

Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 9

- Matrice di base.
- Soluzioni di base ammissibili.
- Relazione tra vertici di un poliedro e soluzioni basiche.
- Teorema fondamentale della PL.

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Soluzione Algebrica dei problemi di PL

Consideriamo un problema di PL in **Forma Standard**

$$\min z = \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \quad (2)$$

$$\underline{x} \in R^n$$

Poiché $m = \text{rango}(A)$ ed $m < n$, si può partizionare A come

$$A = [A_B \mid A_N]$$

dove:

- A_B è una matrice non singolare $m \times m$ ($\det(A_B) \neq 0$)
- A_N è una matrice $m \times (n-m)$

La matrice A_B è composta da m colonne linearmente indipendenti di A . Tali colonne (viste come vettori) sono quindi una base nello spazio vettoriale ad m dimensioni delle colonne di A .

La matrice A_B è detta **Matrice di Base (Base)**

In corrispondenza di una scelta di A_B ed A_N si può partizionare anche il vettore delle \underline{x} :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} \begin{array}{l} m \text{ componenti} \\ n - m \text{ componenti} \end{array}$$

\underline{x}_B è detto **Vettore delle Variabili in Base (Vettore di Base)**

\underline{x}_N è detto **Vettore delle Variabili fuori Base**

Il sistema di equazioni lineari $A\underline{x}=\underline{b}$ si può riscrivere come

$$A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b} \rightarrow A_B \underline{x}_B = \underline{b} - A_N \underline{x}_N \rightarrow \underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Una soluzione del sistema di equazioni (1) corrisponde a determinare il valore per m variabili (\underline{x}_B) avendo fissato arbitrariamente il valore per le restanti $n-m$ variabili (\underline{x}_N)

Una scelta particolarmente importante è porre $\underline{x}_N = \underline{0}$
da cui si ottiene

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} \underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{Soluzione di Base}$$

Se $\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} \geq \underline{0}$

si ottiene una **Soluzione di Base Ammissibile.**

Le soluzioni di base sono importanti poichè vale il seguente teorema

3. Teorema (no dim.)

Dato $X = \{\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ insieme convesso, dove A è una matrice $m \times n$ di rango m con $m < n$,
 \underline{x}_e è un punto estremo di X se e solo se \underline{x}_e è una soluzione di base ammissibile.

- La ricerca delle soluzioni di un problema di PL si può effettuare esaminando solamente un numero finito di soluzioni corrispondenti alle soluzioni di base associate al poliedro dei vincoli.
- In generale, a ciascuna matrice di base B (ammissibile) corrisponde una sola soluzione di base (ammissibile).
- Viceversa, ad una soluzione di base (ammissibile) possono corrispondere più matrici di base. Questi casi sono associati a soluzioni dette **degeneri**, ovvero soluzioni per cui qualche componente del vettore di base \underline{x}_B risulta nullo.

Un esempio:

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 \quad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0 \quad (2)$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 21 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

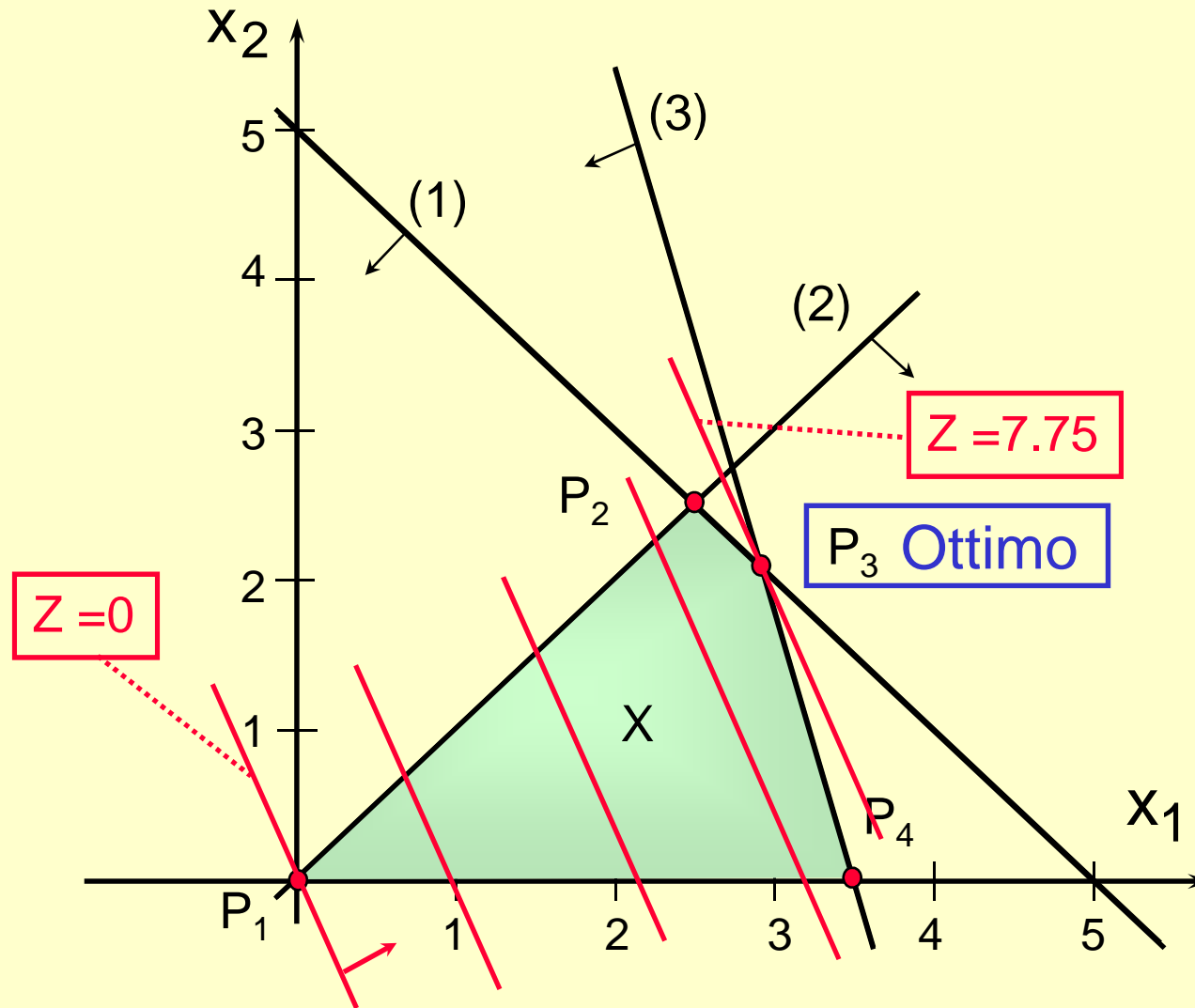
$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 \quad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0 \quad (2)$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 21 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$



Trasformazione dei problemi in forma standard.

↓ Vincoli \leq

Si introducono variabili ausiliarie positive dette

Variabili di Slack (scarto):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i \quad s_i \geq 0$$

↓ Vincoli \geq

Si introducono variabili ausiliarie positive dette

Variabili di Surplus (eccedenza):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i \quad s_i \geq 0$$

↓ Variabili non vincolate in segno (variabili libere)

Si sostituisce la variabile libera con due variabili ausiliarie positive (il problema diventa ad $n+1$ variabili):

$$x_j \text{ libera} \rightarrow x_j = u_j - v_j \quad \text{con } u_j \geq 0 \quad v_j \geq 0$$

↓ Termini noti dei vincoli negativi

Si moltiplicano entrambe i membri per -1 e si cambia il verso della disuguaglianza

↓ Problema di massimo

Si trasforma il problema in minimo moltiplicando per -1 la funzione obiettivo.

Il problema trasformato
in forma standard

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 21$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$-\min \quad z = -2x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

- Il massimo numero di possibili basi corrisponde al numero di possibili estrazioni di m colonne su n colonne di A :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Nell' esempio $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

- In generale, non tutte le possibili sottomatrici $m \times m$ sono non-singolari (quindi invertibili). Inoltre, non tutte le matrici di base danno luogo a soluzioni ammissibili (ossia, positive).
- Per questo motivo il numero delle possibili combinazioni corrisponde ad un limite superiore.

Nell'esempio solo 6 combinazioni danno luogo a basi ammissibili, vediamo quali:

$$-\min z = -2x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

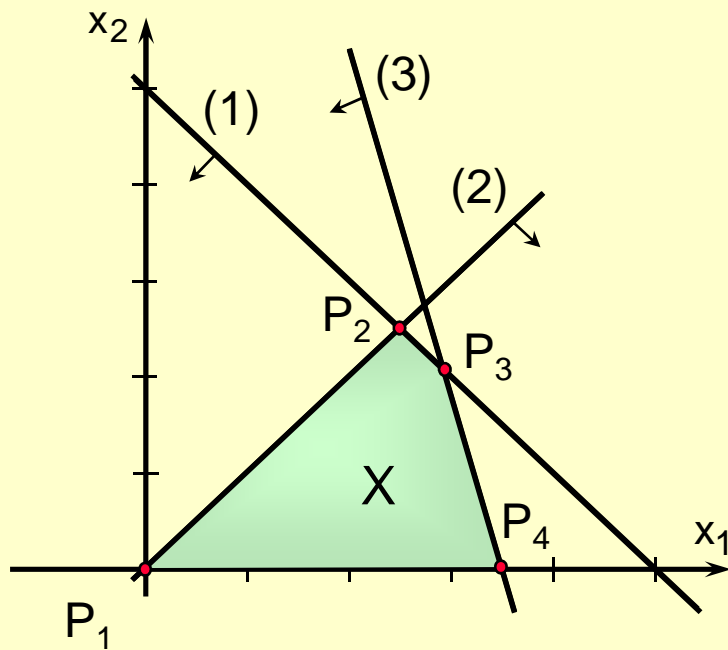
$$A = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_{B_1} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_{B_2} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_{B_3} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

...



$$-\min \quad z = -2x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \quad (1)$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 0 \quad (2)$$

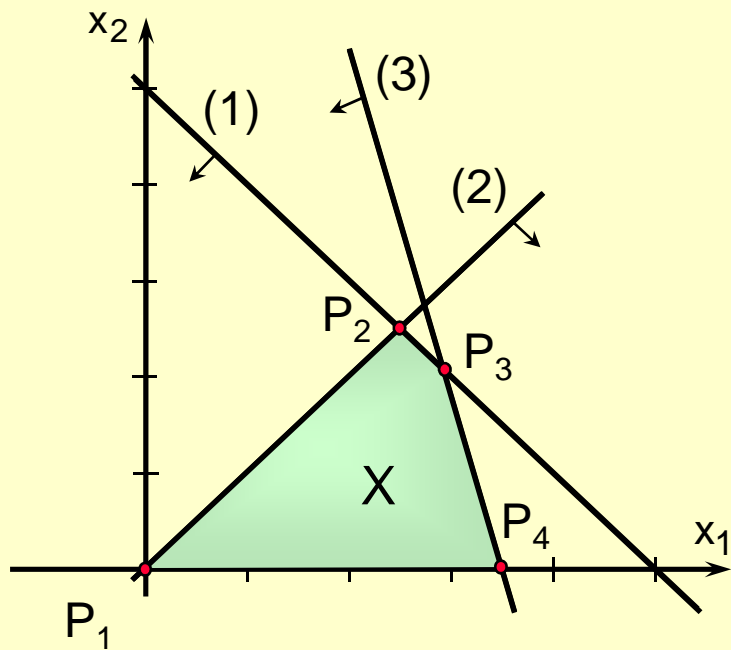
$$6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \quad (3)$$

$$x_i \geq 0$$

$$\underline{x}_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad A_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 \\ 3/2 & 0 & -1/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_{B_2}^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 \\ 3/2 & 0 & -1/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/4 \\ 9/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_3$$



$$-\min \quad z = -2x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \quad (1)$$

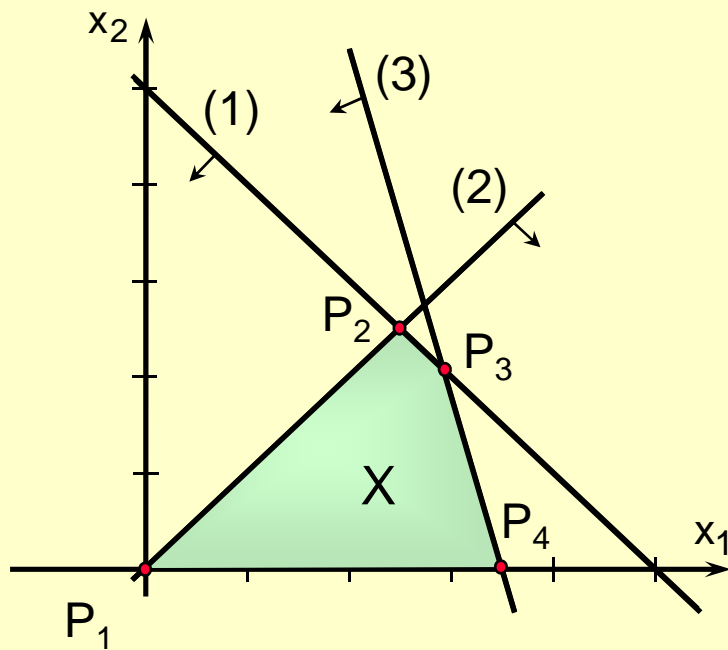
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 0 \quad (2)$$

$$6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \quad (3)$$

$$x_i \geq 0$$

$$\underline{x}_{B_3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2$$

$$\underline{x}_{B_4} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \\ 7/2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_4$$



$$-\min \quad z = -2x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \quad (1)$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 0 \quad (2)$$

$$6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \quad (3)$$

$$x_i \geq 0$$

$$\underline{x}_{B_5} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underline{x}_{B_6} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underline{x}_{B_7} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1$$

(soluzioni degeneri)

Dalla corrispondenza delle soluzioni di base ammissibili con i punti estremi del poliedro X deriva il seguente teorema.

4. Teorema Fondamentale della PL

Dato un problema di PL in forma standard:

$$\min \quad z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

dove A è una matrice $m \times n$ con $\text{rango}(A) = m$ ed $m < n$, allora:

1. esiste una soluzione ammissibile \Leftrightarrow esiste una soluzione ammissibile di base
2. esiste una soluzione ottima finita \Leftrightarrow esiste una soluzione ottima finita che è anche di base

- Poiché il massimo numero di possibili basi di un problema di PL è finito, tali problemi hanno una struttura discreta.
- I problemi di ottimizzazione corrispondenti alla selezione tra un numero finito di alternative si dicono problemi combinatorici.
- La PL è quindi un problema combinatorico.

- Un possibile algoritmo per determinare la soluzione ottima potrebbe consistere nella generazione esplicita di tutte le soluzioni ammissibili di base, quindi nella scelta di quella soluzione che rende massimo l'obiettivo.
- Tale strategia non è conveniente poiché il numero massimo delle possibili basi cresce in maniera esponenziale col crescere delle dimensioni del problema (numero di variabili e vincoli).
- Algoritmi che richiedono in generale un numero di passi che cresce in maniera esponenziale con le dimensioni del problema non sono efficienti.