

Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

Lezione n° 11

Algoritmo del Simplexso:

- Coefficienti di costo ridotto
- Condizioni di ottimalità
- Test dei minimi rapporti
- Cambio di base

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL.

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard

$$\begin{aligned}\min \quad z &= \underline{c}^T \underline{x} \\ Ax &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0}\end{aligned}$$

Data una base B ammissibile, partizioniamo sia la matrice A che il vettore delle incognite \underline{x} come segue:

$$A = [A_B \mid A_N] \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} \begin{array}{l} m \text{ componenti} \\ n - m \text{ componenti} \end{array}$$

Il sistema di equazioni lineari $A\underline{x} = \underline{b}$ si può riscrivere come

$$A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b} \rightarrow A_B \underline{x}_B = \underline{b} - A_N \underline{x}_N \rightarrow \underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL.

Riscriviamo anche la funzione obiettivo come:

$$z = \underline{c}^T \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{c}_B^T & \underline{c}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \underline{c}_B^T \underline{x}_B + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \quad (1)$$

Sostituiamo in (1) l'espressione delle variabili di base:

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \quad (2)$$

ottenendo:
$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \quad (3)$$

Il valore della funzione obiettivo corrispondente alla base B è:

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$

Le relazioni (2) e (3) esprimono rispettivamente i vincoli e la funzione obiettivo in funzione delle variabili fuori base.

$$\underline{z} = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N$$
$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

(4)

Le (4) sono $m+1$ equazioni.

Indicando con:

$$\underline{\bar{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$$

Otteniamo:

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \Leftrightarrow z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N$$

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \Leftrightarrow \underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Inoltre essendo:

$$A_N \underline{x}_N = \sum_{j \in N} \underline{a}_j x_j$$

Abbiamo

$$z = \underline{c}_B^T \bar{\underline{b}} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \Leftrightarrow z = \underline{c}_B^T \bar{\underline{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\underline{x}_B = \bar{\underline{b}} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \Leftrightarrow \bar{\underline{b}} - \sum_{j \in N} A_B^{-1} \underline{a}_j x_j$$

dove \underline{a}_j è la colonna di N che moltiplica la j-esima variabile fuori base.

Infine ponendo: $A_B^{-1} \underline{a}_j = \underline{y}_j$

Otteniamo: $\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} A_B^{-1} \underline{a}_j x_j \Leftrightarrow \underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$

Dove le \underline{y}_j sono termini noti e x_j variabili.

La nostra funzione obiettivo diventa:

$$z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j \Leftrightarrow z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T \underline{y}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

Poniamo: $\underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} = z_0$ e $\underline{c}_B^T \underline{y}_j = z_j$

la nostra F.O. diventa:

$$\min z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T \underline{y}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j \Leftrightarrow \min z = z_0 - \sum_{j \in N} z_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$$

I coefficienti $z_j - c_j$

vengono detti **coefficienti di costo ridotto**.

Verifichiamo se la soluzione di Base corrente è ottima o può essere migliorata

Consideriamo l'obiettivo: $\min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j)x_j$

Supponiamo che esista un coefficiente $k \in N$ tale che

$$z_k - c_k > 0$$

e consideriamo come varia l'obiettivo facendo diventare positiva la variabile fuori base x_k , attualmente nulla.

$$z = z_0 - \overbrace{(z_k - c_k)x_k}^{>0}$$

\swarrow
 >0

L'obiettivo migliora !

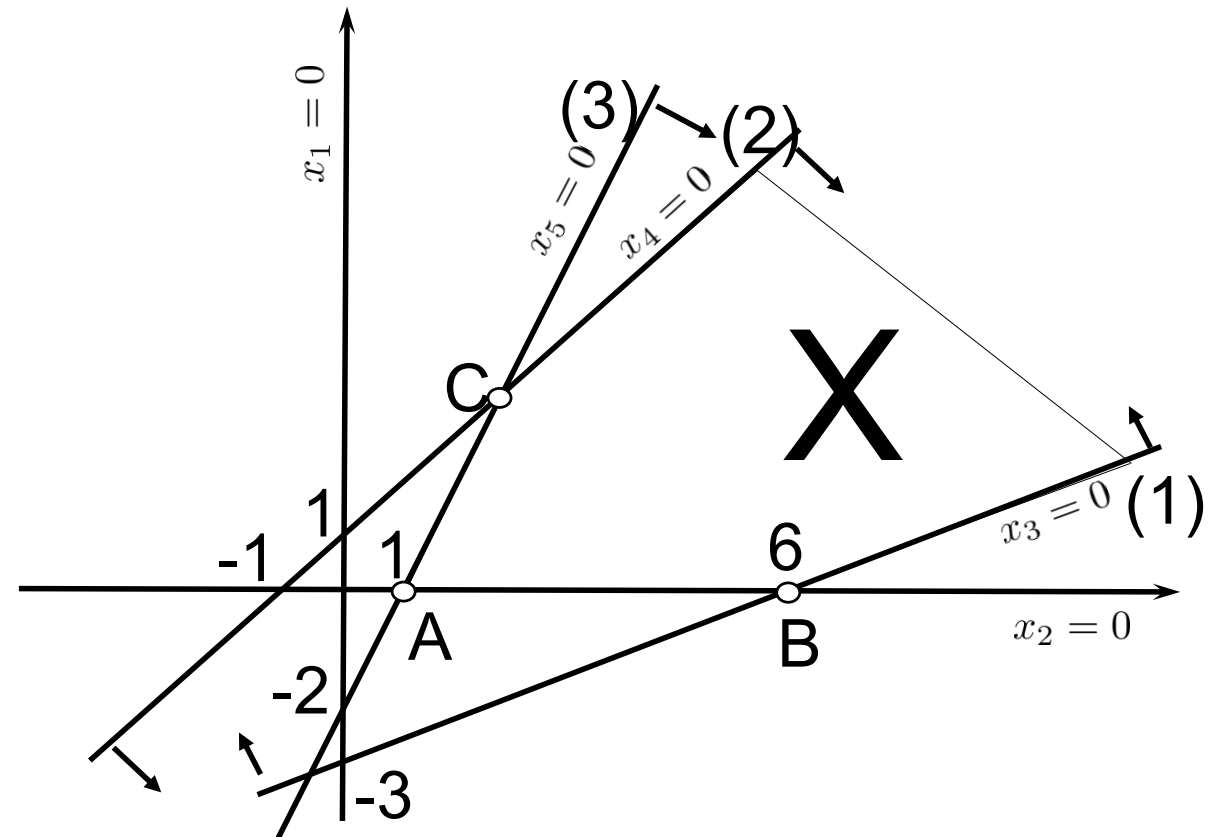
$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 \leq 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2 \geq 0$$



Forma Standard

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 = 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Verificare analiticamente se la soluzione di base associata al punto A soddisfa il test di ottimalità.

Poichè incrementando il valore della variabile fuori base x_k il valore della funzione obiettivo migliora, si potrebbe pensare di aumentare indefinitivamente x_k .

Tuttavia, aumentando x_k anche le equazioni (5) corrispondenti ai vincoli variano, modificando i valori delle variabili di base:

$$\underline{x}_B = \bar{b} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j \geq \underline{0} \quad (5)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Dal momento che per $j \in N$ le x_j sono uguali a zero per $j \neq k$ la relazione

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

Diventa

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$$

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$$

In forma vettoriale:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

Se $y_{ik} \leq 0$ per ogni i

allora x_{B_i} cresce al crescere di x_k e così x_{B_i} continua a essere non negativo.

Se esiste una componente i tale che $y_{ik} > 0$

allora x_{B_i} decresce al crescere di x_k . Il valore di x_k verrà incrementato finché una delle variabili che costituiscono la soluzione di base assumerà valore zero. Infatti noi vogliamo che:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k} x_k \geq 0$$

$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - y_{2k} x_k \geq 0$$

.....

.....

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk} x_k \geq 0$$

la variabile che si azzererà per prima verrà tolta dalle variabili di base e sarà sostituita da x_k .

Possiamo scrivere:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k} x_k \geq 0 \quad \Leftrightarrow \text{sempre}$$

$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - y_{2k} x_k \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_k \leq \frac{\bar{b}_2}{y_{2k}}$$

.....

.....

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk} x_k \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_k \leq \frac{\bar{b}_m}{y_{mk}}$$

Dobbiamo considerare solo i rapporti in cui $y_{ik} > 0$

Quindi considerando quei rapporti in cui $y_{jk} > 0$ la variabile x_k assumerà il seguente valore:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\}$$

Così:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k} x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_1 - y_{1k} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

.....

$$x_{B_r} = \bar{b}_r - y_{rk} x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_r - y_{rk} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = 0$$

.....

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk} x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_m - y_{mk} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

Fare assumere ad x_k un valore positivo significa portare la variabile x_k in base.

Nello stesso tempo il valore delle altre variabili di base per cui $y_{ik} > 0$ diminuisce.

Il valore che x_k assume in base è quello corrispondente all'annullamento della prima variabile di base, cioè

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\}$$

La variabile x_k entra in base con tale valore, ed in corrispondenza la variabile x_{B_r} esce di base.

Il coefficiente y_{rk} è detto **Pivot**, (l'aggiornamento della base si dice **Pivoting**) e viene usato per aggiornare i valori delle variabili in base dopo l'ingresso in base di x_k .

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - y_{ik} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$
$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

La nuova soluzione di base

$x_j = 0 \quad \forall j \in N'$ con $N' = B_r \cup N - \{k\}$, $x_{B_r} = 0$ **Le nuove variabili fuori base**

Con il cambio delle variabili in base, la nuova matrice di base risulta composta delle stesse colonne della vecchia base ad eccezione del fatto che la colonna associata a x_{B_r} è stata sostituita dalla colonna associata a x_k .

La nuova soluzione di base ha migliorato il valore della funzione obiettivo:

$$z = z_0 - \overbrace{(z_k - c_k)}^{>0} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \leq z_0$$

\swarrow
 >0

E' possibile iterare il procedimento fino a che esiste qualche variabile fuori base che può migliorare l'obiettivo se portata in base.

5. Teorema (Condizione di ottimalità)

Una soluzione di base non degenera di un problema di PL è ottima se e solo se:

$$1) \bar{b}_i \geq 0 \quad (\text{ammissibile})$$

$$2) z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in N \quad (\text{non migliorabile})$$

Nel caso di soluzione degenerare possono esistere soluzioni ottime in cui il punto (2) del teorema 5 non è soddisfatto.

Tuttavia, se un problema ammette soluzione ottima finita allora ammette una soluzione di base ottima che soddisfa le condizioni (1) e (2) del teorema 5.