

Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

Lezione n° 3

Richiami di Algebra vettoriale:

- Matrici ed Operazioni tra matrici
- Inversa di una matrice
- Risoluzione di un sistema di equazioni lineari
- Metodo di Gauss- Jordan

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Matrici

Definizione (Matrice): Prende il nome di matrice di ordine $m \times n$ una tabella di elementi ordinatamente disposti su m righe ed n colonne.

Notazione: Indicheremo le matrici con lettere maiuscole **A**, **B**,.... o per esteso con la seguente notazione:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Matrici: Notazione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A è una matrice (3x4)

num. di righe

num. di colonne

generico elemento a_{ij}
della matrice nella riga
 i e nella colonna j



$$A = \{ a_{ij} \}$$

$m \times n$

Matrici: Notazione

$$A = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 4 & 5 & 2 \end{matrix} & \underline{a}^1 \\ \begin{matrix} 2 & 7 & 2 & 3 \end{matrix} & \underline{a}^2 \\ \begin{matrix} 3 & 3 & 3 & 1 \end{matrix} & \underline{a}^3 \\ \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{a}_4 \end{matrix}$$

A si può indicare anche come insieme di vettori riga:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{pmatrix}$$

Oppure come insieme di vettori colonna:

$$A = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$$

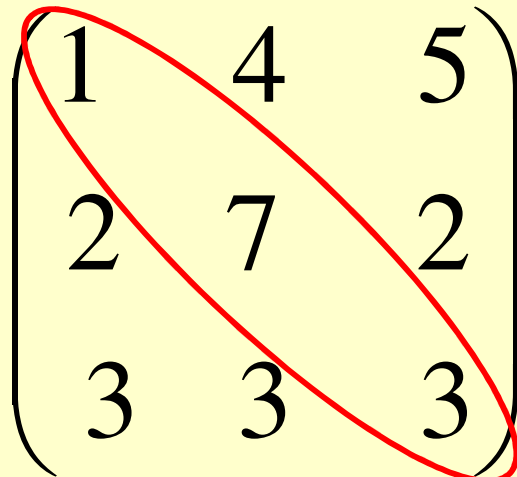
Matrici

- Se $m \neq n$ la matrice si dice **rettangolare**; si dice **quadrata** se $m=n$.
- In una matrice quadrata di ordine n gli elementi a_{ii} ($i=1, \dots, n$) costituiscono la **diagonale principale**.

matrice rettangolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

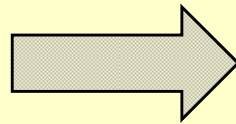
matrice quadrata

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$


Moltiplicazione per uno scalare

$$A = \{ a_{ij} \}$$

$m \times n$



$$k A = \{ k a_{ij} \}$$

k scalare

matrice ($m \times n$)

Esempio

$$k = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$kA = 2 * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 & 4 \\ 4 & 14 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Addizione tra matrici

$$A = \begin{matrix} & \{ a_{ij} \} \\ m \times n \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \{ b_{ij} \} \\ m \times n \end{matrix}$$

$$A + B = C \quad \longrightarrow \quad C = \begin{matrix} & \{ c_{ij} \} \\ m \times n \end{matrix}$$

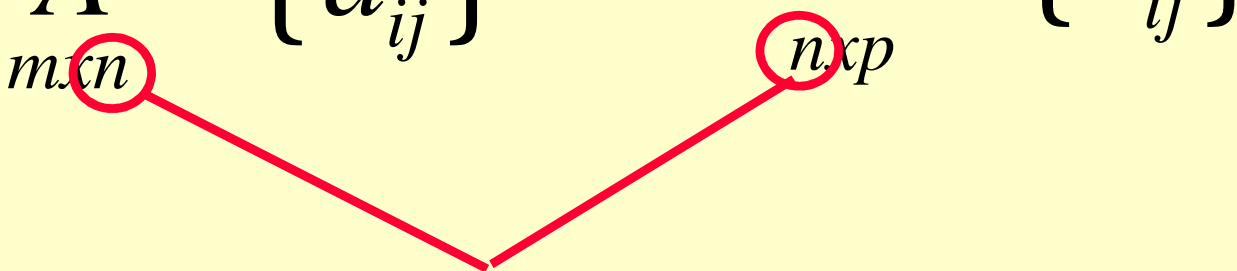
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Condizione necessaria: le matrici devono avere le stesse dimensioni

Esempio:

$$A = \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 \times 2 \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 \times 2 \end{matrix} \quad A + B = \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ 2 \times 2 \end{matrix}$$

Moltiplicazione tra matrici

$$A = \{a_{ij}\} \quad B = \{b_{ij}\}$$


Condizione necessaria

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Ciascun elemento di C è il prodotto interno di una riga di A ed una colonna di B

$$\forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Moltiplicazione tra matrici

Esempio

$$A = \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right\} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} 3 \times 2 \\ \left\{ \begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right\} \end{matrix}$$

$$C = AB = \begin{matrix} 3 \times 2 \\ \left\{ \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 19 & 5 \\ 11 & 1 \end{array} \right\} \end{matrix}$$

Moltiplicazione tra matrici

Da ricordare: $A = \begin{Bmatrix} a_{ij} \end{Bmatrix}_{m \times n}$ $B = \begin{Bmatrix} b_{ij} \end{Bmatrix}_{q \times p}$

1. Il prodotto AB è definito solo se $n=q$. AB è allora una matrice $m \times p$
2. Il prodotto BA è definito solo se $m=p$. BA è allora una matrice $q \times n$
3. NON necessariamente vale la proprietà **COMMUTATIVA**

$$A_{2 \times 2} = \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} \quad B_{2 \times 2} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad AB \neq BA$$

Alcune matrici particolari

$$I_{nxn} = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

Matrice Identita'

$$A I = A$$

mxn nxn

$$I A = A$$

mxm mxn

$$A_{nxn} = \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{array} \right\}$$

Matrice Triangolare
superiore

Trasposta di una matrice

Data una matrice $A = \{ a_{ij} \}$ ($m \times n$), la sua matrice TRASPOSTA A^t è una matrice ($n \times m$) ottenuta invertendo le righe con le colonne:

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trasposta di una matrice

Proprietà

1. $(A^T)^T = A$

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ (quando la somma è definita)

3. $(AB)^T = B^T A^T$ (quando il prodotto è definito)

Matrici partizionate

Una matrice A ($m \times n$) possiamo anche vederla *partizionata* in sottomatrici.

$$A_{4 \times 4} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Bmatrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Bmatrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$$

hanno dimensione 3×2

hanno dimensione 1×2

Operazioni elementari

Data una matrice A ($m \times n$) è possibile definire alcune operazioni sulle righe e sulle colonne utili a risolvere un sistema di equazioni lineari.

Operazioni elementari sulle righe (colonne) di una matrice sono:

- **SCAMBIO**: scambio della riga i con la riga j
- **MOLTIPLICAZIONE**: moltiplicazione di una riga per uno scalare (diverso da zero).
- **SOSTITUZIONE**: sostituzione della riga i con la somma della riga i e della riga j moltiplicata per uno scalare

Inversa di una matrice

Sia A una matrice quadrata, se esiste B matrice quadrata tale che

$$AB = I$$

$$BA = I$$

B è detta matrice inversa di A

Ricorda:

- l'inversa di una matrice A (se esiste) è UNICA ed è indicata con A^{-1}
- se una matrice ammette l'inversa allora è detta matrice NON SINGOLARE
- una matrice è non singolare se e solo se le righe sono linearmente indipendenti o equivalentemente se e solo se le colonne sono linearmente indipendenti

Calcolo dell'inversa di una matrice

L'inversa di una matrice quadrata A può essere calcolata attraverso un numero finito di operazioni elementari nel seguente modo:

1. Si considera la nuova matrice (A, I)

2. Si effettuano una serie di operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di questa nuova matrice in modo tale che:

A diventa la matrice identità I

I diventa la matrice inversa A^{-1}

Calcolo dell'inversa di una matrice esempio (1/3)

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

Considero la nuova matrice

Divido la prima riga per 2.

Aggiungo la nuova riga ottenuta
alla seconda.

Sottraggo la riga ottenuta dalla
terza

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice esempio (2/3)

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

Moltiplico la seconda riga per $2/5$.

Moltiplico la nuova riga ottenuta per $-1/2$ e la aggiungo alla prima riga.

Moltiplico la nuova riga ottenuta per $3/2$ e la aggiungo alla terza riga.

Calcolo dell'inversa di una matrice

Esempio (3/3)

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} & -\frac{3}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \end{array} \right\}$$

Moltiplico la terza riga per $5/12$.

Moltiplico la nuova riga ottenuta per $-3/5$ e la aggiungo alla seconda riga.

Moltiplico la nuova riga ottenuta per $-1/5$ e la aggiungo alla prima riga.

Quindi l'inversa in questo caso esiste

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij})) \quad \text{fissata una riga } i$$

$i = 1$
→

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{minor}(A_{11})$

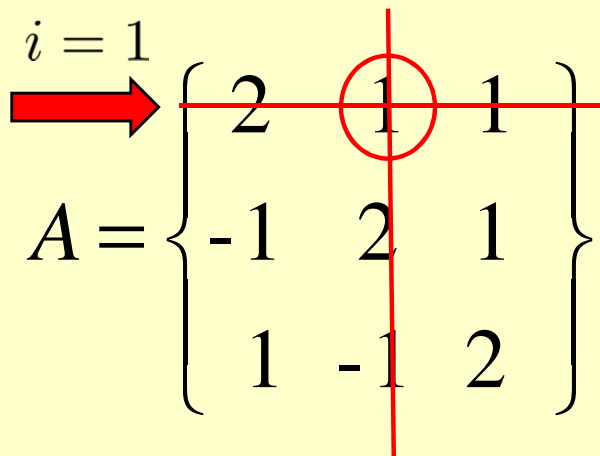
$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} +$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij})) \quad \text{fissata una riga } i$$

$$i = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

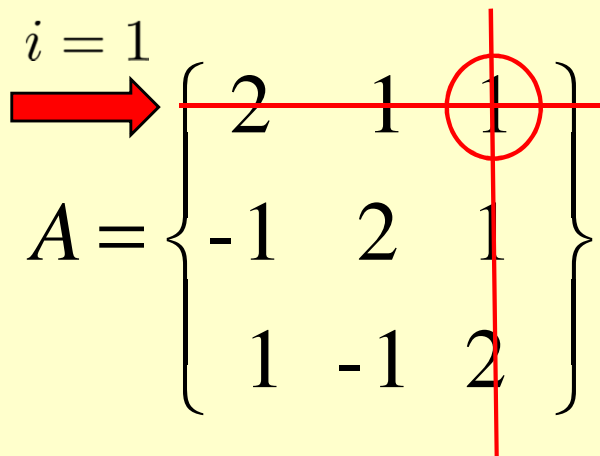
$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij})) \quad \text{fissata una riga } i$$

$$i = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = 12 \end{aligned}$$

Matrice trasposta dei cofattori

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij}))$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\det(A) = 12$$

$$\text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij}))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \det(\text{minor}(A_{11})) = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\det(A) = 12$$

$$\text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij}))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \det(\text{minor}(A_{11})) = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} 5/12 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\det(A) = 12$$

$$\text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij}))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \det(\text{minor}(A_{21})) = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} 5/12 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\det(A) = 12$$

$$\text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij}))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \det(\text{minor}(A_{21})) = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

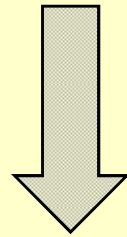
$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} 5/12 & -3/12 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Rango di una matrice

Rango di riga: numero massimo di righe lin. indipendenti

Rango di colonna: numero massimo di colonne lin. indipendenti

Teorema: Rango di riga = Rango di colonna



$$\text{Rango } (A) \leq \min (m,n)$$

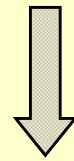
Se $\text{rango } (A) = \min (m,n)$ A è una matrice a rango pieno

Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari (1/2)

Cercare una soluzione ad un sistema di equazioni lineari

$$\underset{m \times n}{A} \underline{x} = \underline{b}$$

Significa cercare quei valori x_1, x_2, \dots, x_n tali che il vettore b può essere espresso come combinazione lineare delle colonne della matrice.



Per la soluzione di un sistema di equazioni lineari valgono le seguenti:

1. $\text{Rango}(A, b) > \text{Rango}(A) \Rightarrow$ il sistema non ha soluzione
2. $\text{Rango}(A, b) = \text{Rango}(A) \Rightarrow$ il sistema ha soluzione

Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari (2/2)

$$\text{Rango}(A,b) = \text{Rango}(A)$$

$m > n$:

$$\text{Rango}(A) \leq \min(m,n) \Rightarrow \text{Rango}(A) \leq n < m$$

Se $\text{Rango}(A) = n \Rightarrow$ il sistema ha soluzione unica

Se $\text{Rango}(A) < n \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

$m < n$:

$$\text{Rango}(A) \leq \min(m,n) \Rightarrow \text{Rango}(A) \leq m < n$$

Se $\text{Rango}(A) = m \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

Se $\text{Rango}(A) < m \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

$m = n$:

$$\text{Rango}(A) \leq \min(m,n) \Rightarrow \text{Rango}(A) \leq n = m$$

Se $\text{Rango}(A) = n \Rightarrow$ il sistema ha soluzione unica

Se $\text{Rango}(A) < n \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

Risolvere un sistema di equaz. Lineari attraverso operazioni elementari

Dato un sistema di m equazioni lineari ed n incognite



è equivalente al sistema:

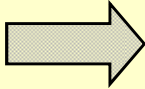
$$A' \underline{x} = \underline{b}'$$

dove la matrice (A', \underline{b}') è ottenuta da (A, \underline{b})

attraverso un numero finito di operazioni elementari

Risolvere un sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti ha rango $= 3 < 4$  il sistema ha infinite soluzioni

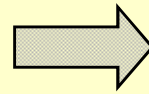
Metodo di Gauss-Jordan:

ridurre la matrice dei coefficienti ad una matrice triangolare superiore attraverso un numero finito di operazioni elementari

Risolvere un sistema di equazioni lineari

Metodo di Gauss-Jordan

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$



$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\}$$

Aggiungi la prima riga alla seconda riga.

$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\}$$

Dividi la seconda riga per 4.
Sottrai la nuova riga ottenuta alla terza riga.

$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2 \end{array} \right\}$$

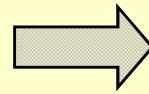
Risolvere un sistema di equazioni lineari

Metodo di Gauss-Jordan

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

$$x_2 + x_3 = 2$$



$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2 \end{array} \right\}$$

infinite soluzioni al sistema:

$$x_4 = \lambda$$

$$x_3 = -2 - \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_2 = 4 + \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_1 = 10 + 2\lambda - 2x_2 - x_3 = 4 + \frac{7}{4}\lambda$$

ESERCIZI

1. Dati i seguenti vettori $A=(4,1,2)$, $B=(7, -8, 0)$, $C=(4, 1, 3)$ determinare un nuovo vettore D che risulti combinazione lineare dei tre vettori dati.
2. Dare la definizione di lineare indipendenza e lineare dipendenza tra vettori in R^n . Fornire un esempio di vettori in R^3 linearmente indipendenti e vettori in R^3 linearmente dipendenti.
3. Dati i seguenti vettori in R^3 : $A = (1, 3, -4)$, $B = (0, 3, 2)$, $C = (1, 0, 1)$:
 - Si verifichi se i vettori dati costituiscono una base per lo spazio;
 - Si determini un nuovo vettore ottenuto come combinazione convessa dei tre vettori dati.