Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

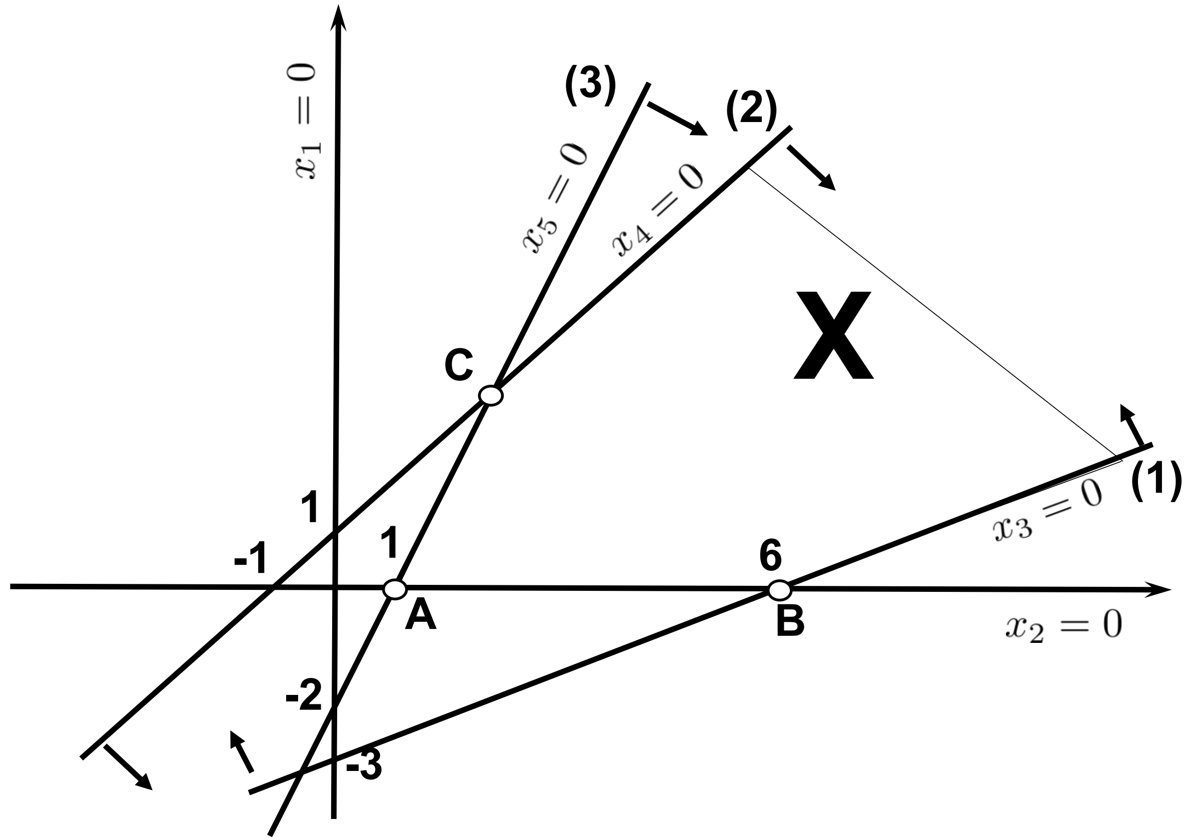
Lezione n° 10

- Individuazione basi associate ai vertici
- Individuazione di soluzioni ammissibili e non, basiche e non.
- Soluzione di base degenere
- Esempio di formulazione

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$



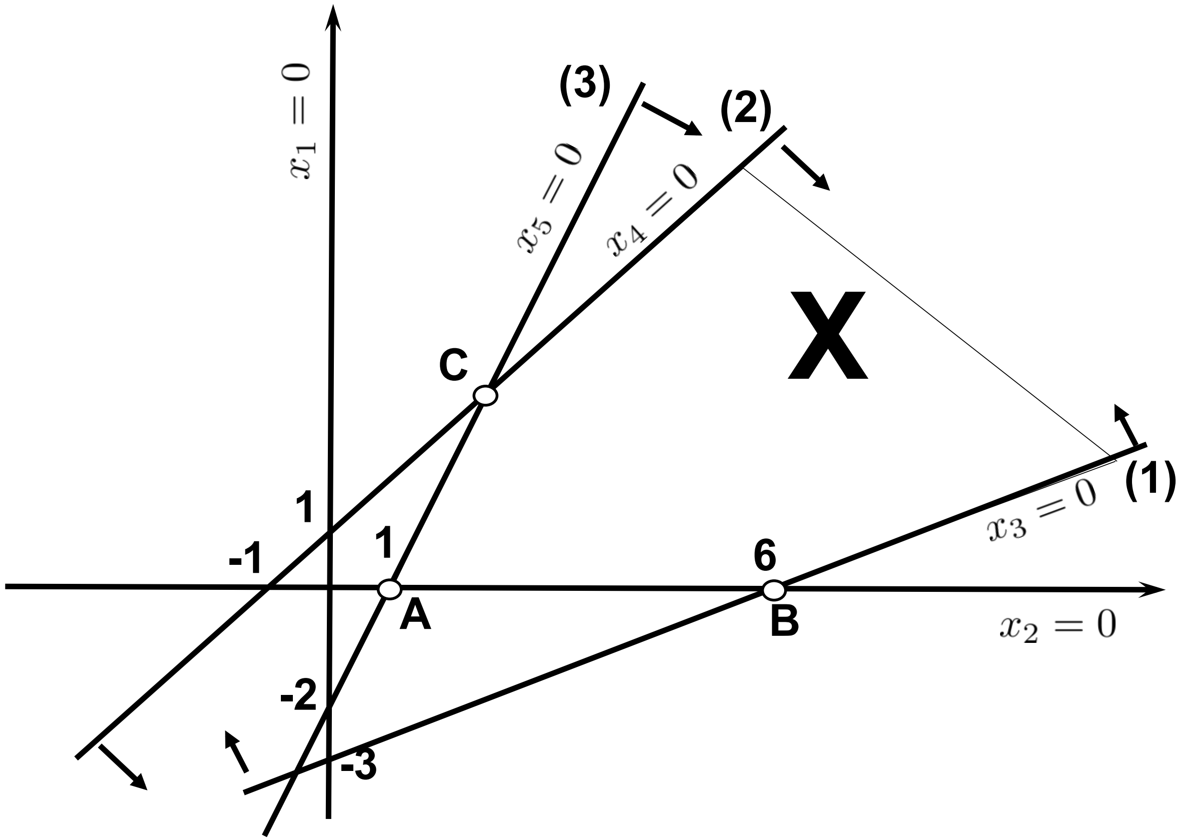
Forma Standard

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0
\end{array}$$

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \quad = 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 - x_5 \quad = 2 \\ (4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$



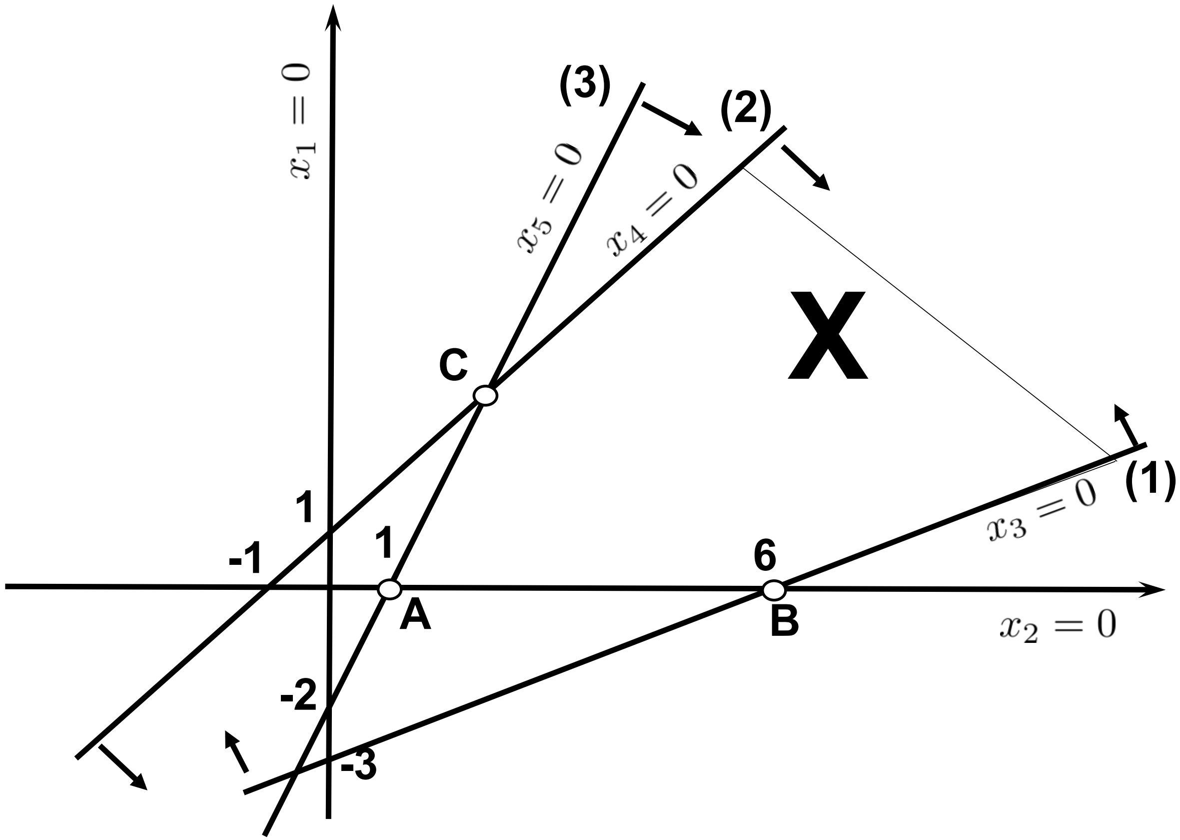
Si determinino le basi associate ad ogni vertice della regione ammissibile

3. Teorema (no dim.)

Dato X={A<u>x</u>=<u>b</u>, <u>x</u>≥<u>0</u>} insieme convesso, dove A è una matrice mxn di rango m con m<n, <u>x</u> è un punto estremo di X se e solo se <u>x</u> è una soluzione di base ammissibile.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \quad = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 \quad = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



Si determinino le basi associate ad ogni vertice della regione ammissibile

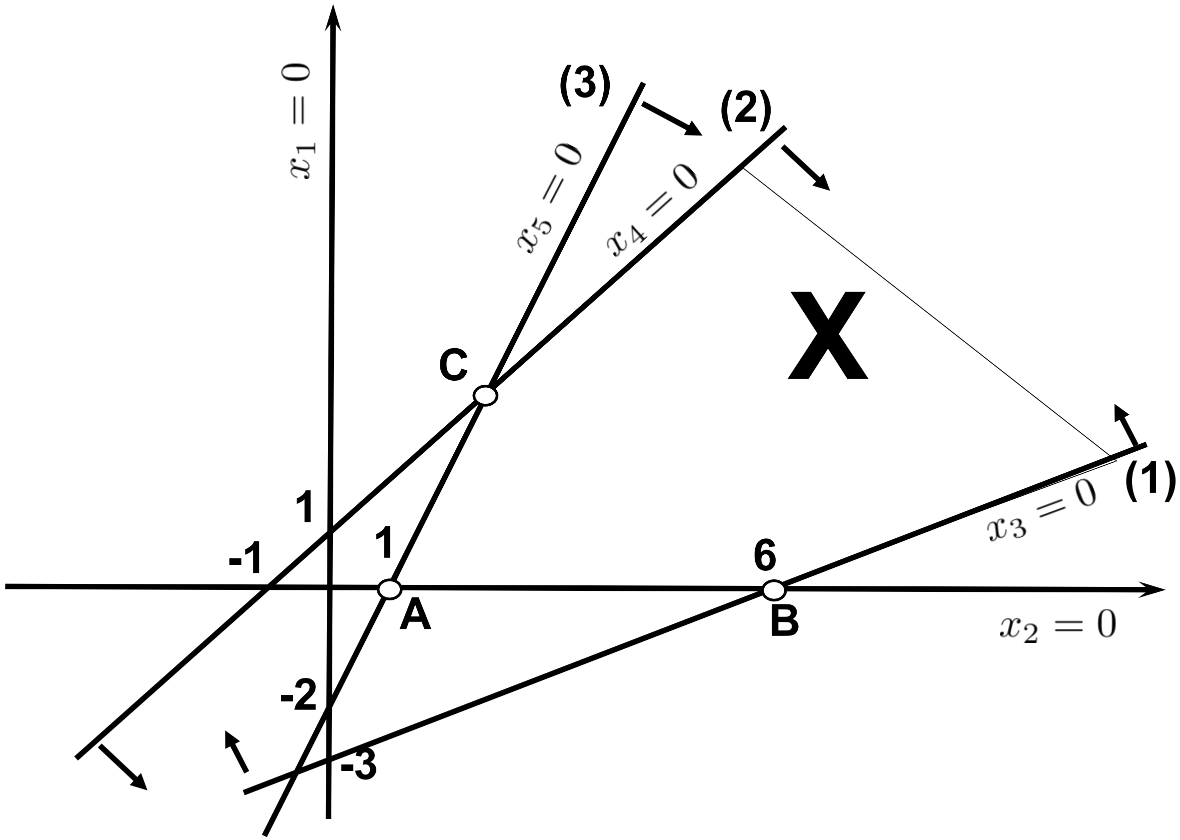
Dal teorema precedente sappiamo che ad ogni vertice della regione ammissibile sono associate una o più basi ammissibili.

Il numero di componenti di queste basi è dato dal numero m di righe della matrice dei vincoli A.

Per individuare la base associata ad un vertice x è sufficiente trovare le variabili che assumono il valore zero sui vincoli la cui intersezione individua x sul piano.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \quad = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 \quad = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}$$



Si determinino le basi associate ad ogni vertice della regione ammissibile

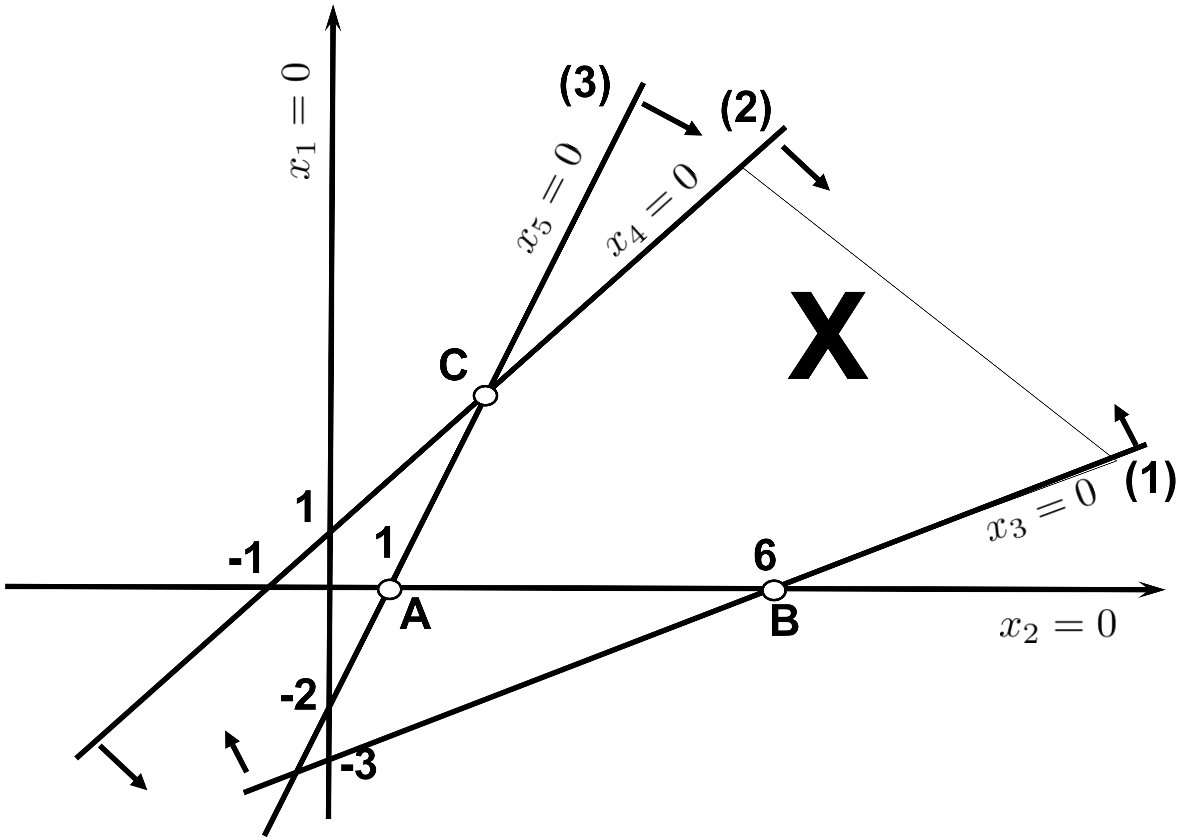
Nell'esempio in figura:

Il punto A=(1,0) è individuato dal vincolo 3, su cui x_5 vale zero e l'asse delle ascisse dove x_2 vale zero.

Quindi la base associata al vertice A=(1,0) è B_A={1,3,4}

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \quad = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 \quad = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



Si determinino le basi associate ad ogni vertice della regione ammissibile

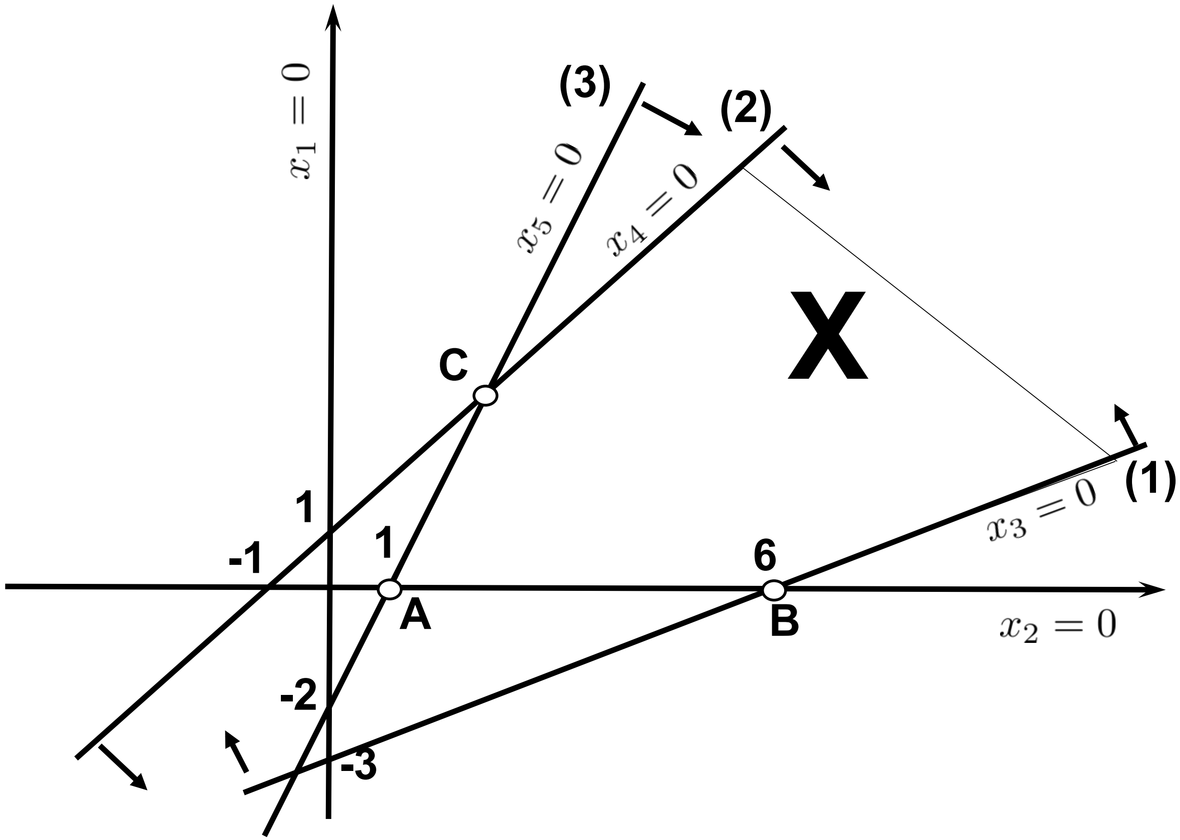
Nell'esempio in figura:

Il punto B=(6,0) è individuato dal vincolo 1, su cui x_3 vale zero e l'asse delle ascisse dove x_2 vale zero.

Quindi la base associata al vertice B=(6,0) è {1,4,5}

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \quad = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 \quad = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



Si determinino le basi associate ad ogni vertice della regione ammissibile

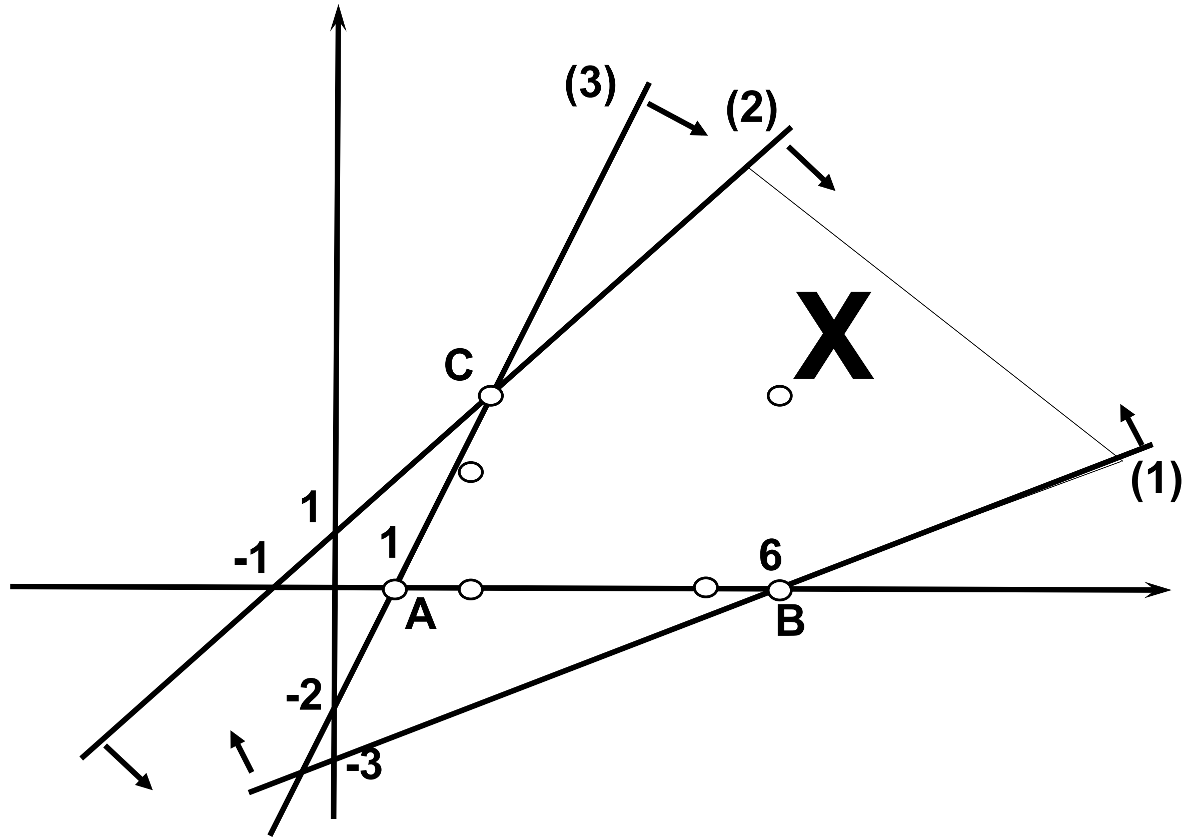
Nell'esempio in figura:

Il punto C=(3,4) è individuato dal vincolo 2, su cui x_4 vale zero ed il vincolo 3, su cui x_5 vale zero.

Quindi la base associata al vertice C=(3,4) è {1,2,3}

$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$



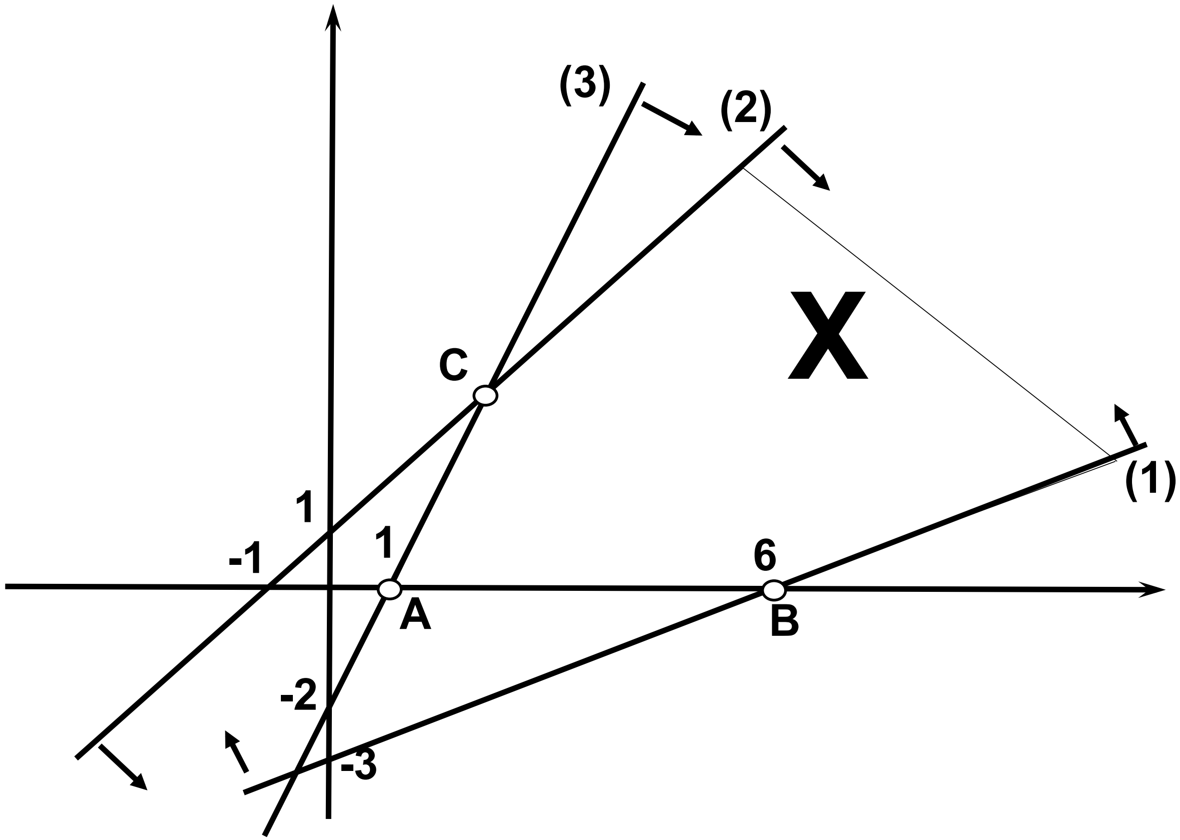
Si individui (geometricamente) una soluzione ammissibile non basica

RISP: Qualsiasi punto della regione ammissibile ad eccezione dei punti estremi A, B, C.

Esempio: (2,0), (5,0), (2,2), (6,3) ……..

$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$



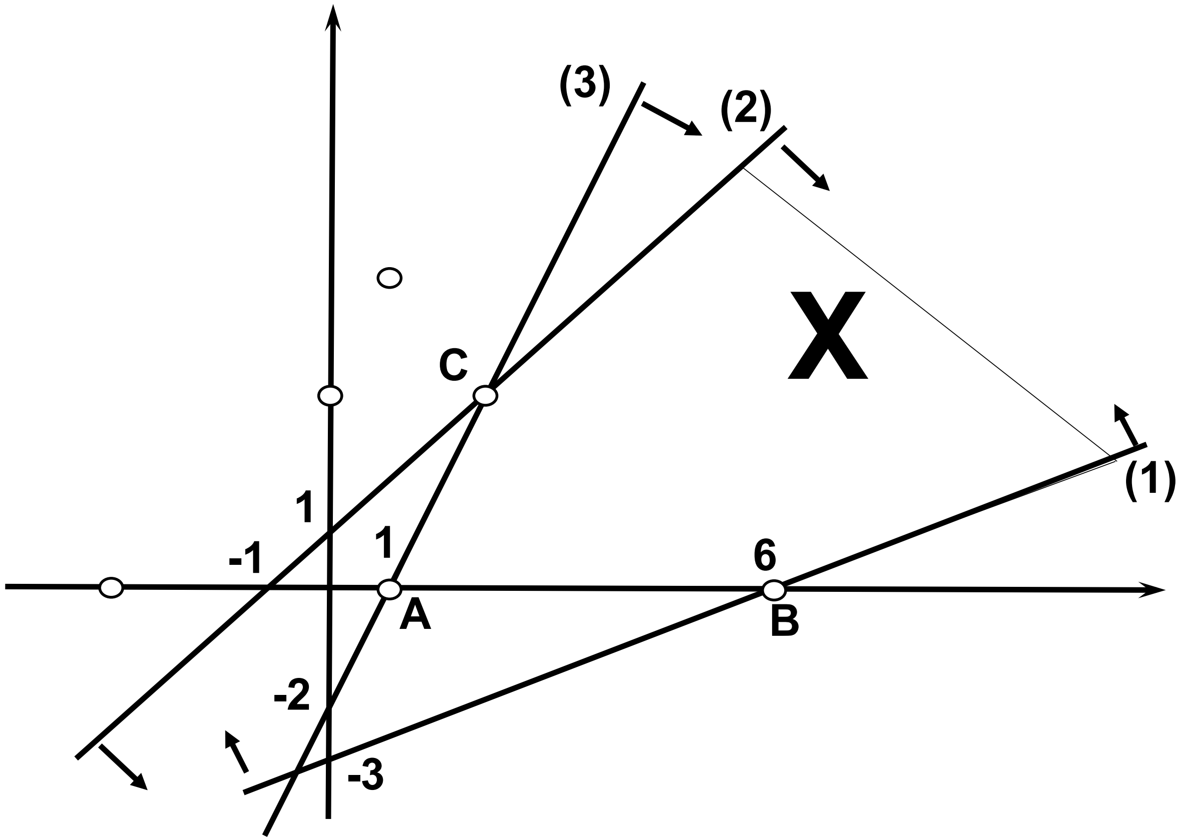
Si individui (geometricamente) una soluzione ammissibile basica

RISP: Uno qualsiasi dei punti estremi della regione ammissibile.

Nell'esempio in figura sono: A=(1,0), B=(6,0) e C=(3,4)

$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$



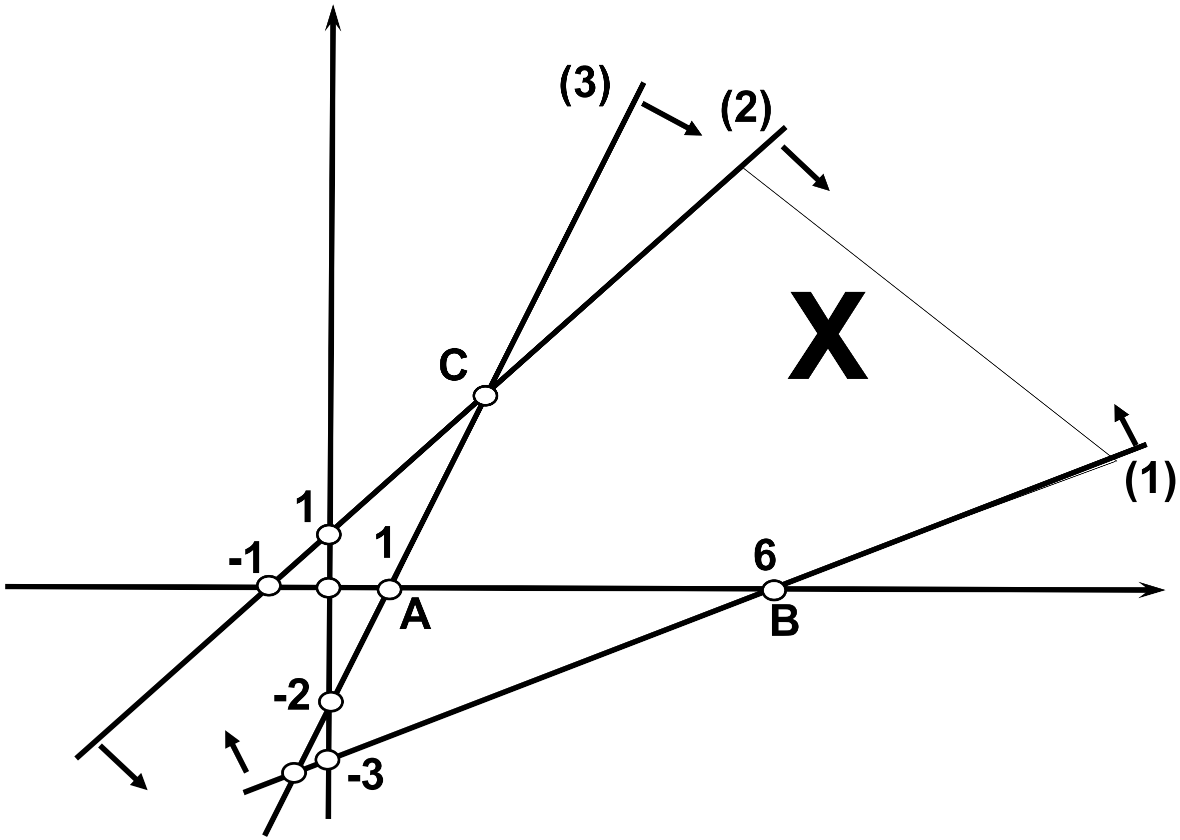
Si individui (geometricamente) una soluzione non ammissibile non basica

RISP: Un qualsiasi punto al di fuori della regione ammissibile diverso da quelli ottenuti dall'intersezione di due o più vincoli del problema.

Nell'esempio in figura: (0,3), (1,5), (-3,0), ……..

$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$



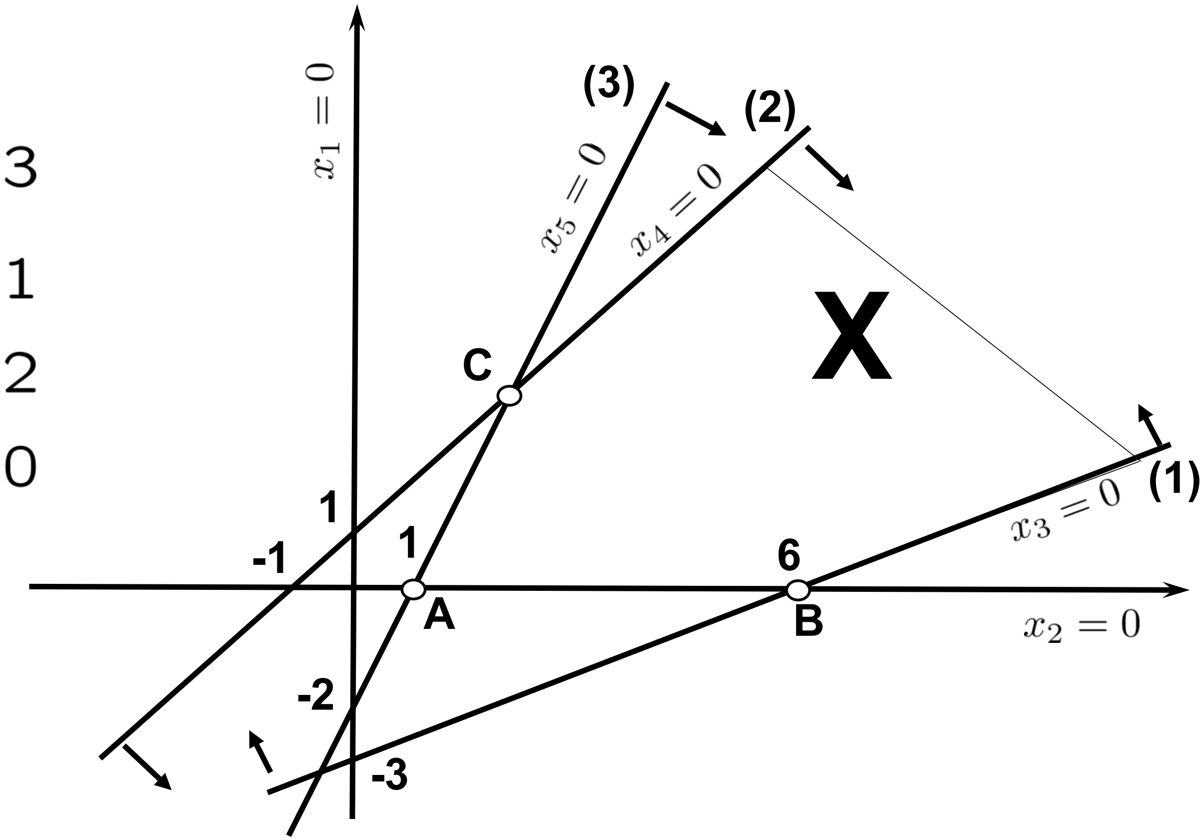
Si individui (geometricamente) una soluzione non ammissibile basica

RISP: Un qualsiasi punto al di fuori della regione ammissibile ottenuto dall'intersezione di due o più vincoli del problema.

Nell'esempio in figura sono: (0,0), (-1,0), (0,1), (0,-2), (0,-3), (-2/3,-10/3)

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{array}
$$



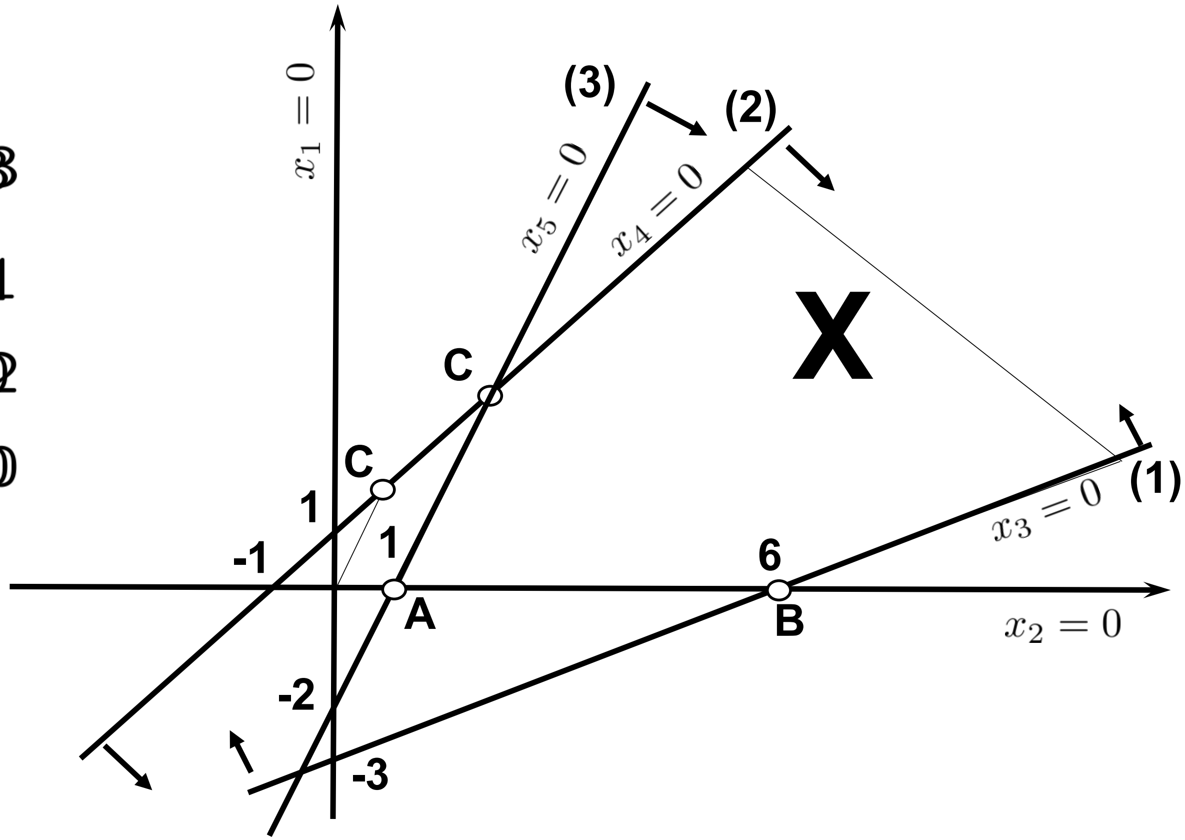
Individuare una soluzione di base ammissibile degenere, se esiste.

RISP: Un punto estremo su cui passano almeno n-m+1 vincoli. Questa condizione garantisce che almeno una variabile in base sia nulla.

Nell'esempio in figura non ci sono soluzioni di base degeneri.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



Modificare il vincolo 3 al fine di generare una soluzione di base ammissibile degenere.

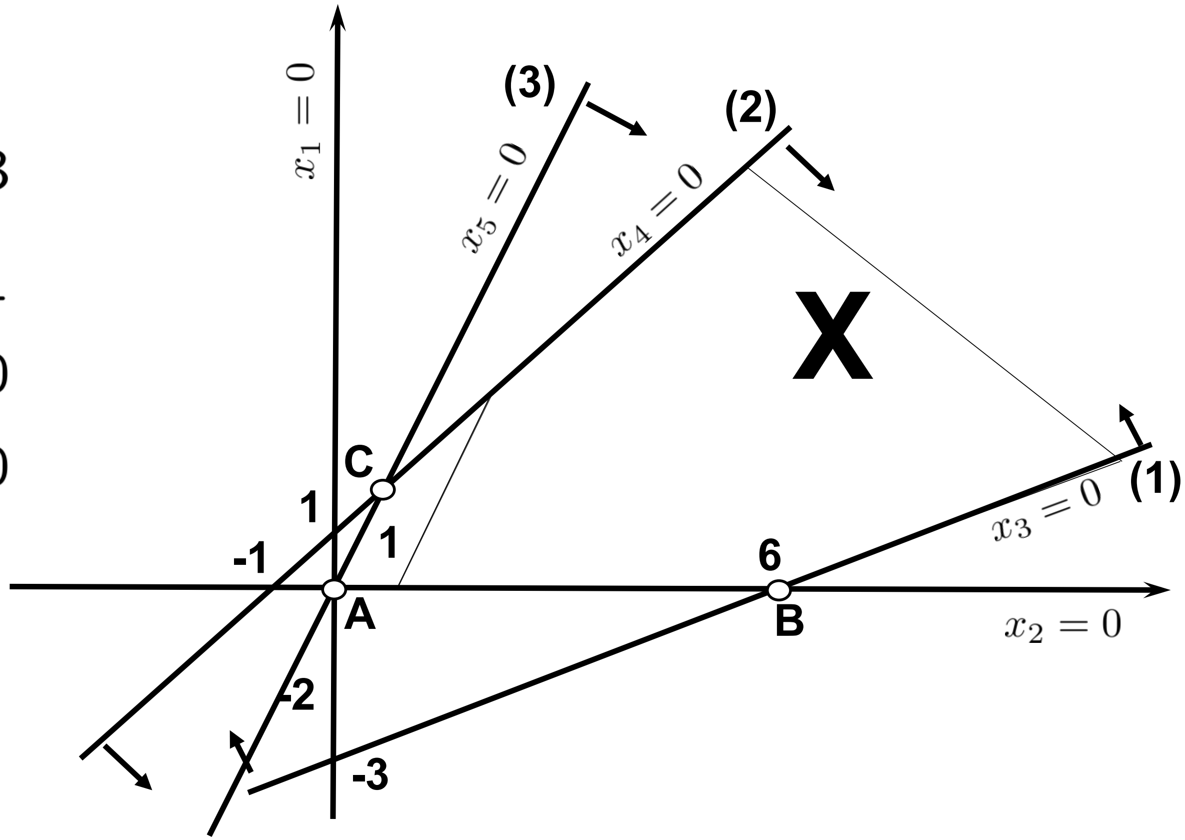
Quali sono le basi associate al punto A?

B_1={3,4,5}, B_2={2,3,4}, B_3={1,3,4}

Verificare algebricamente che x_{B_1} è una soluzione di base ammissibile degenere.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 &= 3\\
&(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 &= 1\\
&(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 &= 0\\
&(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$



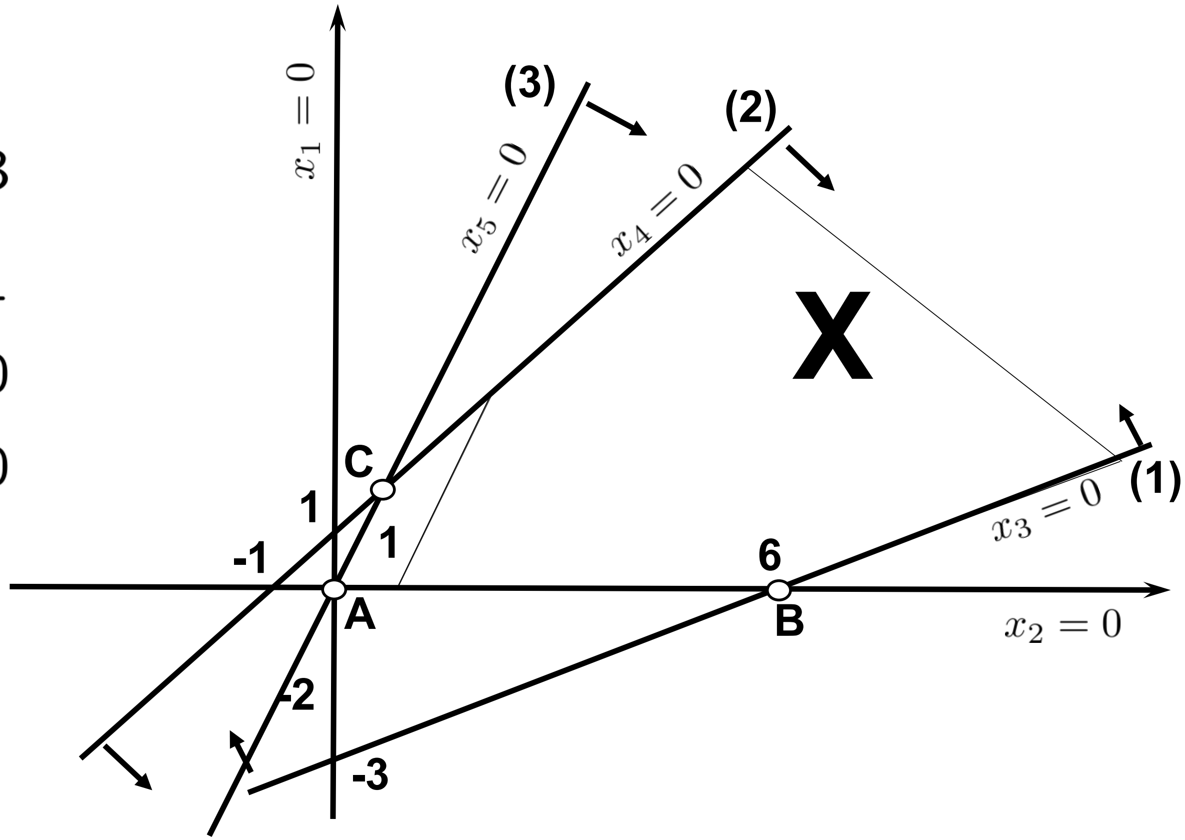
B_1={3,4,5}

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{B_1} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = A_{B_1}^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \quad = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 \quad = 0 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



B_2={2,3,4}, B_3={1,3,4}

Verificare algebricamente che x_{B_2} e x_{B_3} sono soluzioni di base ammissibile degeneri.

I seguenti vettori sono soluzioni di base ammissibili per il problema dato?

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
&(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
&(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 = 0 \\
&(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio: Pianificazione della produzione (formulazione)

Un’industria fabbrica 4 tipi di prodotti, **P1**, **P2**, **P3**, **P4**, la cui lavorazione è affidata a due reparti dell’industria: il reparto produzione e il reparto confezionamento. Per ottenere i prodotti pronti per la vendita è necessaria naturalmente la lavorazione in entrambi i reparti. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di prodotto i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di prodotto pronto per la vendita.

	P1	**P2**	**P3**	**P4**
Reparto produzione	2	1.5	0.5	2.5
Reparto confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

ciascuna tonnellata di prodotto dà i seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata)

	P1	**P2**	**P3**	**P4**
Profitto	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di prodotto in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che ogni settimana, il reparto produzione e il reparto confezionamento hanno una capacità lavorativa massima rispettivamente di 100 e 50 ore.

Variabili di decisione.

E’ naturale introdurre le variabili reali $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$ rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto **P1**, **P2**, **P3**, **P4** da fabbricare in una settimana.

Funzione Obiettivo.

Ciascuna tonnellata di prodotto contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà:

$$\text{Max } 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$$

Vincoli.

Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica (risorsa «scarsa») limita i valori che possono assumere le variabili; infatti si ha una capacità massima lavorativa in ore settimanali di ciascun reparto. In particolare per il reparto produzione si hanno a disposizione al più 100 ore settimanali e poiché ogni tonnellata di prodotto **P1** utilizza il reparto produzione per 2 ore, ogni tonnellata di prodotto **P2** utilizza il reparto produzione per 1.5 ore e così via per gli altri tipi di prodotti si dovrà avere:

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100$$

Ragionando in modo analogo per il reparto confezionamento si ottiene:

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50$$

Vincolo di non negatività delle variabili:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

La formulazione finale quindi può essere scritta in questa forma:

$\max 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$

$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100$ (utilizzo reparto produzione)

$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50$ (utilizzo reparto confezion.)

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

Consideriamo ulteriori richieste (vincoli):

1. **P1** non può utilizzare per più di 20 ore settimanali il reparto di produzione.
2. La produzione di **P2** non può superare quella di **P3**.
3. **P4** può utilizzare complessivamente 30 ore settimanali di lavorazione (tra il reparto di produzione e quello di confezionamento).
4. La produzione di **P1** non può superare il doppio della produzione di **P2** e **P3**.

1. **P1** non può utilizzare per più di 20 ore settimanali il reparto di produzione:

$$2x_1 \leq 20 \iff x_1 \leq 10$$

2. La produzione di **P2** non può superare quella di **P3**:

$$x_2 \leq x_3$$

3. **P4** può utilizzare complessivamente 30 ore settimanali di lavorazione:

$$2.5x_4 + x_4 \leq 30 \iff 3.5x_4 \leq 30$$

4. La produzione di **P1** non può superare il doppio della produzione di **P2** e **P3**:

$$x_1 \leq 2 * (x_2+x_3)$$

Esempio 2:
Una azienda automobilistica produce tre diversi modelli di autovettura:

un modello economico, uno normale ed uno di lusso. Ogni autovettura viene lavorata da tre robot: **A**, **B** e **C**. I tempi necessari alla lavorazione sono riportati, in minuti, nella tabella seguente insieme al profitto netto realizzato per autovettura

	Economica	**Normale**	**Lusso**
A	20	30	62
B	31	42	51
C	16	81	10
Prezzo	1000	1500	2200

I robot **A** e **B** sono disponibili per 8 ore al giorno mentre il robot **C** è disponibile per 5 ore al giorno. Il numero di autovetture di lusso prodotte non deve superare il 20% del totale mentre il numero di autovetture economiche deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva. Supponendo che tutte le autovetture prodotte vengano vendute, formulare un problema di Programmazione Lineare che permetta di decidere le quantità giornaliere (non necessariamente intere) da produrre per ciascun modello in modo tale da massimizzare i profitti rispettando i vincoli di produzione.

Variabili decisionali: x_1, x_2, x_3

Funzione obiettivo:

Max $1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3$

i vincoli sulla capacità produttiva; poiché il robot **A** è disponibile giornalmente

per 8 ore, cioè per 480 minuti si ha il vincolo

$$20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480.$$

Ragionando in modo analogo si ottengono i vincoli relativi alla disponibilità dei robot **B** e **C**, e quindi si ottengono i seguenti vincoli:

$$31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480$$

$$16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300$$

i vincoli sul numero totale dei singoli tipi di autovetture da fabbricate giornalmente che possono essere scritti nella forma

$$x_3 \leq 0.2\ (x_1 + x_2 + x_3)$$

Continuo del modello:

$x_1 \geq 0.4\ (x_1 + x_2 + x_3)$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

Quindi la formulazione completa può essere scritta:

$$
\begin{aligned}
&\max\ (1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3)\\
&20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480\\
&31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480\\
&16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300\\
&x_3 \leq 0.2\ (x_1 + x_2 + x_3)\\
&x_1 \geq 0.4\ (x_1 + x_2 + x_3)\\
&x_1 \geq 0\ \ x_2 \geq 0\ \ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$