Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

Lezione n° 3

Richiami di Algebra vettoriale:

- Matrici ed Operazioni tra matrici
- Inversa di una matrice
- Risoluzione di un sistema di equazioni lineari
- Metodo di Gauss- Jordan

Prof. Cerulli – Dott.ssa Gentili – Dott. Carrabs

Matrici

Definizione (Matrice): Prende il nome di matrice di ordine *mxn* una tabella di elementi ordinatamente disposti su *m* righe ed *n* colonne.

Notazione: Indicheremo le matrici con lettere maiuscole **A, B**,…. o per esteso con la seguente notazione:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Matrici: Notazione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A è una matrice (3x4)

num. di righe

num. di colonne

generico elemento a_{ij} della matrice nella riga *i* e nella colonna *j*

$$\Rightarrow \quad \underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\}$$

Matrici: Notazione

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{a}_4 \end{array} & \end{array}$$

A si può indicare anche come insieme di vettori riga:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{pmatrix}$$

Oppure come insieme di vettori colonna:

$$A=(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$$

Matrici

- Se $m \neq n$ la matrice si dice rettangolare; si dice quadrata se m=n.

- In una matrice quadrata di ordine n gli elementi a_{ii} ($i=1,\ldots n$) costituiscono la diagonale principale.

matrice rettangolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice quadrata

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Moltiplicazione per uno scalare

$$\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\} \quad \Rightarrow \quad k\,A = \{k a_{ij}\}$$

k *scalare* *matrice (mxn)*

Esempio

$$k = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$kA = 2 * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 & 4 \\ 4 & 14 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Addizione tra matrici

$$\underset{mxn}{A} = \left\{ a_{ij} \right\} \qquad \underset{mxn}{B} = \left\{ b_{ij} \right\}$$

$$A + B = C \quad \Rightarrow \quad \underset{mxn}{C} = \left\{ c_{ij} \right\}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i = 1,\ldots,m \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

Condizione necessaria: le matrici devono avere le stesse dimensioni

Esempio:

$$\underset{2x2}{A} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\} \quad \underset{2x2}{B} = \left\{ \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\} \qquad \underset{2x2}{A+B} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\}$$

Moltiplicazione tra matrici

$$\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\} \qquad \underset{nxp}{B} = \{b_{ij}\}$$

Condizione necessaria

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Ciascun elemento di C è il prodotto interno di una riga di A ed una colonna di B

$$\forall i = 1,\ldots,m \quad \forall j = 1,\ldots,p$$

Moltiplicazione tra matrici

Esempio

$$\underset{3x3}{A} = \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad \underset{3x2}{B} = \begin{Bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{3x2}{C} = AB = \begin{Bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 5 \\ 11 & 1 \end{Bmatrix}$$

Moltiplicazione tra matrici

Da ricordare: $\underset{mxn}{A} = \{a_{ij}\}$ $\underset{qxp}{B} = \{b_{ij}\}$

1. Il prodotto AB è definito solo se *n=q*. AB è allora una matrice *mxp*

2. Il prodotto BA è definito solo se *m=p*. BA è allora una matrice *qxn*

3. NON <u>necessariamente</u> vale la proprietà COMMUTATIVA

$$\underset{2x2}{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} \quad \underset{2x2}{B} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

Alcune matrici particolari

$$\underset{nxn}{I} = \left\{ \begin{array}{l} 1\ 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ 1 \ldots 0 \\ \quad \ldots. \\ 0\ 0\ 0 \ldots 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Matrice Identita'

$$\underset{mxn}{A}\ \underset{nxn}{I} = A$$

$$\underset{mxm}{I}\ \underset{mxn}{A} = A$$

$$\underset{nxn}{A} = \left\{ \begin{array}{llll} a_{11} & a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} & & \\ 0 & a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} & & \\ 0 & 0 & a_{33} \ldots a_{3n} & \\ & \ldots. & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a_{nn} \end{array} \right\}$$

Matrice Triangolare superiore

Trasposta di una matrice

Data una matrice A= { a_{ij} } (mxn), la sua matrice TRASPOSTA A^t è una matrice (nxm) ottenuta invertendo le righe con le colonne:

$$\underset{3x2}{A} = \begin{Bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underset{2x3}{A}^T = \begin{Bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Trasposta di una matrice

Proprietà

1. $(A^T)^T = A$

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ (quando la somma è definita)

3. $(AB)^T = B^T A^T$ (quando il prodotto è definito)

Matrici partizionate

Una matrice *A* (mxn) possiamo anche vederla *partizionata* in sottomatrici.

$$\underset{4x4}{A} = \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} A_{11} & & A_{12} \\ & \underset{4x4}{A} = \left\{ \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right\} & \\ A_{21} & & A_{22} \end{array}$$

$$\underset{4x4}{A} = \left\{ \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\}$$

A_{11} A_{12} hanno dimensione 3x2

A_{21} A_{22} hanno dimensione 1x2

Operazioni elementari

Data una matrice A (mxn) è possibile definire alcune operazioni sulle righe e sulle colonne utili a risolvere un sistema di equazioni lineari.

Operazioni elementari sulle righe (colonne) di una matrice sono:

- **SCAMBIO**: scambio della riga *i* con la riga *j*

- **MOLTIPLICAZIONE**: moltiplicazione di una riga per uno scalare (diverso da zero).

- **SOSTITUZIONE**: sostituzione della riga *i* con la somma della riga *i* e della riga *j* moltiplicata per uno scalare

Inversa di una matrice

Sia $\underset{nxn}{A}$ una matrice quadrata, se esiste $\underset{nxn}{B}$ matrice quadrata tale che

$$AB = I$$
$$BA = I$$

B è detta matrice inversa di A

Ricorda:

- l'inversa di una matrice A (se esiste) è UNICA ed è indicata con A^{-1}

- se una matrice ammette l'inversa allora è detta matrice NON SINGOLARE

- una matrice è non singolare se e solo se le rige sono linearmente indipendenti o equivalentemente se e solo se le colonne sono linermente indipendenti

Calcolo dell'inversa di una matrice

L'inversa di una matrice quadrata A può essere calcolata attraverso un numero finito di operazioni elementari nel seguente modo:

1. Si considera la nuova matrice (A,I)

2. Si effettuano una serie di operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di questa nuova matrice in modo tale che:

A diventa la matrice identità I

I diventa la matrice inversa A^{-1}

Calcolo dell'inversa di una matrice esempio (1/3)

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\}$$

Considero la nuova matrice

Divido la prima riga per 2.
Aggiungo la nuova riga ottenuta alla seconda.
Sottraggo la riga ottenuta dalla terza

$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right\}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice esempio (2/3)

$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right\}$$

Moltiplico la seconda riga per 2/5.
Moltiplico la nuova riga ottenuta per -1/2 e la aggiungo alla prima riga.
Moltiplico la nuova riga ottenuta per 3/2 e la aggiungo alla terza riga.

Calcolo dell'inversa di una matrice
Esempio (3/3)

$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} & -\frac{3}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \end{array}\right\}$$

Moltiplico la terza riga per 5/12.
Moltiplico la nuova riga ottenuta per -3/5 e la aggiungo alla seconda riga.
Moltiplico la nuova riga ottenuta per -1/5 e la aggiungo alla prima riga.

Quindi l'inversa in questo caso esiste

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(minor(A_{ij}))$ *fissata una riga i*

$i = 1$

$$A = \begin{Bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{-1} & 2 & 1 \\ \cancel{1} & -1 & 2 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad minor(A_{11})$$

$$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} +$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(minor(A_{ij}))$$ *fissata una riga i*

$$\begin{array}{rl} i = 1 & \\ & A = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(minor(A_{ij}))$ *fissata una riga i*

$i = 1$

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = 12$$

Matrice trasposta dei cofattori

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \dots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & \dots & cof(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \dots & cof(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot det(minor(A_{ij}))$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$det(A) = 12$$

$$cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot det(minor(A_{ij}))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \dots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & \dots & cof(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \dots & cof(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$cof(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot det(minor(A_{11})) = (-1)^2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$det(A) = 12$$

$$cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot det(minor(A_{ij}))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \dots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & \dots & cof(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \dots & cof(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$cof(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot det(minor(A_{11})) = (-1)^2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} 5/12 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$det(A) = 12$$

$$cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot det(minor(A_{ij}))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \dots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & \dots & cof(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \dots & cof(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$cof(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot det(minor(A_{21})) = (-1)^3 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} 5/12 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$det(A) = 12$$

$$cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot det(minor(A_{ij}))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \dots & cof(A_{n1}) \\ cof(A_{12}) & cof(A_{22}) & \dots & cof(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \dots & cof(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$cof(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot det(minor(A_{21})) = (-1)^3 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} 5/12 & -3/12 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Rango di una matrice

Rango di riga: numero massimo di righe lin. indipendenti

Rango di colonna: numero massimo di colonne lin. indipendenti

Teorema: Rango di riga = Rango di colonna

$$\text{Rango}(A) \le \min(m,n)$$

Se rango (A) = min (m,n) A è una matrice a rango pieno

Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari (1/2)

Cercare una soluzione ad un sistema di equazioni lineari

$$\underset{mxn}{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Significa cercare quei valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tali che il vettore *b* può essere espresso come combinazione lineare delle colonne della matrice.

$$\Downarrow$$

Per la soluzione di un sistema di equazioni lineari valgono le seguenti:

1. Rango(A,b) > Rango(A) $\Rightarrow$ il sistema non ha soluzione

2. Rango(A,b) = Rango(A) $\Rightarrow$ il sistema ha soluzione

Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari (2/2)

$\boxed{\text{Rango}(A,b) = \text{Rango}(A)}$

m>n :

Rango(A) ≤ min(m,n) ⇨ Rango(A) ≤ n <m

Se Rango(A) = $n \Rightarrow$ il sistema ha soluzione unica

Se Rango(A) < $n \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

m<n :

Rango(A) ≤ min(m,n) ⇨ Rango(A) ≤ m <n

Se Rango(A) = $m \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

Se Rango(A) < $m \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

m = n :

Rango(A) ≤ min(m,n) ⇨ Rango(A) ≤ n =m

Se Rango(A) = $n \Rightarrow$ il sistema ha soluzione unica

Se Rango(A) < $n \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

Risolvere un sistema di equaz. Lineari attraverso operazioni elementari

Dato un sistema di *m* equazioni lineari ed *n* incognite

$$A\,\underline{x} = \underline{b}$$

matrice dei coefficienti di dimensione *(mxn)*

Vettore delle incognite di dimensione *(nx1)*

vettore dei termini noti di dimensione *(mx1)*

è equivalente al sistema: $A'\,\underline{x} = \underline{b}'$

dove la matrice $(A', \underline{b}')$ è ottenuta da $(A, \underline{b})$

attraverso un numero finito di operazioni elementari

Risolvere un sistema di equazioni lineari

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\
x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

La matrice dei coefficienti ha rango =3 < 4 $\Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni

---

Metodo di Gauss-Jordan:

ridurre la matrice dei coefficienti ad una matrice triangolare superiore attraverso un numero finito di operazioni elementari

Risolvere un sistema di equazioni lineari

Metodo di Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\
x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\left\{ \begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\
-1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 2
\end{array} \right\}
$$

Aggiungi la prima riga alla seconda riga.

$$
\left\{ \begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\
0 & 4 & 0 & -1 & 16 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 2
\end{array} \right\}
$$

Dividi la seconda riga per 4.
Sottrai la nuova riga ottenuta alla terza riga.

$$
\left\{ \begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2
\end{array} \right\}
$$

Risolvere un sistema di equazioni lineari

Metodo di Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\
x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\left\{
\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2
\end{array}
\right\}
$$

infinite soluzioni al sistema:

$$x_4 = \lambda$$

$$x_3 = -2 - \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_2 = 4 + \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_1 = 10 + 2\lambda - 2x_2 - x_3 = 4 + \frac{7}{4}\lambda$$

ESERCIZI

1. Dati i seguenti vettori A=(4,1,2), B=(7, -8, 0), C=(4, 1, 3) determinare un nuovo vettore D che risulti combinazione lineare dei tre vettori dati.
2. Dare la definizione di lineare indipendenza e lineare dipendenza tra vettori in R^n. Fornire un esempio di vettori in R^3 linearmente indipendenti e vettori in R^3 linearmente dipendenti.
3. Dati i seguenti vettori in R^3: A = (1, 3, - 4), B = (0, 3, 2), C = (1 0 1):
   - Si verifichi se i vettori dati costituiscono una base per lo spazio;
   - Si determini un nuovo vettore ottenuto come combinazione convessa dei tre vettori dati.