimo: Il Problema del Trasporto

- m fornitori producono $o_1,...,o_m$ quantità di un certo prodotto
- n clienti richiedono $d_1,...,d_n$ quantità di prodotto
- il prodotto può essere trasportato da ogni fornitore ad ogni cliente

NOTA:

Il grafo sottostante è un grafo bipartito dove i nodi origine (fornitori) hanno solo archi uscenti ed i nodi destinazione (clienti) hanno solo archi entranti

**Il problema:** determinare le quantità di prodotto da trasportare su ogni arco (i,j) (fornitore-cliente) in modo da minimizzare il costo complessivo del trasporto.



## Formulazione del problema.

Le variabili:

la quantità di prodotto trasportata su ciascun arco

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,\dots,m; \qquad j = 1,\dots,n$$

sono variabili continue e non negative

La funzione obiettivo:

il costo del trasporto complessivo

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

## I vincoli:

- la quantità totale di prodotto fornita da ciascun fornitore deve essere uguale alla disponibilità del fornitore stesso

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - 0 = o_i \quad i = 1, \ldots, m \qquad (1)$$

- la quantità totale di prodotto ricevuta da ciascun cliente deve essere uguale a quella richiesta

$$0 - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -d_j \quad j = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

# Il problema del trasporto: FORMULAZIONE

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \qquad i = 1,\dots,m; \qquad (1)$$

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -d_j \qquad j = 1,\dots,n; \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in R \qquad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n$$

## Ipotesi di ammissibilità (condizione di bilanciamento):

Affinchè il problema possa ammettere una soluzione deve essere verificata la seguente condizione sui dati

$$\sum_{i=1}^{m} o_i - \sum_{j=1}^{n} d_j = 0$$

ossia, la quantità totale di prodotto disponibile deve essere uguale alla richiesta totale del prodotto stesso.

# Esistenza di una soluzione ammissibile

Sia $$x_{ij} = \frac{o_i d_j}{\Delta} \quad i = 1 \ldots m,\ j = 1 \ldots n \quad \text{e} \quad \Delta = \sum_{i=1}^{m} o_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Vogliamo dimostrare che la precedente soluzione è ammissibile per il problema del trasporto.

Per farlo bisogna dimostrare che i vincoli (1) e (2) del sistema siano soddisfatti.

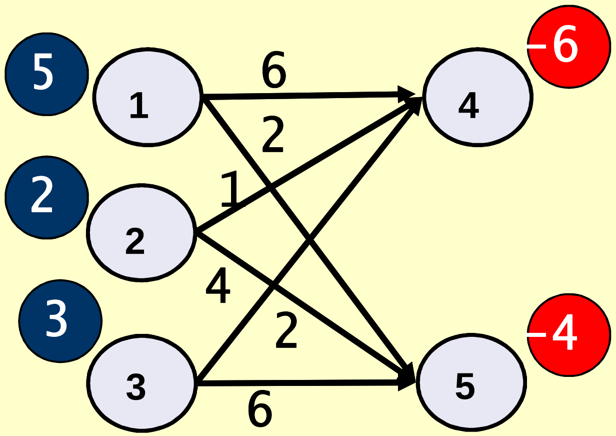
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{o_i d_j}{\Delta} = \frac{o_i}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} d_j = \frac{o_i}{\Delta} \Delta = o_i$$

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{o_i d_j}{\Delta} = -\frac{d_j}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} o_i = -\frac{d_j}{\Delta} \Delta = -d_j$$

# Il problema del trasporto

**Sottocaso** particolare del flusso a costo minimo

- Non esistono nodi di passaggio
- E' possibile andare da **ogni nodo offerta** (insieme **O**) a **ogni nodo richiesta** (insieme **D**)
- Il grafo sottostante è un **grafo bipartito**



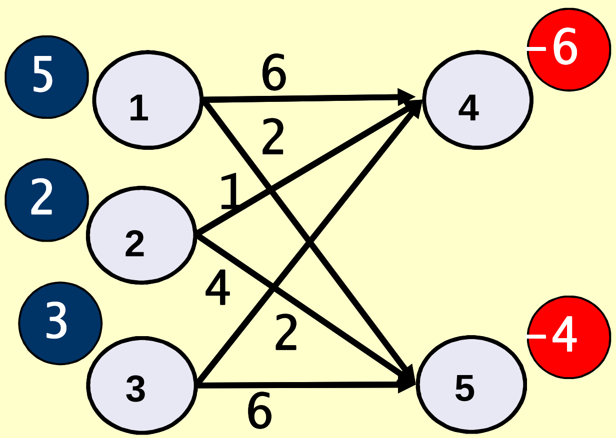

$$\min 6x_{14} + 2x_{15} + x_{24} + 4x_{25} + 2x_{34} + 6x_{35}$$

soggetto ai vincoli

$$x_{14} + x_{15} = 5$$
$$x_{24} + x_{25} = 2$$
$$x_{34} + x_{35} = 3$$
$$-x_{14} - x_{24} - x_{34} = -6$$
$$-x_{15} - x_{25} - x_{35} = -4 \qquad x_{ij} \geq 0$$

# Il problema del trasporto

Consideriamo la **matrice di incidenza nodo-arco A** per il problema del trasporto




| A | (1,4) | (1,5) | (2,4) | (2,5) | (3,4) | (3,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **4** | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 |
| **5** | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 |

**-I** **-I** **-I**

# Struttura della matrice dei vincoli

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & 1 & \ldots\ldots & n & n+1 & \ldots\ldots & 2n & & (m-1)n+1 & \ldots\ldots & mn & & \\
\hline
1 & x_{11} & +\ldots+ & x_{1n}+ & & & & & & & & = & o_1 \\
2 & & & & x_{21} & +\ldots+ & x_{2n} & & & & & = & o_2 \\
\vdots & & & & & & & \ddots & & & & = & \vdots \\
m & & & & & & & & x_{m1} & +\ldots+ & x_{mn} & = & o_m \\
1 & -x_{11} & & & -x_{21} & & \ldots & & -x_{m1} & & & = & -d_1 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & & & \ddots & & = & \vdots \\
n & & & -x_{1n} & & & -x_{2n} & & & & -x_{mn} & = & -d_n
\end{array}
$$

**-I** **-I** **-I**

# Rango della matrice dei vincoli

Eliminando l'ultima riga della matrice e selezionando le seguenti m+n-1 colonne: n, 2n, 3n,...,mn,1,2,3,...,n-1 (nell'ordine indicato) otteniamo la seguente sottomatrice quadrata (triangolare superiore):

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & n & 2n & 3n & \ldots\ldots & mn & 1 & 2 & \ldots\ldots & n-1 \\
\hline
1 & \boxed{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
2 & 0 & \boxed{1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
3 & 0 & 0 & \boxed{1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
m & 0 & 0 & 0 & \ldots & \boxed{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \boxed{-1} & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \boxed{-1} & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
n-1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \boxed{-1}
\end{array}
$$

Th: *Se A è una matrice diagonale o triangolare superiore o triangolare inferiore allora il determinante di A è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale.*

Quindi la sottomatrice costruita è invertibile ed il rango di A è pari ad m+n-1

## Problema del Trasporto: RISOLUZIONE

Possiamo rappresentare il problema tramite due tabelle, una relativa alle variabili l'altra relativa ai costi:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 2 & \ldots & \ldots & n & \\
\hline
1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & \ldots & x_{1n} & O_1 \\
2 & x_{21} & x_{22} & \ldots & \ldots & x_{2n} & O_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
m & x_{m1} & x_{m2} & \ldots & \ldots & x_{mn} & O_m \\
\hline
 & d_1 & d_2 & \ldots & \ldots & d_n &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & \ldots & \ldots & n \\
\hline
1 & c_{11} & c_{12} & \ldots & \ldots & c_{1n} \\
2 & c_{21} & c_{22} & \ldots & \ldots & c_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
m & c_{m1} & c_{m2} & \ldots & \ldots & c_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Utilizziamo queste due tabelle per risolvere il problema

## Problema del trasporto: RISOLUZIONE

per risolvere il problema dobbiamo:

1. Trovare una soluzione ammissibile iniziale:
   METODO DELL'ANGOLO DI NORD-OVEST

2. Migliorare la soluzione ammissibile trovata fino a soddisfare le condizioni di ottimalità:
   REGOLA DEL CICLO

# Metodo dell'angolo di Nord-Ovest

Passo 0: Poni $x_{ij}=0$ per ogni $i$ e per ogni $j$

Passo 1: $i=1, j=1$

Passo 2: $x_{ij}=minimo\ \{ O_i, d_j\}$

Se il minimo è uguale a $O_i$ allora vai al passo 3

Se il minimo è uguale a $d_j$ allora vai al passo 4

Passo 3: Poni $i=i+1;\ d_j=d_j-O_i$ e vai al passo 2

Passo 4: Poni $j=j+1;\ O_i=O_i-d_j$ e vai al passo 2

# Metodo dell'angolo di Nord-Ovest: ESEMPIO

Consideriamo la seguente tabella dei costi:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 5 | 6 | 7 | 25 |
| 2 | 8 | 2 | 7 | 6 | 25 |
| 3 | 9 | 3 | 4 | 8 | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

NOTA:

m=3, n=4 quindi il rango della matrice A è r(A)=3+4-1=6. Quindi dobbiamo selezionare 6 variabili per ottenere una soluzione di base

Le iterazioni dell'algoritmo danno luogo alle seguenti tabelle di variabili:

# Metodo dell’angolo di Nord-Ovest: ESEMPIO

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 0 | 0 | 0 | 25 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 0 | 20 | 30 | 35 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 10 | 0 | 0 | 10 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 0 | 20 | 30 | 35 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 0 | 10 | 30 | 35 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 10 | 0 | 0 | 25 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 0 | 10 | 30 | 35 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 10 | 0 | 0 | 15 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 0 | 0 | 30 | 35 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 10 | 15 | 0 | 15 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 0 | 0 | 30 | 35 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 10 | 15 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 0 | 0 | 15 | 35 | |

# Metodo dell'angolo di Nord-Ovest: ESEMPIO

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 10 | 0 | 0 | 25 |
| 2 | 0 | 10 | 15 | 0 | 25 |
| 3 | 0 | 0 | 15 | 35 | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

Le variabili di base della soluzione ammissibile iniziale sono:

$$x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}$$

Ora dobbiamo verificare se questa soluzione è ottima, se non è ottima cerchiamo un'altra soluzione con la regola del ciclo.

# Condizioni di ottimalità

Condizioni di ottimalità del simplesso:

$$z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in N$$

$$\Downarrow$$

$$z_j - c_j = \underbrace{c_B^T A_B^{-1}}_{\substack{\text{Soluzione duale di base} \\ \text{associata alla soluzione di} \\ \text{base primale}}} \underbrace{a_j}_{\substack{\text{Colonna della matrice} \\ \text{corrispondente alla variabile } x_j}} - \underbrace{c_j}_{\substack{\text{Coefficiente di costo della} \\ \text{variabile } x_j}} \leq 0 \quad \forall j \in N$$

# Duale del problema del trasporto

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$(u_i) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \qquad i = 1,\dots,m; \qquad (1)$$

$$(v_j) \qquad -\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -d_j \qquad j = 1,\dots,n; \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in R \qquad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n$$

$$\Downarrow$$

$$\max \sum_{i=1}^{m} o_i u_i - \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

$$u_i - v_j \leq c_{ij} \qquad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n;$$

# Condizioni di ottimalità

Dobbiamo verificare i valori $z_{ij}$-$c_{ij}$ per ogni $x_{ij}$ non in base.

Il calcolo di queste differenze si riduce al calcolo delle differenze dei valori delle variabili duali associate ai vincoli:

$$\mathbf{z_{ij}-c_{ij}=u_i-v_j-c_{ij}}$$

dove $u_i$ è la variabile duale associata all'i-simo vincolo di origine e $v_j$ è la variabile duale associata al j-simo vincolo di destinazione.

Consideriamo la matrice dei costi iniziali e la matrice delle variabili corrispondente alla soluzione di base trovata:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 5 | 6 | 7 | 25 |
| 2 | 8 | 2 | 7 | 6 | 25 |
| 3 | 9 | 3 | 4 | 8 | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 10 | 0 | 0 | 25 |
| 2 | 0 | 10 | 15 | 0 | 25 |
| 3 | 0 | 0 | 15 | 35 | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

# Condizioni di ottimalità

Le variabili duali sono 7 (4 associate ai vincoli di destinazione: $v_1$,$v_2$,$v_3$,$v_4$ e 3 associate ai vincoli di origine: $u_1$,$u_2$,$u_3$).
Possiamo determinare questi valori sapendo che $z_{ij}$-$c_{ij}$=0 per ogni variabile $x_{ij}$ in base. Per cui otteniamo:

$$
\begin{aligned}
x_{11} &\Rightarrow u_1 - v_1 = c_{11} = 10 \\
x_{12} &\Rightarrow u_1 - v_2 = c_{12} = 5 \\
x_{22} &\Rightarrow u_2 - v_2 = c_{22} = 2 \\
x_{23} &\Rightarrow u_2 - v_3 = c_{23} = 7 \\
x_{33} &\Rightarrow u_3 - v_3 = c_{33} = 4 \\
x_{34} &\Rightarrow u_3 - v_4 = c_{34} = 8
\end{aligned}
$$

Questo è un sistema di 6 equazioni in 7 incognite, per cui fissando a zero il valore di una variabile otteniamo i valori delle altre

# Condizioni di ottimalità

Fissiamo $u_1$=0 ed otteniamo:

$v_1$= -10 $v_2$= - 5 $v_3$ = -10 $v_4$ = -14

$u_2$= -3 $u_3$= -6

Da cui otteniamo :

$$z_{13} - c_{13} = u_1 - v_3 - c_{13} = 10 - 6 = 4$$

$$z_{14} - c_{14} = u_1 - v_4 - c_{14} = 14 - 7 = 7$$

$$z_{21} - c_{21} = u_2 - v_1 - c_{21} = -3 + 10 - 8 = -1$$

$$z_{24} - c_{24} = u_2 - v_4 - c_{24} = -3 + 14 - 6 = 5$$

$$z_{31} - c_{31} = u_3 - v_1 - c_{31} = -6 + 10 - 9 = -5$$

$$z_{32} - c_{32} = u_3 - v_2 - c_{32} = -6 + 5 - 3 = -4$$

La soluzione non è ottima, quindi dobbiamo scegliere una variabile non in base da introdurre in base. Facciamo entrare in base la variabile con coefficiente di costo massimo ossia $x_{14}$.

Selezioniamo la variabile uscente con la **regola del ciclo.**

Supponiamo di avere la seguente tabella in cui le x rapresentano le variabili di base e la y la nuova variabile entrante.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x$ | $x$ | | $x$ | |
| 2 | | | $y^{+}$ | $x^{-}$ | |
| 3 | | | $x^{-}$ | $x^{+}$ | |
| 4 | $x$ | | | | $x$ |

La variabile entrante forma un ciclo con le variabili $x_{24}$,$x_{34}$,$x_{33}$. Tra queste dobbiamo selezionarne una da far uscire dalla base. La scelta viene effettuata nel seguente modo:

1. *Consideriamo le variabili che formano un ciclo con la variabile entrante*
2. *Incrementiamo la variabile entrante da 0 ad un nuovo valore $\Delta>0$*
3. *Le variabili di base coinvolte nel ciclo verranno incrementate di $\Delta$, se hanno segno positivo, mentre verranno decrementate di $\Delta$, se hanno segno negativo.*
4. *La variabile uscente sara' quella che si azzera per prima.*

Nella matrice incrementiamo y, decrementiamo $x_{24}$, incrementiamo $x_{34}$ e decrementiamo $x_{41}$. **Quanto vale $\Delta$ ?**

$\Delta$ = minimo{ $x_{ij}$: $x_{ij}$ è coinvolta nel ciclo con segno meno }

Ritorniamo al nostro esempio. Scegliamo come variabile entrante $x_{14}$. Il ciclo introdotto da y è disegnato in figura e $\Delta = 10$.

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
1 & 15 & 10 & 0 & y & 0 \\
2 & 0 & 10 & 15 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 15 & 35 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Esce la variabile $x_{12}$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
1 & 15 & 0 & 0 & 10 & 0 \\
2 & 0 & 20 & 5 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 25 & 25 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

# Metodo del simplesso per il problema del trasporto

Passo 1: Trova una soluzione di base ammissibile con la regola dell'angolo di Nord-Ovest

Passo 2: Calcola $z_{ij}$-$c_{ij}$ per ogni variabile non in base
(dove $z_{ij}-c_{ij}=u_i-v_j-c_{ij}$).
Se $z_{ij}-c_{ij}\leq 0$ per ogni variabile non in base: STOP
Altrimenti seleziona la variabile entrante con massimo $z_{ij}$-$c_{ij}$

Passo 3: Determina la variabile uscente applicando la regola del ciclo

Passo 4: Ricalcola la nuova soluzione di base ammissibile e vai al passo 2