

Lezioni di Ricerca Operativa

R.Cerulli – M.Gentili - F. Carrabs

Dipartimento di Matematica

(DM)

Università di Salerno

LA RICERCA OPERATIVA

- Si occupa dello sviluppo e dell'applicazione di metodi matematici per la soluzione di problemi di decisione che si presentano in molteplici e diversi settori della vita reale.
- Aiuta a determinare le decisioni da prendere per gestire nel modo più efficiente un sistema reale utilizzando strumenti matematici / informatici.

La Ricerca Operativa (Operations Research)

- Metodi matematici rivolti alla soluzione di problemi decisionali
- Nata durante la seconda guerra mondiale (gestione di risorse limitate e problemi logistici)
- Si è sviluppata grazie alla disponibilità di strumenti automatici di calcolo (computer)
- Scopo: determinare la decisione ottima dato un problema in presenza di risorse limitate

Esempi Applicativi

- Problemi in ambito industriale
- Problemi di progettazione ottima
- Problemi di organizzazione
- Problemi decisionali di tipo economico
- ...

Esempi Applicativi

- Problemi in ambito industriale

- *Pianificazione della produzione*

determinare i livelli di produzione e/o l'utilizzazione di risorse; ad es. allocazione ottima di risorse = distribuzione di risorse limitate tra alternative concorrenti in modo da minimizzare il costo o massimizzare il guadagno.

- *Localizzazione e dimensione degli impianti*

decidere dove installare impianti di produzione in modo da rifornire in modo ottimale aree distribuite su un territorio, ad es. dove costruire le stazioni base di una rete di telecomunicazioni (GSM/UMTS) e la potenza di trasmissione per coprire il territorio.

- *Controllo delle scorte:*

decidere quando e quanto, durante un processo produttivo, si devono immagazzinare prodotti in modo da rispettare le consegne minimizzando i costi.

- *Scheduling*

- ...

Esempi Applicativi

- Problemi di progettazione ottima

- *Progettazione di reti e loro gestione*

definire i collegamenti e dimensionare le capacità di una rete stradale, di telecomunicazione, di trasmissione dati, di circuiti, in modo da garantire il traffico tra le varie origini e destinazioni e minimizzare il costo complessivo

- *Progettazione strutturale*

definire il progetto di un edificio, in modo che resista al meglio a sollecitazioni derivanti da agenti esterni (terremoti, venti forti) oppure il progetto del profilo di un'ala di un aereo in modo che, ad esempio, sia massimizzata la portanza

- *VLSI design (allocazione ottima di componenti elettroniche)*

disegnare una piastra madre in modo che, ad esempio, siano minimizzate le lunghezze dei percorsi dei segnali elettrici

- ...

Esempi Applicativi

- Problemi di organizzazione
 - *Instradamento di veicoli (Routing)*
 - *Manutenzione dei beni*
 - *Definizione dei turni di lavoro*
 - *Gestione ottima di risorse idriche*
 - *Ottimizzazione di politiche di controllo*
 - *Gestione ottima di aree di carico/scarico*
 - *Problemi in reti di comunicazione e distribuzione*
 - *...*

Esempi Applicativi

- Problemi decisionali di tipo economico
 - *Allocazione di capitali*
 - *Acquisto/Produzione di beni*
 - *Scelta di investimenti*
 - *...*

La Ricerca Operativa (Operations Research)

- I problemi reali vengono affrontati definendone una rappresentazione quantitativa (modello matematico)
- La soluzione dei problemi è cercata per mezzo di tecniche (algoritmi) di ottimizzazione

Problema Reale



Formulazione



Modello matematico

$$\text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$x_1 + 3x_2 - \dots - 4x_n \leq 4$$

$$x_2 - 4x_3 + \dots + 2x_n \geq 1$$

.....

.....

Aspetto fondamentale della Ricerca Operativa:

Identificare un modello matematico con cui studiare in modo sistematico il problema decisionale

Approccio Modellistico

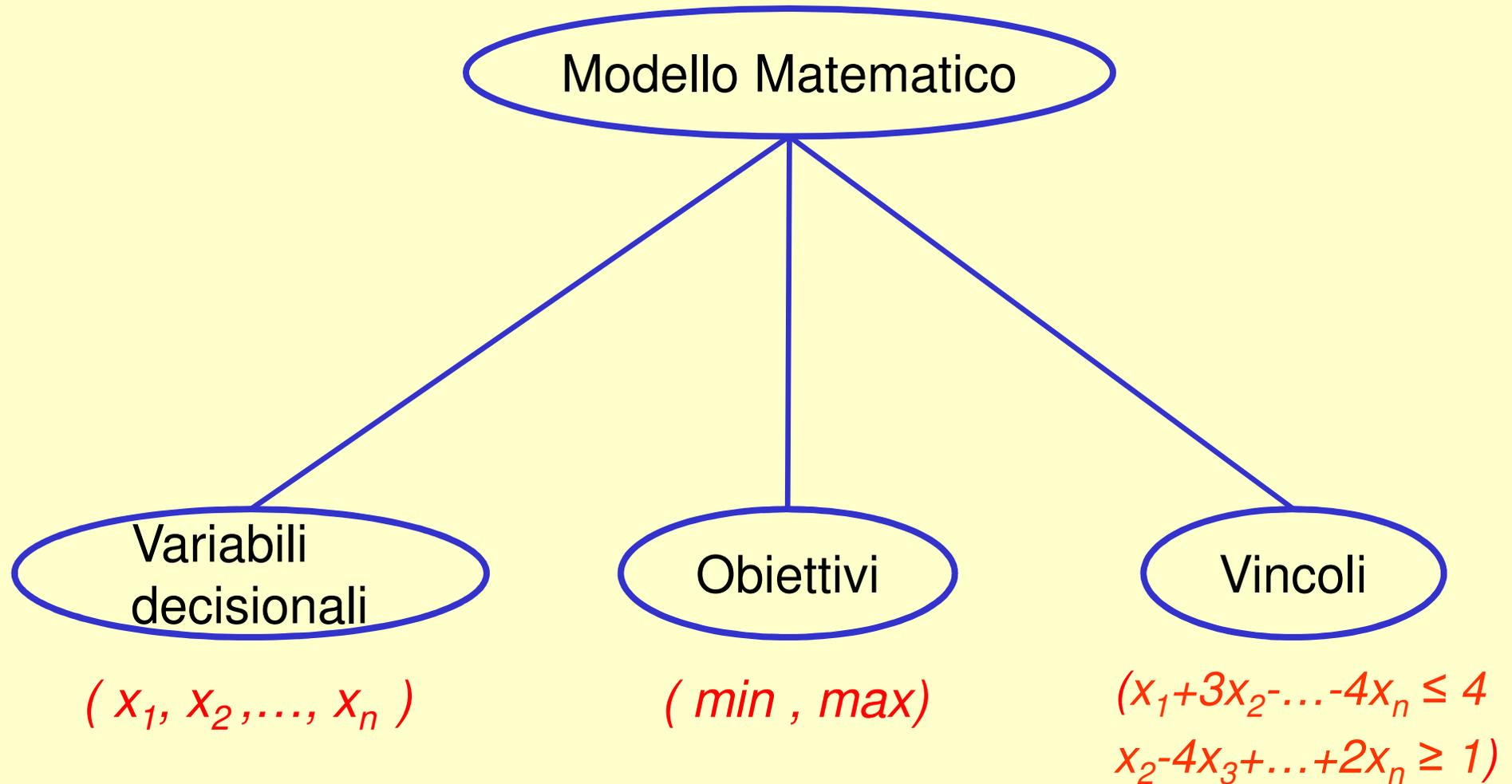
La costruzione di matematici per la soluzione di problemi reali avviene attraverso diverse fasi:

- Analisi del problema
- Costruzione del modello
- Analisi del modello
- Soluzione numerica
- Validazione del modello

Approccio Modellistico

- **Analisi del problema:** consiste nell'analisi della struttura del problema per individuare i legami logico funzionali e gli obiettivi.
- **Costruzione del modello:** si descrivono in termini matematici le caratteristiche principali del problema.
- **Analisi del modello:** prevede la deduzione per via analitica, in riferimento a determinate classi di problemi, di alcune importanti proprietà quali esistenza ed unicità della soluzione ottima, condizioni di ottimalità e stabilità in caso di variazioni.
- **Soluzione numerica:** si individua mediante opportuni algoritmi di calcolo la cui soluzione deve essere verificata dal punto di vista applicativo.
- **Validazione:** avviene attraverso una verifica sperimentale oppure con metodi di simulazione.

Struttura dei problemi decisionali



Formulazione dei problemi decisionali

- Decisione: processo di selezione tra più alternative
- Alternative finite o infinite
- Alternative definite esplicitamente o implicitamente
- Scelta sulla base di uno o più criteri (obiettivi)
- Condizioni di certezza e incertezza

Caratteristiche dei problemi che saranno considerati:

- *Condizioni di certezza (problemi deterministici)*
- *Presenza di un solo criterio (singolo obiettivo)*

Esempio

Supponiamo che Mario, Luca ed Andrea debbano effettuare tre lavori, ma non sappiano come organizzarsi. I tre lavori da fare sono:

- **stuccare** - **imbiancare** - **levigare**

Ognuno ha una diversa capacità nell' effettuare uno dei tre lavori:

	STUCCA	IMBIANCA	LEVIGA
MARIO	3	1	2
LUCA	2	1.5	1.5
ANDREA	3	1.5	3

Consideriamo tutte le possibili soluzioni

MARIO - STUCCA: 3
LUCA – IMBIANCA: 1.5
ANDREA – LEVIGA: 3

7.5

MARIO - LEVIGA:2
LUCA – STUCCA: 2
ANDREA–IMBIANCA:1.5

5.5

MARIO - STUCCA: 3
LUCA – LEVIGA: 1.5
ANDREA–IMBIANCA: 1.5

6

MARIO - LEVIGA: 2
LUCA – IMBIANCA: 1.5
ANDREA – STUCCA: 3

6.5

MARIO - IMBIANCA: 1
LUCA – STUCCA: 2
ANDREA – LEVIGA: 3

6

MARIO - IMBIANCA: 1
LUCA – LEVIGA: 1.5
ANDREA – STUCCA: 3

5.5

Algoritmi

- Per risolvere i problemi decisionali sono usati **algoritmi**
- Un algoritmo è una procedura iterativa costituita da un numero finito di passi
- Esistono problemi facili (pochi) e difficili
- La facilità di un problema è legata all'esistenza di un algoritmo di soluzione efficiente

Un esempio: Assegnare 70 lavori a 70 persone

- Si indichino con $i=1, \dots, 70$ i lavori e con $j=1, \dots, 70$ le persone.
- Se la i -esima persona esegue il j -esimo lavoro si paga un costo c_{ij} .
- Una persona può eseguire solo un lavoro (vincolo)
- Ogni lavoro deve essere eseguito (vincolo)
- Lo scopo (decisione) è stabilire chi fa che cosa in modo che il costo pagato sia minimo (obiettivo).

Un possibile algoritmo di soluzione (**Brute Force**):

- 1) costruire tutte le possibili assegnazioni persone-lavori e calcolarne il costo
- 2) scegliere l'assegnazione con il costo più piccolo

Le assegnazioni alternative sono **70!** (le permutazioni di 70 numeri)

1^a

Persone	1	2	...	70
Lavori	1	2	...	70

2^a

Persone	1	2	...	70
Lavori	2	1	...	70

...

Il numero delle assegnazioni alternative è molto grande

$$70! > 10^{100}$$

Si supponga di disporre di un calcolatore che è in grado di calcolare 10^6 assegnazioni alternative (soluzioni) al secondo.

Quanto impiega l' algoritmo a risolvere il problema?

Supponendo di dover "esplorare" 10^{100} assegnazioni sono necessari 10^{94} secondi.

In un anno ci sono:

$$365(\text{gg}) \times 24(\text{h}) \times 60(\text{min}) \times 60(\text{sec}) \approx 31 \times 10^6 \approx 10^7 \text{ sec}$$

Per risolvere il problema sono necessari 10^{87} anni !

Il Big Bang (data di inizio dell' universo)
è avvenuto circa 15×10^9 anni fa!

...ma se si disponesse di un **calcolatore 1000 volte più veloce?**

...si impiegherebbero 10^{84} anni.

...e se si usassero **10^9 calcolatori in parallelo?**

...si impiegherebbero 10^{75} anni.

Conclusioni:

- L' algoritmo Brute Force non è efficiente!
- Se questo fosse l'unico algoritmo utilizzabile per il problema dell'assegnazione persone-lavori, il problema sarebbe difficile
- La soluzione ottima dei problemi difficili può essere trovata solo per casi di ridotte dimensioni

↓ I problemi in cui la scelta è tra un numero finito di alternative (le variabili decisionali possono assumere solo un numero discreto di valori) si dicono combinatorici.

↓ La teoria della complessità è una parte della Ricerca Operativa che studia la difficoltà della soluzione dei problemi.

↓ Conoscere se un problema è difficile permette la scelta di un appropriato algoritmo:

- ▣ Algoritmi esatti basati sull'enumerazione esplicita delle soluzioni
- ▣ Algoritmi esatti basati sull'enumerazione implicita delle soluzioni
- ▣ Algoritmi approssimati
- ▣ Algoritmi euristici

Argomenti del corso

- Programmazione Lineare

- *Richiami di Algebra vettoriale*
- *Problemi di Programmazione Matematica*
- *Definizione di Iperpiani, insiemi convessi, soluzioni di base*
- *Th. Rappresentazione*
- *L' algoritmo del simplesso*
- *Teoria della dualità*
- *L' analisi di sensitività della soluzione*

- Teoria dei Grafi

- *Definizioni fondamentali*
- *Problemi di ottimizzazione sui grafi (Flusso a Costo Minimo, Massimo Flusso, Trasporto, Cammini minimi, Albero di Copertura Minimo)*

- Teoria della Complessità

- *Definizioni fondamentali*

Argomenti del corso

Libro di riferimento:

Linear Programming and Network Flows (2° o 3° edizione)

di: Mokhtar S. Bazaraa - John Jeff Jarvis - Hanif D. Sherali

Orario corso:

Lunedì	16-18	Aula P4
Venerdì	14-16	Aula P4

Ricevimento:

Prof. Cerulli: raffaele@unisa.it

Lunedì 15:00- 16:00 Mercoledì 14:00 – 15:00