

Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 17

Analisi di Post-Ottimalità:

- Variazione dei coefficienti di costo
- Variazione dei termini noti

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Esempio: pianificare la produzione di una piccola azienda

- L'azienda produce due tipi di prodotti, il prodotto P_1 ed il prodotto P_2 , usando due materie prime indicate con A e B.
- La disponibilità al giorno di materia prima A è pari a 6 ton, mentre quella di materia prima B è di 8 ton.
- La quantità di A e B consumata per produrre una ton di prodotto P_1 e P_2 è riportata nella seguente tabella.

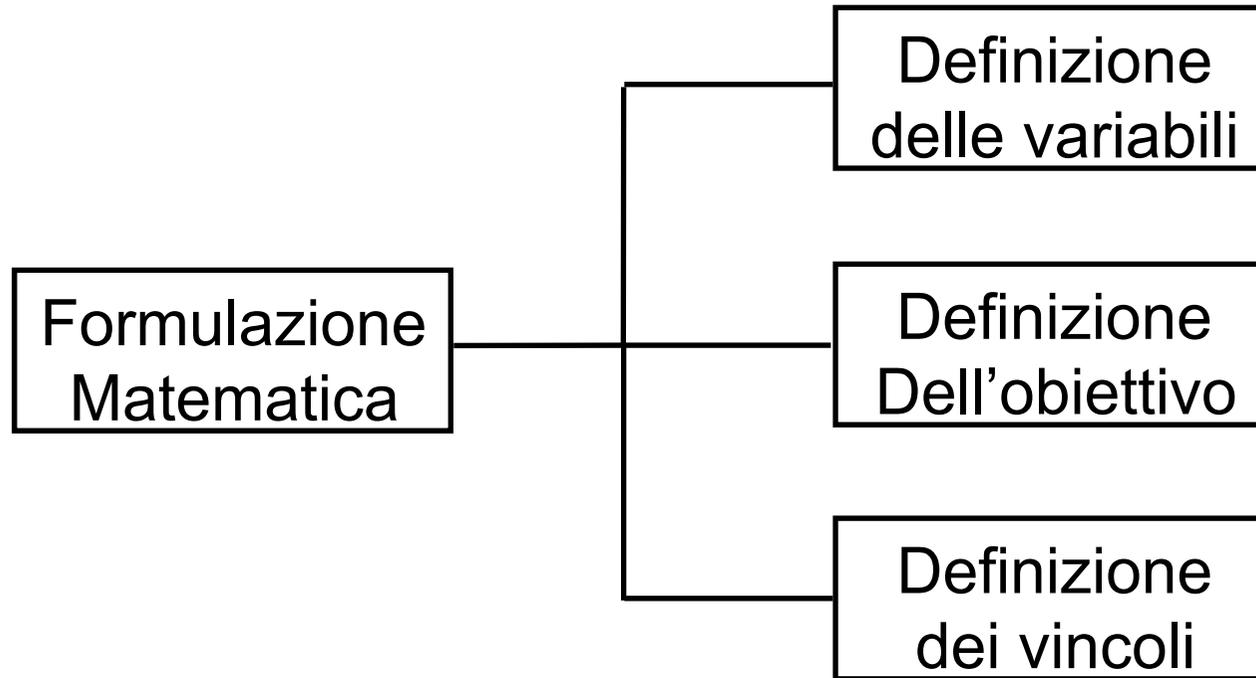
		Prodotti	
		P_1	P_2
materie prime	A	1	2
	B	2	1

- Si ipotizza che tutta la Quantità prodotta venga venduta.
- Il prezzo di vendita per tonnellata è Euro 3000 per P_1 e Euro 2000 per P_2 .
- L'azienda ha effettuato un'indagine di mercato con i seguenti esiti:
 - la domanda giornaliera di prodotto P_2 non supera mai di più di 1 ton quella di prodotto P_1 ,
 - la domanda massima giornaliera di prodotto P_2 è di 2 ton

Problema:

determinare le quantità dei due prodotti che debbono essere fabbricati giornalmente in modo da rendere massimo il guadagno.

Esempio: formulare il modello matematico



Definizione delle variabili

Si introducono due variabili che rappresentano le quantità prodotte (e vendute) al giorno per P_1 e P_2 (ton):

- produzione di P_1 : x_1
- produzione di P_2 : x_2

Le due variabili sono continue.

Definizione dell'obiettivo

Il guadagno giornaliero (K€) è dato da $z = 3x_1 + 2x_2$

L'obiettivo è rappresentato da un'equazione lineare.

Definizione dei vincoli

- Vincoli (tecnologici) sull'uso delle materie prime (l'uso giornaliero delle materie prime non può eccedere la disponibilità):

$$(A) \quad x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$(B) \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

- Vincoli conseguenti le indagini di mercato

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

- Non negatività delle variabili

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

La formulazione definisce un **Problema di Programmazione Lineare a variabili continue**

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (1)$$

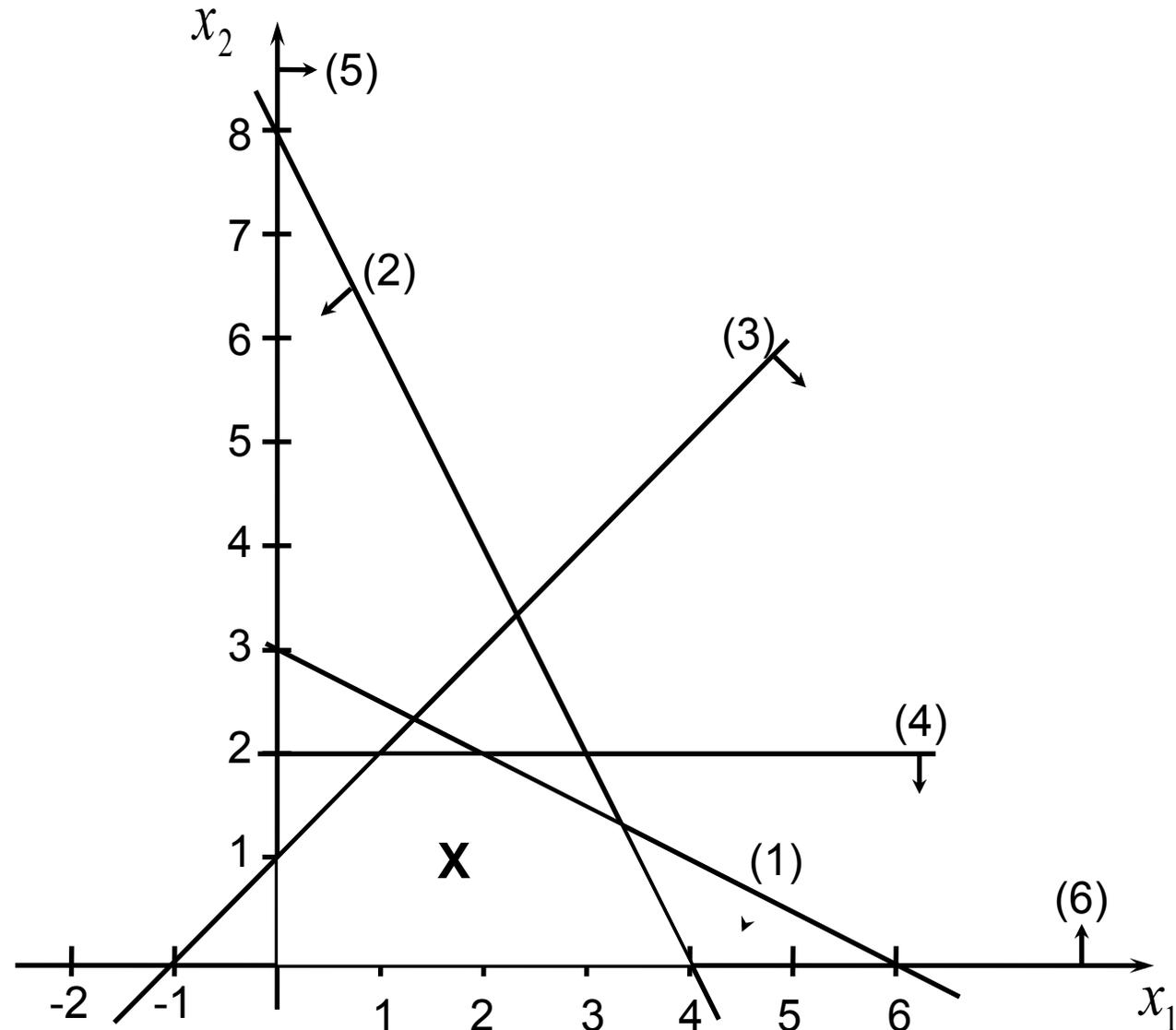
$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (2)$$

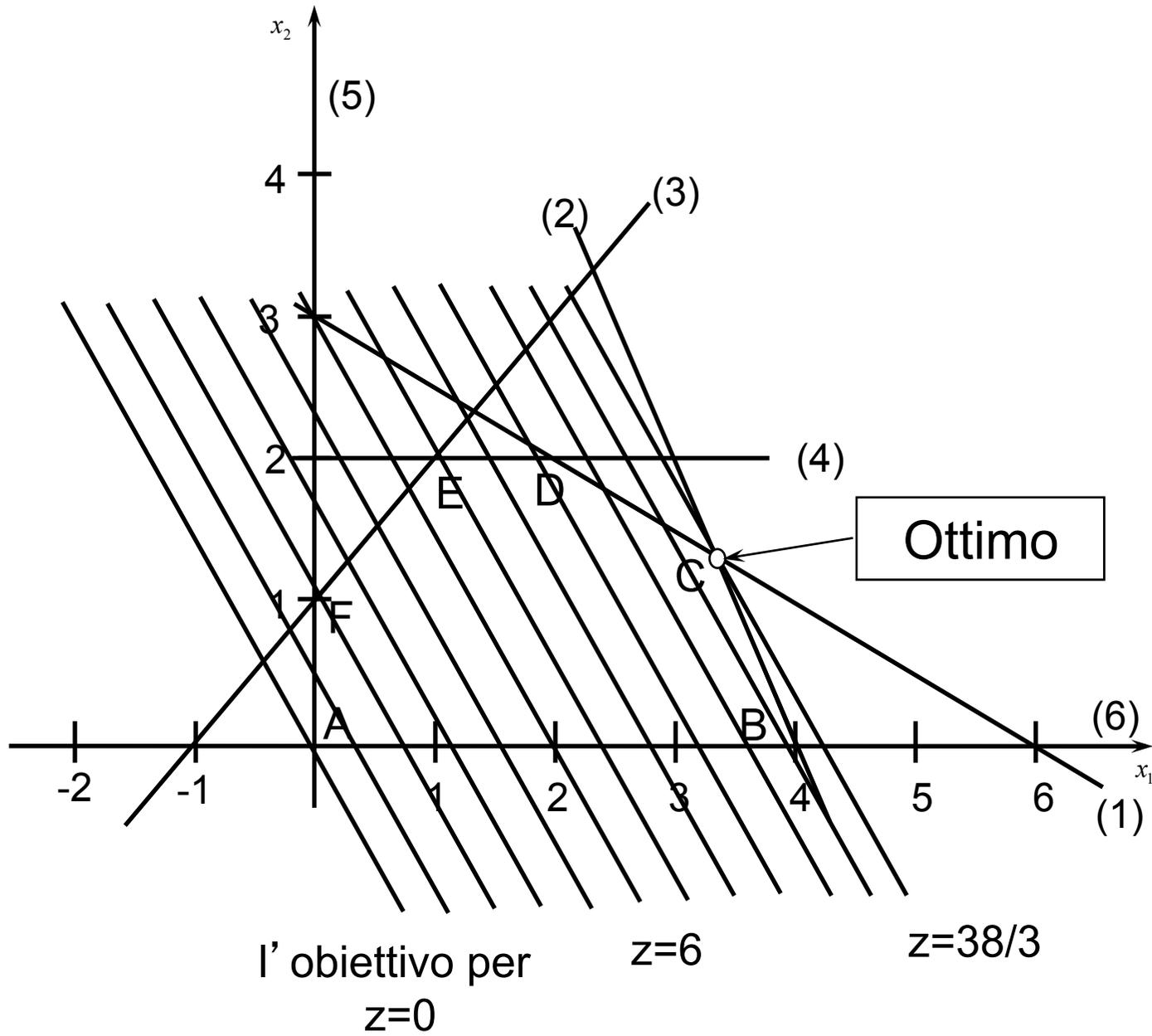
$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 2 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$





$$A=(0,0)$$

$$B=(4,0)$$

$$C=(10/3,4/3)$$

$$D=(2,2)$$

$$E=(1,2)$$

$$F=(0,1)$$

Esempio: sensitività della soluzione.

Variazioni rispetto la disponibilità delle risorse.

- (a) come aumentare le risorse per migliorare la soluzione ottima;
- (b) come ridurre le risorse disponibili lasciando invariata la soluzione ottima.

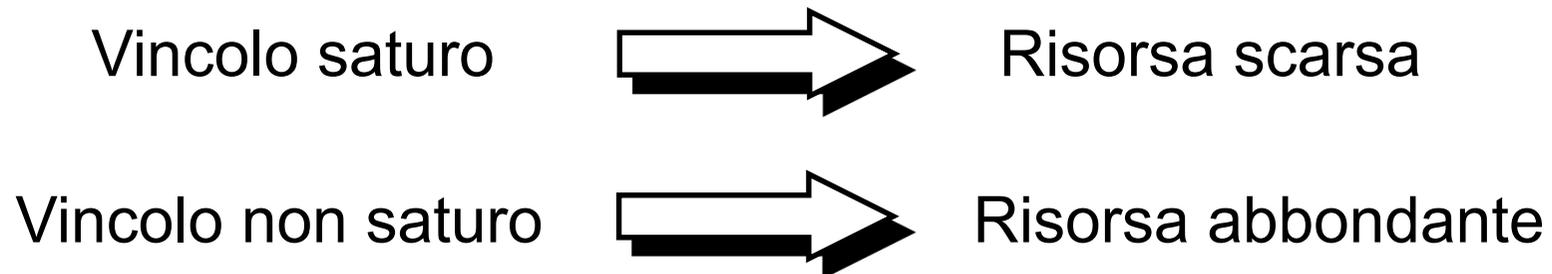
I vincoli del problema hanno tutti la seguente forma

$$\text{quantità di risorsa usata} \leq \text{disponibilità di risorsa}$$

anche se solamente i vincoli (1) e (2) rappresentano effettivamente il consumo delle materie prime A e B.

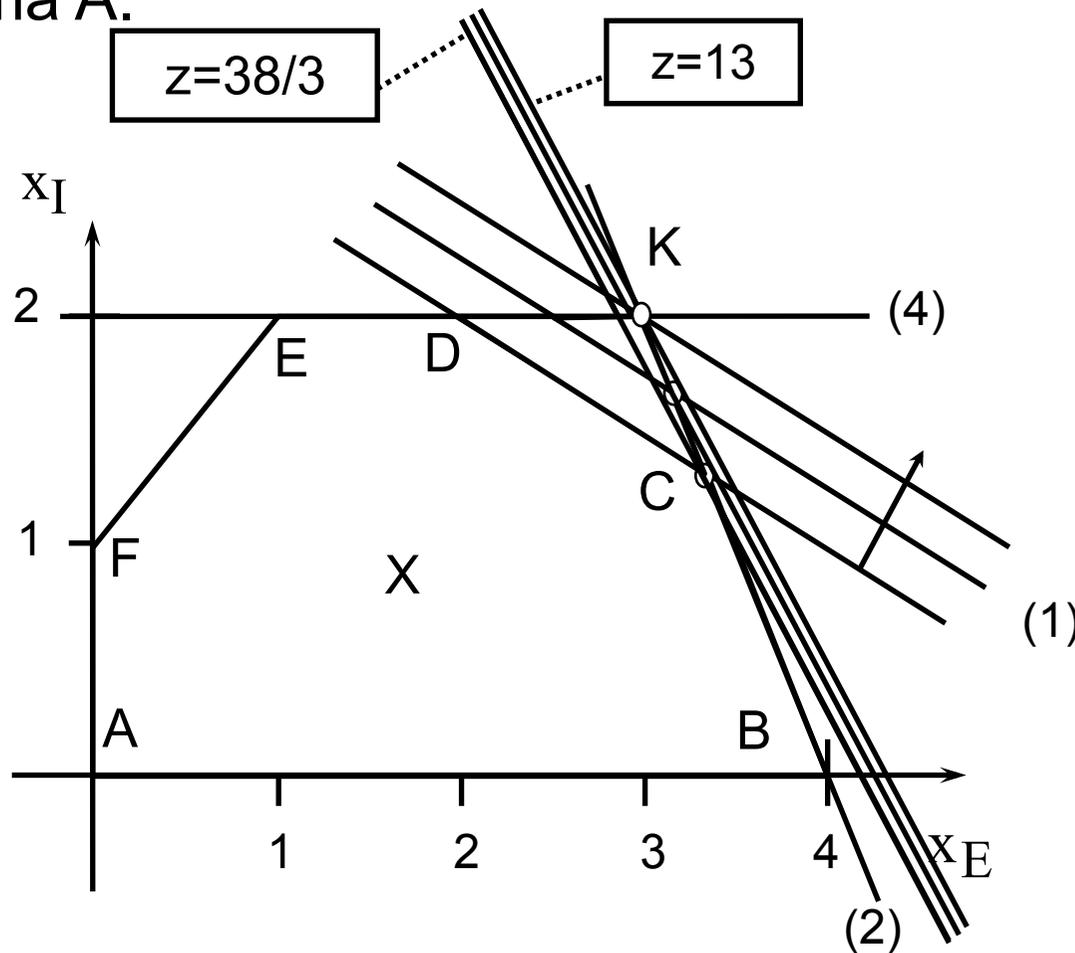
Poiché i vincoli (1) e (2) sono soddisfatti all'uguaglianza dalla soluzione ottima corrispondente al punto $C=(10/3,4/3)$, il livello ottimo di produzione per i due prodotti è tale da utilizzare tutte le materie prime disponibili.

I vincoli (1) e (2) sono **saturo**, quindi le materie prime A e B sono utilizzate completamente, ovvero sono **risorse scarse**.



- E' possibile aumentare la disponibilità di una risorsa scarsa per migliorare la soluzione ottima (caso (a)).
- E' possibile diminuire la disponibilità di una risorsa abbondante senza variare la soluzione ottima (caso (b)).

Verifichiamo sino a che livello ha senso aumentare la materia prima A.

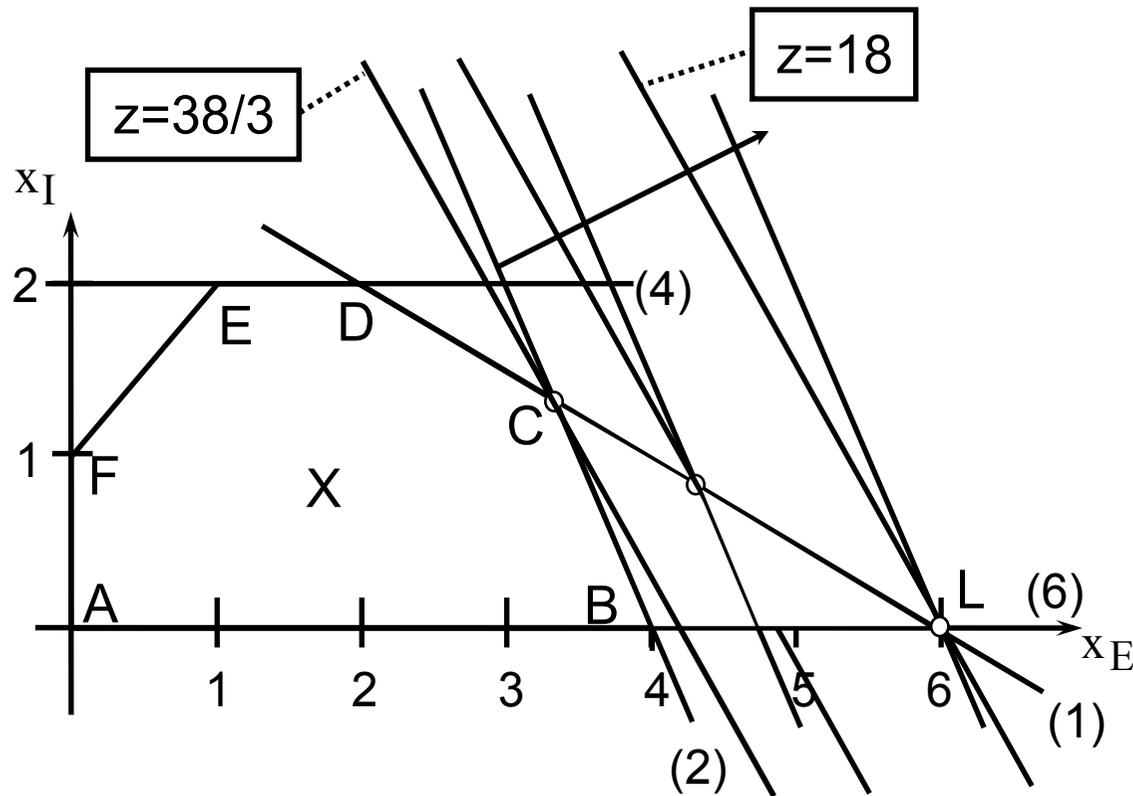


Aumentando la risorsa A il vincolo (1) si sposta e di conseguenza varia il punto di ottimo.

Oltre $K=(3,2)$ (intersezione di (2) e (4)) non ha più senso aumentare la risorsa A.

Il nuovo valore di A è 7.

Analoga verifica può essere fatta per la materia prima B.



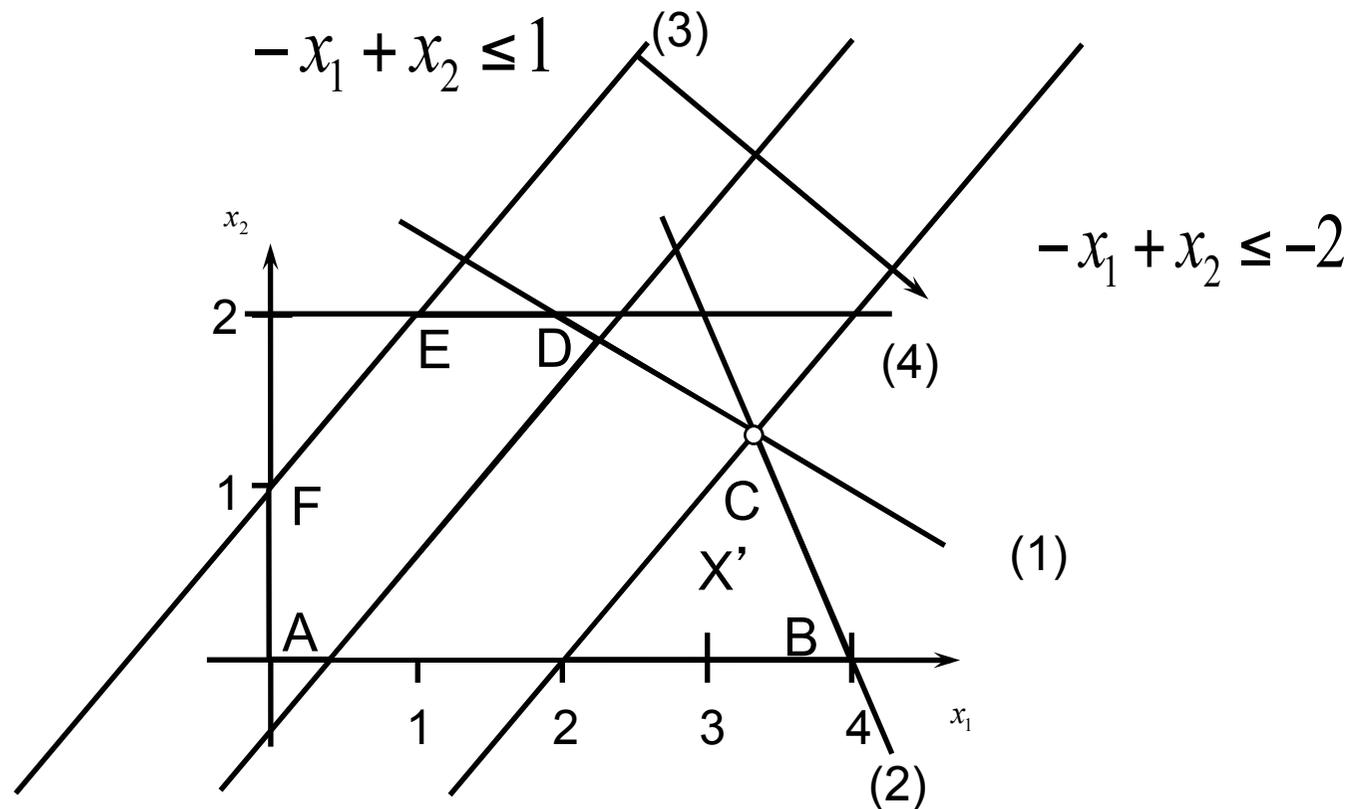
Aumentando la risorsa B il vincolo (2) si sposta e di conseguenza varia il punto di ottimo.

Oltre $L=(6,0)$ (intersezione di (1) e (6)) non ha più senso aumentare la risorsa B.

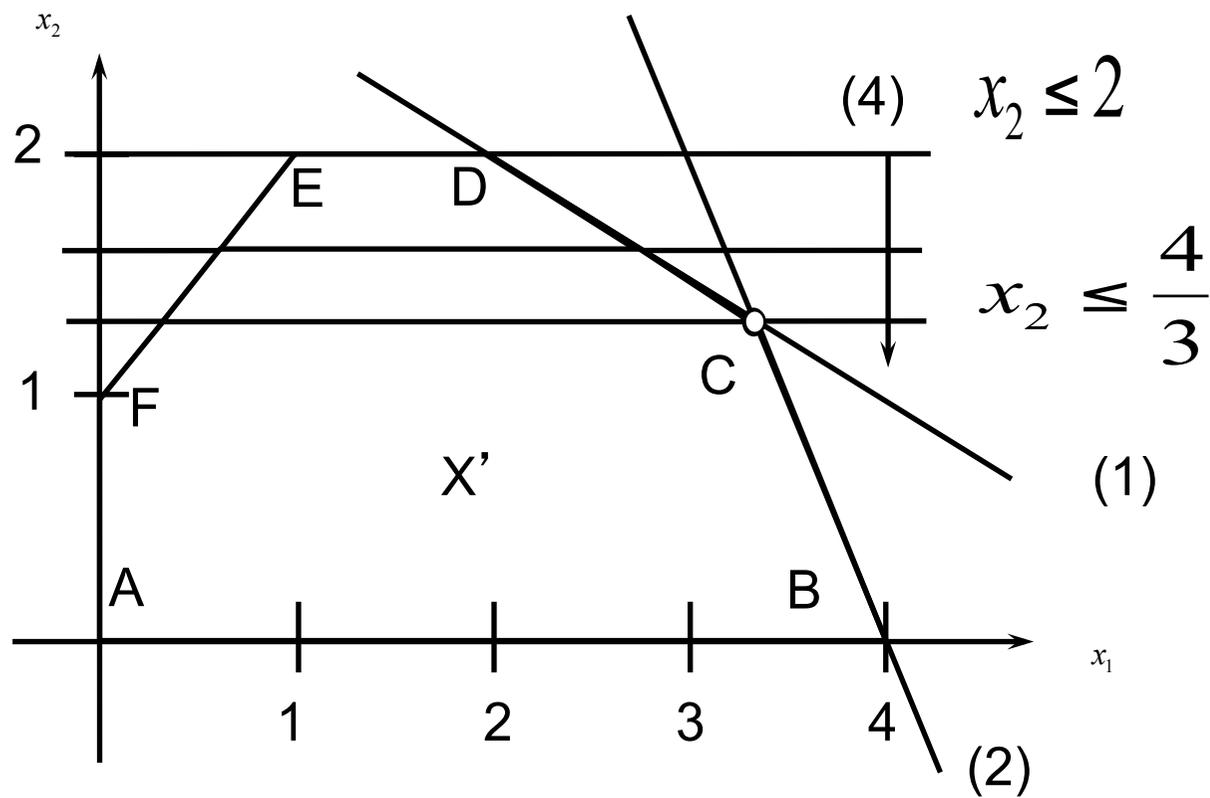
Il nuovo valore di B è 12.

Supponendo i vincoli (3) e (4) relativi al consumo di due ulteriori risorse abbondanti, è possibile verificare di quanto diminuirne la disponibilità senza modificare la soluzione ottima.

Per il vincolo (3)



Per il vincolo (4)



- Dopo aver verificato la convenienza di una possibile maggiore disponibilità delle risorse A e B, è interessante determinare quale sia la risorsa che di più convenga aumentare.
- Nell'esempio, l'azienda potrebbe avere una limitata disponibilità finanziaria che vorrebbe far fruttare al meglio, acquisendo un'ulteriore quantità di una delle risorse in modo da incrementare maggiormente i propri profitti.
- Questa informazione è ottenibile per mezzo della Programmazione Lineare.

Si può calcolare il **Valore di una Unità di Risorsa** w_i :

$$w_i = \frac{\text{massima variazione di } z}{\text{massima variazione della risorsa } i}$$

Per la risorsa A: $w_A = \frac{13 - \frac{38}{3}}{7 - 6} = \frac{39 - 38}{3} = \frac{1}{3}$ (K€/ton)

Per la risorsa B: $w_B = \frac{18 - \frac{38}{3}}{12 - 8} = \frac{54 - 38}{4} = \frac{4}{3}$ (K€/ton)

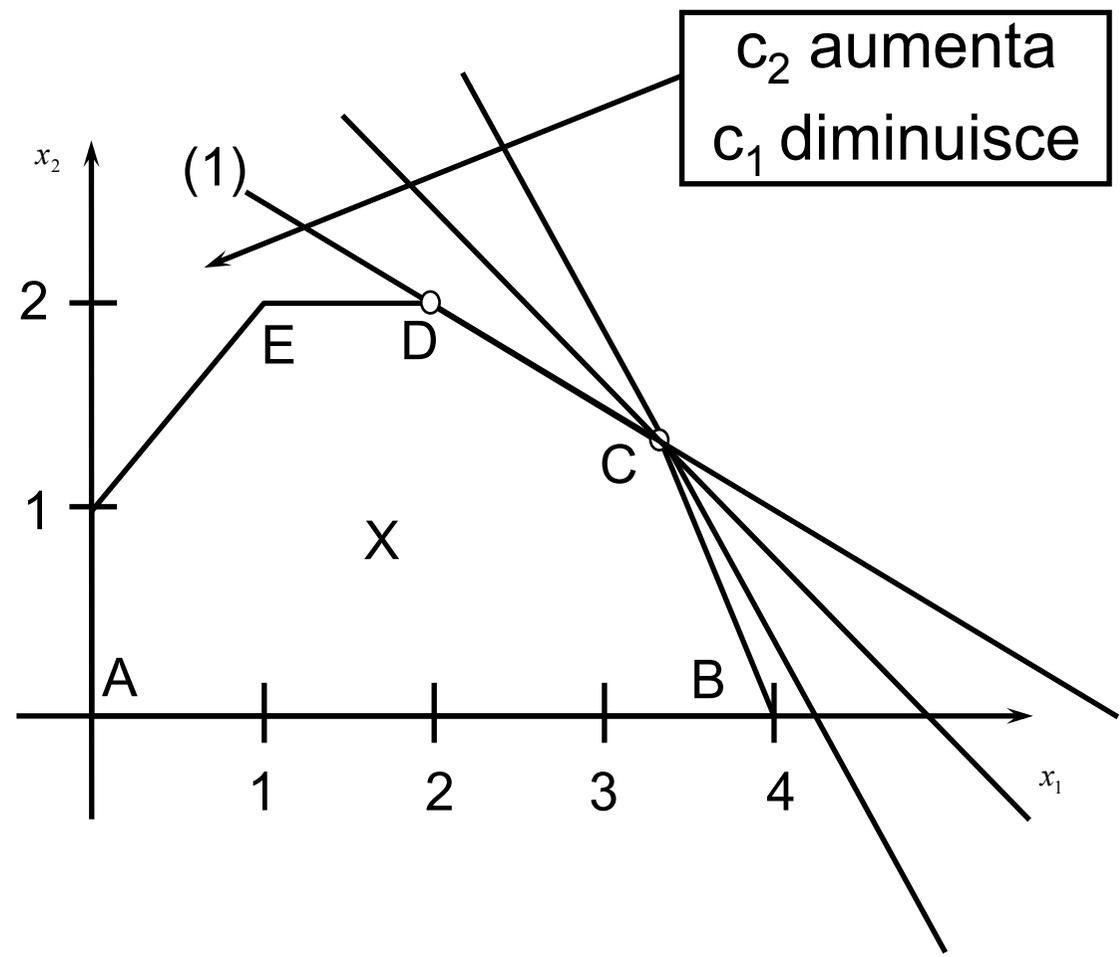
- La quantità w_i indica di quanto aumenta l'obiettivo in corrispondenza dell'acquisizione di un'ulteriore unità di risorsa.
- E' evidente come nell'esempio convenga acquisire per prima la risorsa B.

Variazioni del prezzo di vendita dei prodotti.

Si tratta di analizzare entro quali limiti di tolleranza possono variare i prezzi di vendita senza alterare la soluzione ottima (la produzione associata al punto C).

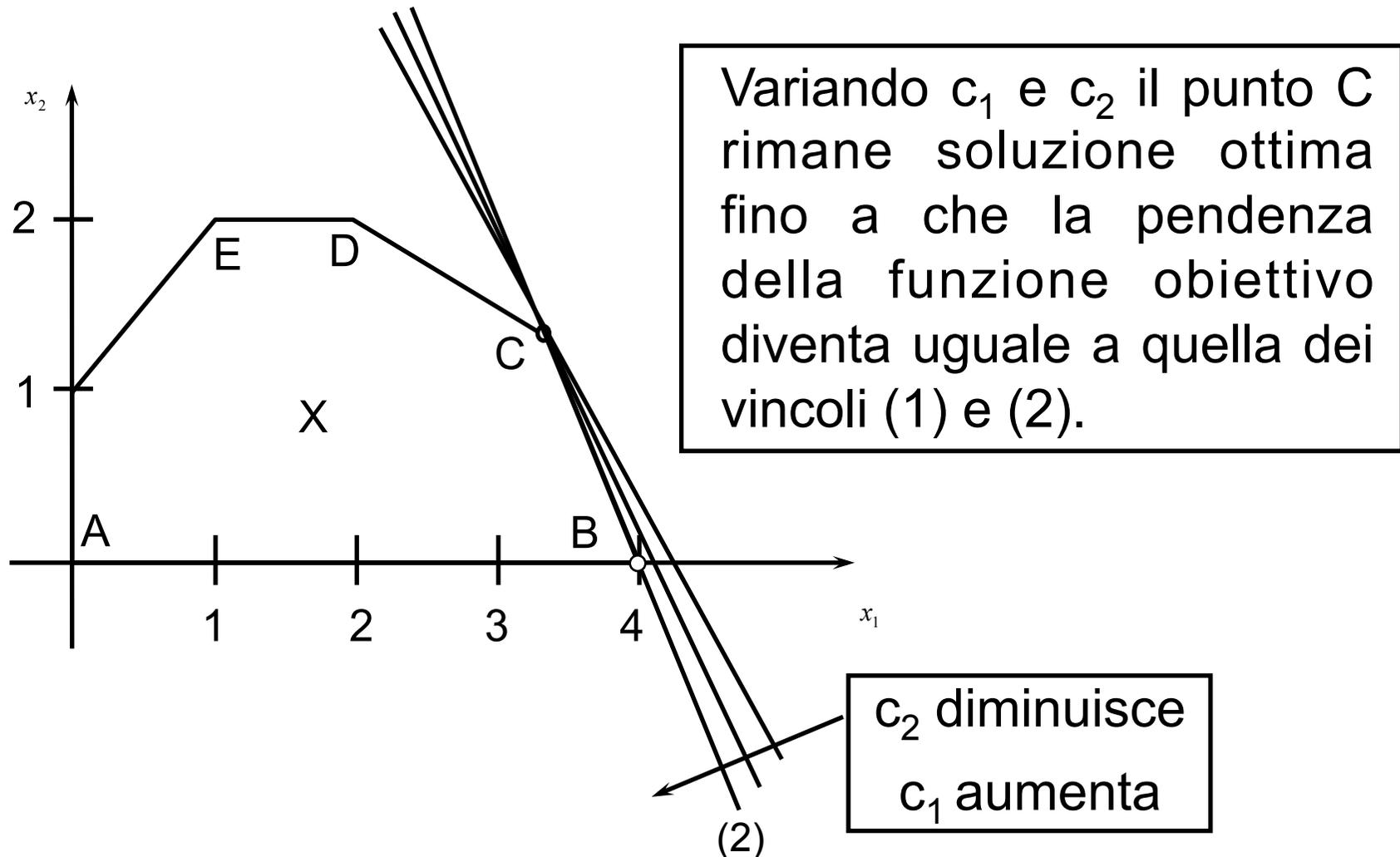
Variazioni del prezzo di vendita dei prodotti.

Variando c_1 e c_2 cambia la pendenza della funzione obiettivo:



Variazioni del prezzo di vendita dei prodotti

Variando c_1 e c_2 cambia la pendenza della funzione obiettivo:



Analisi di Post-Ottimalità (Analisi della Sensitività della Soluzione)

Dato un problema di programmazione lineare

$$\min \underline{c}^t \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

e data la soluzione ottima \underline{x}^* e la base ottima associata B , determinare come sia possibile variare certe caratteristiche del problema lasciando invariata la base ottima.

Cinque casi:

- 1) variazione nel vettore dei costi \underline{c} ;
- 2) variazione nel vettore dei termini noti \underline{b} ;
- 3) variazione nella matrice di vincoli A ;
- 4) aggiunta di una nuova variabile;
- 5) aggiunta di un nuovo vincolo.

Caso 1: variazione nel vettore dei costi \underline{c} .

Data una soluzione di base ottima supponiamo che il coefficiente di una delle variabili sia cambiato da c_k a c'_k .

L'effetto di questo cambio si ripercuoterà solo sui coefficienti di costo ridotto.

Abbiamo due sottocasi:

caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo relativo ad una variabile non in base;

caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo relativo ad una variabile in base.

Caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k non in base:

Sia c_k , $k \in N$, il coefficiente che viene variato

$$c'_k = c_k - \delta$$

In questo caso c_B non subisce variazioni e quindi

$$z_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j \quad \text{rimane inalterato per ogni } j \in N.$$

$$\text{Solo } z_k - c_k \quad \text{cambia in:} \quad z_k - c'_k$$

$$\text{Se } z_k - c'_k = z_k - (c_k - \delta) = (z_k - c_k) + \delta \leq 0$$

La soluzione continua a rimanere ottima altrimenti occorre fare entrare in base la variabile x_k con una nuova iter. del simplesso.

Caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k non in base:

ma quale è l'intervallo di valori che può assumere δ affinché la base attuale continui a rimanere ottima?

$$z_k - c'_k = \underbrace{(z_k - c_k)}_{\leq 0} + \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \leq -(z_k - c_k)$$

Quindi per ogni valore di δ nell'intervallo $-\infty \leq \delta \leq -(z_k - c_k)$

la base continua a rimanere ottima.

Caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile in base:

sia c_{B_i} , $i=1, \dots, m$, il coefficiente che viene variato.

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \quad j \in N$$

Tale variazione modifica i coefficienti di costo ridotto (negativi poichè la base è ottima) associati alle variabili fuori base

$$c'_{B_i} \leftarrow c_{B_i} - \delta \Rightarrow \underline{c}'_B \leftarrow \underline{c}_B - \delta \underline{e}_i$$

dove $\underline{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (i - esimo elemento)

Caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile in base:

$$\begin{aligned} z'_j - c_j &= (\underline{c}_B^T - \delta \underline{e}_i^T) A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j = \\ &= \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - \delta \underline{e}_i^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \end{aligned}$$

dove $\underline{e}_i^T A_B^{-1} = (A_B^{-1})^i$ è la riga i -esima di A_B^{-1}

Le condizioni su δ si ottengono imponendo che

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) - \delta (A_B^{-1})^i \underline{a}_j \leq 0 \quad \forall j \in N$$

Caso 2) variazione del termine noto di un vincolo.

Sia b_i , $i=1, \dots, m$, il termine noto del i -esimo vincolo che viene variato.

A causa di tale variazione si modificano i valori delle variabili di base:

$$\begin{aligned} b'_i \leftarrow b_i - \delta &\Rightarrow \underline{x}'_B = A_B^{-1} (\underline{b} - \delta \underline{e}_i) = A_B^{-1} \underline{b} - \delta (A_B^{-1})_i \\ &\Rightarrow \underline{x}'_B = \underline{x}_B - \delta (A_B^{-1})_i \end{aligned}$$

dove $A_B^{-1} \underline{e}_i = (A_B^{-1})_i$ è la colonna i -esima di A_B^{-1}

Le condizioni su δ si ottengono imponendo che

$$\underline{x}'_B = \underline{x}_B - \delta (A_B^{-1})_i \geq \underline{0}$$

Esempio: Analisi di Sensibilità.

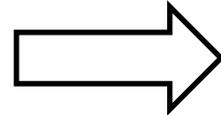
Dato il seguente problema di P.L.

$$\min -2x_1 + x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$\underline{x} \geq 0$$



$$\min -2x_1 + x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 4$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Base ottima: $B = \{1,5\}$, $N = \{2,3,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Infatti:

$$z_2 - c_2 = -3;$$

$$z_3 - c_3 = -1;$$

$$z_4 - c_4 = -2$$

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix};$$

$$z^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} = -12$$

Esempio: caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k non in base.

Di quanto si può variare al più il coefficiente c_2 prima di cambiare la base ottima?

$$z_2 - c'_2 = (z_2 - c_2) + \delta \leq 0 \Rightarrow -3 + \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \leq 3$$

Verifichiamo cosa succede se scegliamo un $\delta > 3$ per esempio $\delta = 4$.

Poiché x_2 non è in base il valore $z_j = \underline{c}_B A_B^{-1} \underline{a}_j$ non cambia per nessun indice $j \in N$. L'unico coeff. di costo ridotto che cambia è:

$$z_2 - c'_2 = (z_2 - c_2) + \delta = -3 + 4 = 1 > 0$$

Poiché $z_2 - c'_2$ è maggiore di zero la soluzione non è più ottima. Bisogna fare entrare in base x_2 .

Esempio: caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo c_k relativo ad una variabile x_k in base.

Di quanto si può variare al più il coefficiente c_1 prima di cambiare la base ottima?

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) - \delta (A_B^{-1})^i \underline{a}_j \leq 0 \quad \forall j \in N \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z'_2 - c_2 = (z_2 - c_2) - \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leq 0 \Rightarrow -3 - \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \geq -3$$

$$z'_3 - c_3 = (z_3 - c_3) - \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \Rightarrow -1 - \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \geq -1$$

$$z'_4 - c_4 = (z_4 - c_4) - \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \Rightarrow -2 - \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \geq -2$$

Verifichiamo cosa succede se scegliamo un $\delta < -1$ per esempio $\delta = -2$.

$$c_1 - \delta = c'_1 = 0 \Rightarrow \delta = c_2 - c'_2 = -2 + 0 = -2$$

Poiché x_1 è in base il valore z_j cambia per ciascun indice $j \in N$ secondo la relazione: $z'_j - c_j = (z_j - c_j) - \delta (A_B^{-1})^i \underline{a}_j \leq 0 \quad \forall j \in N$

$$z'_2 - c_2 = -3 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 + 2 \times 1 = -1$$

$$z'_3 - c_3 = -1 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 2 \times 1 = 1$$

$$z'_4 - c_4 = -2 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 + 2 \times 1 = 0$$

Esempio: caso 2) variazione del termine noto di un vincolo.

$$\begin{aligned} b'_i \leftarrow b_i - \delta &\Rightarrow \underline{x}'_B = A_B^{-1} (\underline{b} - \delta \underline{e}_i) = A_B^{-1} \underline{b} - \delta (A_B^{-1})_i \\ &\Rightarrow \underline{x}'_B = \underline{x}_B - \delta (A_B^{-1})_i \end{aligned}$$

Di quanto può variare al più il termine noto b_1 prima di rendere inammissibile la base ottima?

$$\underline{x}'_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} - \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta \\ -\delta \end{bmatrix} = \begin{cases} 6 - \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 6 \\ 10 - \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 10 \end{cases}$$

Verifichiamo cosa succede se scegliamo $\delta = 3$.

$$\underline{x}'_B = \underline{x}_B - \delta(A_B^{-1})_i$$

$$\underline{x}'_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$