ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA

ESERCIZI 1

Es. pag. 54 № 6,2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P \in \mathbb{N}$$

con $P = 2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

per assurdo

per $P > 2$ e supp che l'asserto (A^P) sia uguale a $A^{P-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

allora $$A^P = A^{P-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es. pag 56 (6.1)

$B = A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\varrho = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B,\ x^2 = y\}$

$A_\varrho = \{$

9/11/11
STEFANIA BOFFA

R in $\mathbb{Z}$

R eq $\Longleftrightarrow$ R rif., simm, trans.

$x \in \mathbb{Z}$

1) $[x]_R = \{y \in \mathbb{Z} \mid y R x\} \subseteq \mathbb{Z}$

2) $x \in [x]_R \neq \emptyset$

$x R y \Longleftrightarrow [x]_R = [y]_R$

$\Longrightarrow$

$x R y$

Th. $[x]_R \underset{\subseteq}{=} [y]_R$

$\supseteq$

$z \in [y]_R$ (Th $z \in [x]_R$)

$z R y$

$x R y \Rightarrow y R x \Rightarrow z R x \Rightarrow z \in [x]_R$

3) $[X]_R \neq [Y]_R \iff [X]_R \cap [Y]_R = \emptyset$

4) $\bigcup_{x \in \mathbb{Z}} [X]_R = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/R = \{ [X]_R \quad x \in \mathbb{Z} \}$

$\mathbb{Z}, R$

R è compatibile con + in $\mathbb{Z}$ se

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z} \mid \left.\begin{matrix} aRb \\ cRd \end{matrix}\right) \Rightarrow (a+c) R (b+d)$

R comp. con $\cdot$ in $\mathbb{Z}$ se

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right) \Rightarrow ac R bd$

ES.

R: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad aRb \iff a = b$ opp. $a \cdot b = 50$

R relazione di equivalenza

R riflessiva $aRa \ \forall a \in \mathbb{Z}$?

R simmetrica

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \mid aRb \Rightarrow bRa$? ($\iff b = a$ opp. $b \cdot a = 50$)

$aRb \Rightarrow$ 1) $a = b$ opp. $a \cdot b = 50$

2) $a \cdot b = 50 \Rightarrow b \cdot a = 50$

R transitiva

$\left.\begin{matrix} aRb \\ aRc \end{matrix}\right) \Rightarrow aRc$

$aRb \Rightarrow a=b$ opp $ab=50$
$bRc \Rightarrow b=c$ opp $bc=50$

1) $a=b$ e $b=c \Rightarrow a=c$

2) $a=b$ e $bc=50 \Rightarrow a\cdot c=50$

3) $b=c$ e $a\cdot b=50 \Rightarrow a\cdot c=50$

4) $bc=50$ e $ab=50 \Rightarrow ab=bc \Rightarrow a=c$

ES 2

$$[0]_R = \{n\in\mathbb{Z} \mid nR0\} = \{n\in\mathbb{Z} \mid n=0 \text{ opp. } n\cdot 0=50\} =$$
$$= \{0\} \neq \emptyset$$

ES 3

$$[1]_R = \{n\in\mathbb{Z} \mid nR1\} = \{n\in\mathbb{Z} \mid n=1 \text{ opp } n\cdot 1=50\} =$$
$$= \{1, 50\} = [50]_R$$

ES 4

$$[-3]_R = \{n\in\mathbb{Z} \mid nR-3\} = \{n\in\mathbb{Z} \mid n=-3 \text{ opp. } n(-3)=50\} =$$
$$= \{-3\}$$

Es 5

$$[2]_R = \{n\in\mathbb{Z} \mid n=2 \text{ opp. } n\cdot 2=50\} = \{2, 25\}$$

$[25]_R = [2]_R$

riferito all'esercizio di prima

$$\left.\begin{matrix} aRb \\ cRd \end{matrix}\right) \Rightarrow \begin{matrix} a=b \text{ opp. } ab=50 \\ c=d \text{ opp. } cd=50 \end{matrix}$$

Th $a+c \, R \, b+d \iff a+c=b+d$ opp. $(a+c)(b+d)=50$

$a=b$ e $c=d \Rightarrow a+c=b+d$

$a=b$ e $cd=50$

Vogliamo dire che vale questa proprietà P

$P_{n=0}$

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$1+\dots+(2n-1)=n^2 \quad \forall\, n \geq 1$$

1) $1=1^2$ $n=1$ vera (base d'induzione)

2) $1+\dots+(2n-1)=n^2$

$\cancel{1+\dots+(2(n+1)-1)=(n+1)^2}$

$$\underbrace{1+\dots+(2n-1)}_{n^2}+(2(n+1)-1)=n^2+2(n+1)-1=$$

$$=n^2+2n+2-1=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

$6^0+6^1+\dots 6^n = \frac{6^{n+1}-1}{5} \quad \forall n \geq 0 \qquad \sum_{k=0}^{n} 6^k$

$n=0, \quad 6^0 = 1$

$\frac{6^{0+1}-1}{5} = \frac{5}{5} = 1$ VERA

Th $\quad 6^0+6^1+\dots 6^n+6^{n+1} = \frac{6^{(n+1)+1}-1}{5}$

$6^0+6^1+\dots 6^n+6^{n+1} = \frac{6^{n+1}-1}{5}+6^{n+1} = \frac{6^{n+1}-1+5\cdot 6^{n+1}}{5} =$

$= \frac{6^{n+1}(5+1)-1}{5} = \frac{6\cdot 6^{n+1}-1}{5} = \frac{6^{n+2}-1}{5} \Leftarrow$ 1° membro

2° membro: $\frac{6^{(n+1)+1}-1}{5} = \frac{6^{n+2}-1}{5}$

cardinalità, principio di induz., dim. iniett. e suriett.

Verificare col princ. d'induzione X CASA

~~1) $1+n^1+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \geq 0$~~

2) $n^2 > 2n+1 \quad \forall n \geq 2$

3) $1^2+2^2+\dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$

4) $2^n > n^2 \quad \forall n > 4$

1) $1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \geq 1$

$x \, R \, y \iff (x-y) \in 8\mathbb{Z}$ Dim. questa relazione di equivalenza

$8\mathbb{Z} = \{8K, K \in \mathbb{Z}\}$

10/11/11

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

$A_{m,p}$ $B_{p,m}$

$A = (7 \; -4 \; 5)$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1x3 3x1

$A \cdot B = 7 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 21 - 8 + 5 = 18$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

2x(2) ← (2)x3

quindi posso fare il prodotto

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 & 0 + (-6) & 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot 0 + (-1)(-2) & 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 & 14 \\ -1 & +2 & -14 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ es. di matrice a gradini

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & -6 & 9 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow -3R_1+R_3]{R_2 \leftrightarrow -2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & +3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = 4-0 = 4$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\cdot e\, i + bfg + cdh - (ceg + afh + bdi)$$

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

$\boxed{\text{SARRUS}}$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$\det = 4+0+18-12-0-4 = 6$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1(2-15) - 2(-4\cdot 0) + 3(20-0) = -13 + 8 + 60 = 55$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2\begin{vmatrix} -4 & 7 & -2 \\ 1 & 6 & -3 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$1+2+3+\dots n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \geq 1$$

$$1 = 1\frac{(1+1)}{2} = 1 \qquad n=1$$

$$1+2+3+\dots n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\cancel{\frac{n(n+1)}{2}} \cancel{+} \cancel{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

S, T insiemi

$f: S \to T$

$x \to y = f(x)$

$\forall x \in S \ \exists y \in T : f(x) = y$

$X \subseteq S$

$f(x) = \{ f(x) \in T : x \in S \}$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$x \to x^2$

$X = \{-1, -3, 4\}$; $f(x) = ?$

$f(x) = \{ f(x) : x \in X \} = \{ x^2 : x \in X \} = \{1, 9, 16\}$

$f: S \to T$

$Y \subseteq T$

$f^{-1}(Y) = \{ x \in S : f(x) \in Y \} \subseteq S$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

$x \to |x|$

$X = \{-1, -3, 4, 5, -\frac{7}{4}\}$

$f^{-1}(X) = \{ x \in \mathbb{Z} : |x| \in X \} = \{ x \in \mathbb{Z} : |x| \in \{-1, -3, 4, 5, -\frac{7}{4}\} \}$

$|x| = -1$ mai verif.

$|x| = -3$ " "

$|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$

$|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$

$|x| = -\frac{7}{4}$ mai verif.

$f^{-1}(X) = \{-4, 4, 5, -5\}$

$f: S \to T$

f iniettiva $\iff (\forall x, y \in S \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

$\iff (\forall x, y \in S \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 3x+5$

$f(x) = 3x+5$

$x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(y) \Rightarrow 3x+5 = 3y+5$

$\Rightarrow 3x = 3y$

$\Rightarrow x = y$

f suriettiva $\iff \forall y \in T \ \exists x \in S : y = f(x)$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$x \to x^2$

f suriettiva $\iff \forall y \in \mathbb{Z} \ \exists x \in \mathbb{Z}$

$\iff \forall y \in \mathbb{Z} \ \exists x \in \mathbb{Z} : y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$y = -1 \quad -1 \neq x^2$

$y = 2 \quad \sqrt{2} \neq x^2$

$f: x \in \mathbb{Z} \to |x| + 9 \in \mathbb{Z}$

i) $f(\{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\})$

ii) $f^{-1}(\{-4, -1, 0, 15, 20\})$

iii) $f(\{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\}) = \{f(x) : x \in \{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\}\}$

$= \{|-7|+9, |-2|+9, |-1|+9, 0+9, |1|+9, |2|+9, |7|+9\} = \{16, 11, 10, 9\}$

iii) $f^{-1}(\{-4,-1,0,15,20\}) = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) \in \{-4,-1,0,15,20\}\}$

$f(x) = |x|+9 = -4 \Rightarrow |x| = -13$ mai verificato

$|x|+9 = -1 \Rightarrow |x| = -10$ " "

$|x|+9 = 0 \Rightarrow |x| = -9$ " "

$|x|+9 = 15 \Rightarrow |x| = 6$ $x = \pm 6$

$|x|+9 = 20 \Rightarrow |x| = 11$ $x = \pm 11$

$f^{-1} = \{6,-6,11,-11\}$

$x \to |x|+9$

$x, y \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f(y) \overset{?}{\Rightarrow} x = y$ se lo verifichiamo al'appl. è iniettiva

$f(x) = f(y) \Rightarrow |x|+9 = |y|+9 \Rightarrow |x| = |y| \not\Rightarrow x = y$

quindi l'applicaz. non è iniettiva

$x = 1, y = -1, x \neq y \not\Rightarrow f(x) = f(y)$

$f(x) = |1|+9 = 10$

$\shortparallel$

$f(y) = |-1|+9 = 10$

f suriettiva ?

$\forall y \in \mathbb{Z} \ \exists x \in \mathbb{Z} : f(x) = y$

$f(x) = |x|+9 = y \Rightarrow |x| = y-9$

$x = \pm y - 9$

supp. $y = -1$ $|x|+9 = -1$

$|x| = -10$ mai verific. $\Rightarrow$ appl. non suriettiva

$f: n \in \mathbb{Z} \longrightarrow -\frac{n}{5} \in \mathbb{Q} \qquad f(n) = -\frac{n}{5}$

i) $f(\{-10, -5, 0, 5, 6, 10\}) = \{f(n) : n \in \{-10, -5, 0, 5, 6, 10\}\}$

$\{f(-10), f(-5), f(0), f(5), f(6), f(10)\} = \{2, 1, 0, -1, -\frac{6}{5}, -2\}$

ii) $f^{-1}(\{-\frac{4}{3}, -1, 0, \frac{2}{15}, 20\}) = \{n \in \mathbb{Z} : f(n) \in \underbrace{\{-\frac{4}{3}, -1, 0, \frac{2}{15}, 20\}}_{\subseteq \mathbb{Q}}\}$

$n \rightsquigarrow$

$n : f(n) = -\frac{4}{3} ; -\frac{n}{5} = -\frac{4}{3} \Rightarrow n = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3}$

$n : f(n) = -1$

$f(n) = -\frac{n}{5} \Rightarrow -\frac{n}{5} = -1 \Rightarrow n = 5$

$n : -\frac{n}{5} = 0 \Rightarrow n = 0$

$n : -\frac{n}{5} = \frac{2}{15} \Rightarrow n = -\frac{10}{15} = -\frac{2}{3}$

$n : -\frac{n}{5} = 20 \Rightarrow n = -100$

- vediamo se f è iniettiva...

$n, y \in \mathbb{Z}, f(n) = f(y) \overset{?}{\Rightarrow} n = y$

$f(n) = f(y) \Rightarrow -\frac{n}{5} = -\frac{y}{5} \Rightarrow n = y \Rightarrow$ f è iniettiva

- vediamo se f è suriettiva...

f sur. $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Q} \; \exists n \in \mathbb{Z} : f(n) = y$

$\exists n \in \mathbb{Z} : -\frac{n}{5} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow n : n = -5y$ con $y = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{n = -\frac{5}{3}} \Rightarrow$ f non è suriett.

$$\boxed{A = \left\{ \frac{n^2}{5} : n \in \mathbb{N} \right\}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dire se è invert.
non è invert. perché le ultime tre righe sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow$ NO INV.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

anche qui non è inv.
perché ho due colonne uguali

$$A \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

non inv. perché $\det A = 0$
una riga tutti zero

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 20 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$\det = 10 \cdot 20 \cdot 5 = 1000$

$$A \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{11}{4} & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

- verificare $A^2 = AA$ è l'inv. di B (cioè $A^2 \cdot B = \mathbb{1}$)
- verificare se A è inv

DA SOLO 16/11/11

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -10 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 0\\ -10 & 0 & 1\end{pmatrix}=C \qquad \alpha=10$$

$$\alpha\cdot C=\begin{pmatrix}-10 & -10 & 50\\ 10 & 10 & 0\\ -100 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\cdot(+2)=1$$

$$\cancel{-2(0\ 2\ -1\ 1\ 1)=(0\ -4\ 2\ -2\ -2)}$$

$$\cancel{-2(1\ 0\ -\tfrac{1}{2}\ 0\ -\tfrac{1}{2})=(-2\ 0\ 1\ 0\ 1)}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}} \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\mathrm{I}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{IV}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{II}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}-\frac{1}{2}\mathrm{III}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\mathrm{IV}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{15}{3}+\frac{3}{22}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{3}+\frac{15}{44}=\frac{660+45}{132}=\frac{705}{132}=\frac{235}{44}$$

$$132-15=117$$

$$2-\frac{3}{22}\cdot\frac{3}{2}=2-\frac{9}{44}=\frac{79}{44}$$

$$3-\frac{3}{22}\cdot\frac{5}{2}=3-\frac{15}{44}=\frac{117}{44}$$

$$\frac{3}{22}-\frac{117}{44}\cdot\frac{79}{235}=\frac{3}{22}-\frac{9243}{10340}=\frac{1410-9243}{10340}=-\frac{7833}{10340}$$

$$\frac{7}{2}+\frac{21}{2}\cdot\frac{79}{235}=\frac{7}{2}+\frac{1659}{470}=\frac{1645+1659}{470}=\cancel{\frac{3304}{470}}=\frac{1652}{235}$$

$$
\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\frac{1}{3}\mathrm{I}}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[\substack{\mathrm{IV}-\mathrm{I} \\ \mathrm{V}-2\mathrm{I}}]{\substack{\mathrm{VI}-6\mathrm{I} \\ \mathrm{II}+3\mathrm{I}}}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & -8 & -5 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{\mathrm{V}-\frac{1}{3}\mathrm{II} \\ \mathrm{VI}+\mathrm{II}}]{\substack{\mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}+\frac{7}{3}\mathrm{II}}}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{22}{3} & \frac{15}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{22}{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}
\xrightarrow{-\frac{1}{2}\mathrm{III}}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{22}{3} & \frac{15}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{22}{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[\substack{\mathrm{V}+\frac{3}{22}\mathrm{III} \\ \mathrm{VI}+3\mathrm{III}}]{\mathrm{IV}-\frac{31}{22}\mathrm{III}}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{235}{44} & \frac{79}{44} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{117}{44} & \frac{31}{22} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}
\xrightarrow{+\frac{44}{235}\mathrm{IV}}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{79}{235} \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{117}{44} & \frac{3}{22} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}
\xrightarrow[\mathrm{VI}+\frac{21}{2}\mathrm{IV}]{\mathrm{V}-\frac{117}{44}\mathrm{IV}}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{79}{235} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7833}{10340} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1652}{235} \end{pmatrix}
\xrightarrow{-\frac{10340}{7833}\mathrm{V}}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{79}{235} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1652}{235} \end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathrm{VI}-\frac{1652}{235}\mathrm{V}}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{79}{235} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{II}]{\text{TR. II specie}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{I}]{\text{trasf. di III specie}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{II}]{\text{Tr. III specie}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III}-\text{II}]{\text{trasf. I specie}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\text{II}]{\text{TRA. II specie}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{trasf. III sp.}]{-2\,\text{IV}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 13 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1\ 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1\ 3)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2\ 0)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2\ 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(1\cdot 3)+(3\cdot 2) \quad (1\cdot 2)+(3\cdot 1) \quad (1\cdot 4)+(3\cdot 3)$$

$$(2\cdot 3)+(0\cdot 2) \quad (2\cdot 2)+(0\cdot 1) \quad (2\cdot 4)+(0\cdot 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 6 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 19 & -14 \\ 7 & -4 & 9 & -4 & -12 \\ -2 & +11 & 0 & 20 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 6 & -9 \\ 7 & 5 & 13 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{matrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{matrix}\right)\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}$$

$$\det A = 0+0+2-0-0-4=-2$$

$$A=\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ -1 & 0 & 2\end{matrix}\right)\begin{matrix}1 & 2\\ 4 & 5\\ -1 & 0\end{matrix}$$

$$\det A = 10-12+15-0-16=-3$$

$$C=\left(\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{matrix}\right)\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & -1\end{matrix}$$

$$\det C = -1-1+0+1=-1$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\\ 7 & 0\end{pmatrix}\qquad D^t=\begin{matrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 6 & 0\end{matrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 10 & 90\end{pmatrix}\qquad E^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 10\\ 1 & -1 & 90\end{pmatrix}$$

VERIFICARE CHE

1) $1^3+2^3+\ldots\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n\geq 1$

$n=1$

$\dfrac{1(1+1)^2}{4}=1^3$

$\underbrace{1^3+2^3+\ldots\ldots n^3}+(n+1)^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\dfrac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=$

$=\dfrac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$\dfrac{(n+1)^2+[(n+1)+1]^2}{4}=\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

sono uguali quindi è verificato

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1^k}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{1(1+1)}, \frac{1}{2(2+1)}, \frac{1}{3(3+1)}, \ldots\ldots \frac{1}{k(k+1)}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}, \ldots\ldots \dfrac{1}{k(k+1)}$

17/11/11
STEFANIA

$A = \left\{ \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

bisogna verificare che f sia un'applicazione, se è così, verifico se f è iniettiva, se è vero verifico se f è suriettiva, se è vero $\Rightarrow$ f ha cardinalità $= \mathbb{N}$

$|\aleph_0| = |N|$

S insieme

$|S| = |\mathbb{N}| = \aleph_0 \Leftrightarrow \exists\, f : S \to \mathbb{N}$ biettiva

$f \quad n \in \mathbb{N} \to \frac{2}{n} \in A$

$\forall\, x, y \in \mathbb{N} \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$x, y \in \mathbb{N} \quad f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow x = y$

quindi è iniettiva

$\cancel{\forall x \in N} \ \forall\, y \in A \ \exists\, x \in \mathbb{N} : y = f(x) = \frac{2}{x}$

$y \in A \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{N} : y = \frac{2}{x}$ quindi è suriettiva

---

Vogliamo conoscere la cardinalità di $\mathbb{Z}$, per fare ciò dobbiamo vedere se $\exists\, f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è biettiva

Divido $\mathbb{Z}$ in due $\quad \mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$

per una proposizione l'unione di insiemi numerabili è un insieme numerabile

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2(-20+2) + 6 - 16 = -36 - 10 = -46$$

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}^t}{|A|} \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = -|M_{23}| = +5$$

$$\text{minore}_{23} \rightarrow |M_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-3 = -5$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} (-20+2) & (0-2) & (0+4) \\ (15-4) & (10+4) & (-2-3) \\ (6-16) & (4-0) & (-8-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & +2 & 4 \\ -11 & 14 & +5 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^t = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \hat{A}^t \cdot \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{46} \cdot \hat{A}^t = \begin{pmatrix} \frac{18}{46} & \frac{11}{46} & \frac{10}{46} \\ -\frac{2}{46} & -\frac{14}{46} & \frac{4}{46} \\ -\frac{4}{46} & -\frac{5}{46} & \frac{8}{46} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$2^n > n^2 \quad \forall n > 4$

$n=5$ Base di induzione

$2^5 > 5^2$

$32 > 25$ VERO $\Rightarrow$ la base di induzione è verificata

per $n \Rightarrow 2^n > n^2$

per $n+1 \Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2$ è vero?

$(n+1)^2$

$n^2 > 2n+1 \Leftarrow$ sapendo che

$(n+1)^2 = n^2+2n+1 < n^2+n^2 = 2n^2$

$2n+1 < n^2 \Rightarrow n^2+2n+1 < n^2+n^2$

$n^2 < 2^n \Rightarrow 2 \cdot n^2 < 2 \cdot 2^n \Rightarrow 2n^2 < 2^{(n+1)}$

VERIFICARE CHE

1) $1^3+2^3+\dots n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \forall n \geq 1$

$n=1 \Rightarrow 1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1^3 = \dfrac{1(4)}{4} \Rightarrow 1^3 = 1 \Rightarrow 1=1$ VERIFICATA

TR.

$\underbrace{1^3+2^3+\dots n^3+(n+1)^3}_{} = \dfrac{(n+1)^2[(n+1)+1]^2}{4}$

$\Downarrow$

$\underbrace{1^3+2^3+\dots n^3}_{}+(n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} =$

$= \dfrac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

2° membro della Th è $\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

sono uguali quindi è verificata la mia tesi

---

2) $n^2 > 2n+1 \qquad \forall n > 2$ $\Longrightarrow$ segue

~~BASE D'INDUZIONE $n=3$~~

$3^2 > 3\cdot 2+1 \Rightarrow 9 > 7$ VERIF.

TR. $(n+1)^2 > 2(n+1)+1 = 2n+2+1 = 2n+3$

$n^2+(n+1)^2 > 2n+1+(n+1)^2 \Rightarrow$ aggiungo n^2 ad entrambe i membri

$\Rightarrow n^2+n^2+(n+1)^2 > n^2+2n+1+(n+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2n^2+(n+1)^2 > 2(n+1)^2$

?

~~segue~~

2) $P(3) = 3^2 > 2 \cdot 3 + 1$ VERA

Hp $n^2 > 2n+1$

Th. $(n+1)^2 > 2(n+1)+1 = 2n+3$

facciamo in modo da far comparire n^2 nella tesi

aggiungo e sottraggo 2 per ottenere gli addendi presenti nel 2° membro da dim.

$$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{\text{PER L'IPOTESI } n^2 > 2n+1} + 2n + 1 > (2n+1) + 2n + 1 = (2n+1) + 2n+1 + 2 - 2 =$$

$$= 2n+3 + 2n - 1 > 2n+3$$

la quantità $2n+3$ aggiunta a $2n-1$ (quantità certamente positiva perché consideriamo valori di $n > 2$) sarà evidentemente maggiore di $2n+3$, per cui è dimostrata la nostra tesi

3) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

$$\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

$$n = 1 \implies \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{VERA}$$

$P(n) \implies P(n+1)$

Hp. $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

Th $\dfrac{1}{(n+1)[(n+1)+1]} = \dfrac{n+1}{(n+1)+1} \implies \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \boxed{\dfrac{n+1}{n+2}}$

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots \frac{1}{n(n+1)}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2} =$$

4) $1+7+\dots(6n-5)=3n^2-2n \quad \forall n\geq 1$

PER $n=1 \Rightarrow 1=3\cdot 1^2-2\cdot 1=3-2=1$ VERA

Hp $1+7+\dots(6n-5)=3n^2-2n$

Th $1+7+\dots(6n-5)+[6(n+1)-5]=3(n+1)^2-2(n+1)=3n^2+6n+3-2n-2=3n^2+4n+1$

dal primo membro della tesi si evince:

$$(3n^2-2n)+[6(n+1)-5]=$$

$$\cancel{=3n^2-2n+6n-5+6n+6-5=}$$

$$\cancel{=3n^2+10n-4=}$$

$$=3n^2-2n+6n+6-5=3n^2+4n+1=$$

c.v.d.

5) $1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \quad \forall n\geq 1$ ⟵ Hp

$n=1 \Rightarrow 1^2=\frac{1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{3}=\frac{1\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}}=1$ VERA

Th: $1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2+[2(n+1)-1]^2=\frac{(n+1)[2(n+1)-1][2(n+1)+1]}{3}=$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}=\frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3}$$

dal 1° membro della tesi si evince:

$$\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}+(2n+1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)+3(2n+1)^2}{3}=$$

$$=\frac{(2n+1)[n(2n-1)+3(2n+1)]}{3}=\frac{(2n+1)(2n^2-n+6n+3)}{3}=$$

$$=\frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3}=$$

c.v.d.

6) $2^n > n^2 \quad \forall\, n > 4 \quad \leftarrow Hp$

PER $n = 5 \Rightarrow 2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25$ VERA

Th $2^{n+1} > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$\cancel{n^2 + 2^{n+1} > n^2}$ $\quad 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1$

sapendo che $n^2 > 2n+1$ avrò

$\cancel{n^2 + 2^{n+1} > n^2 > 2n + 1}$

7) $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \geq 1 \quad \leftarrow Hp$

$n = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1(1+2)}{2} = 1$ VERA

Th $1 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

cvd.

8) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall\, n \geq 1$

$n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{3 \cdot 2}{6} = 1$ VERA

$\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Th $1^2 + 2^2 + \ldots n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6n + 6]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

cvd

FUNZIONI

1) $f: x \in \mathbb{Z} \to |x|+4 \in \mathbb{N}$ stabilire se è iniettiva e suriettiva e determinare

i) $f(\{-7,-2,0,1,2\})$

ii) $f^{-1}(\{1,4,5,8\})$

i) $f(\{-7,-2,0,1,2\}) = \{f(x) : x \in \{-7,-2,0,1,2\}\} =$

$= \{|-7|+4, |-2|+4, |0|+4, |1|+4, |2|+4\} = \{11, 6, 4, 5\}$

~~L'insieme contiene 2 volte lo stesso num ⇒ f non è iniett.~~

ii) $f^{-1}(\{1,4,5,8\}) = \{x \in \mathbb{N} : f(x) \in \{1,4,5,8\}\} \Rightarrow f^{-1} = \{0, -1, 1, 4, -4\}$

$f(x) = |x|+4 = 1 \Rightarrow |x| = -3$ MAI VERIF.

$|x|+4 = 4 \Rightarrow |x| = 0 \iff x = 0$

$|x|+4 = 5 \Rightarrow |x| = 1 \iff x = 1$ e $x = -1$

$|x|+4 = 8 \Rightarrow |x| = 4 \iff x = 4$ e $x = -4$

f iniettiva $\iff$ $\forall x,y \in \mathbb{Z}\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ ~~$\forall x,y \in \mathbb{Z}\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$~~

" " $\iff \forall x,y \in \mathbb{Z}\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) = |x|+4$

$x, y \in \mathbb{Z}$ $f(x) = f(y) \Rightarrow |x| + \cancel{4} = |y| + \cancel{4}$

$|x| = |y| \not\Rightarrow x \neq y \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ non è iniettiva

f suriettiva $\iff \forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{Z} : y = |x|+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x| = y - 4 \Rightarrow x = \pm y - 4$

se $y = -1 \Rightarrow |x|+4 = 1$
$|x| = -5$ mai vera
f non è suriettiva

2) $f: x \in \mathbb{Z} \to \frac{|x|}{2} \in \mathbb{Q}$ stabilire se iniettiva e suriettiva e

determinare ~~i) $f(\{-7, -2, 0, 1, 2\})$, ii) $f^{-1}(\{1, ...$~~

i) $f(\{-10, -5, 0, 5, 6, 10\})$

ii) $f^{-1}(\{-1, 5, \frac{7}{5}, 20\})$

i) $f(\{-10, -5, 0, 5, 6, 10\}) = \left\{ \frac{|-10|}{2}, \frac{|-5|}{2}, \frac{|0|}{2}, \frac{|5|}{2}, \frac{|6|}{2}, \frac{|10|}{2} \right\} =$

~~$f(x) = \{x \in \mathbb{Z}:$~~ $\{5, \frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}, 3, 5\}$

ii) $f^{-1}(\{-1, 5, \frac{7}{5}, 20\}) = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) \in \{-1, 5, \frac{7}{5}, 20\}\}$

$f(x) = \frac{|x|}{2} = -1 \Rightarrow |x| = -2$ MAI VERIF.

$\frac{|x|}{2} = 5 \Rightarrow |x| = 10 \Rightarrow x = -10$ e $x = 10$

$\frac{|x|}{2} = \frac{7}{5} \Rightarrow |x| = \frac{14}{5} \Rightarrow x = \frac{14}{5}$ e $x = -\frac{14}{5}$

$\frac{|x|}{2} = 20 \Rightarrow |x| = 40 \Rightarrow x = -40$ e $x = 40$

$f^{-1} = \{10, -10, \frac{14}{5}, -\frac{14}{5}, 40, -40\}$

f iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

~~f iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$~~

~~$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}\ x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$~~

f iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}, f(x) = f(y) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x) = \frac{|x|}{2}$ $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{|x|}{2} = \frac{|y|}{2} \Rightarrow |x| = |y| \not\Rightarrow x = y$

perciò f non è iniettiva

f suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Q}\ \exists x \in \mathbb{Z} ; y = \frac{|x|}{2}$

$|x| = 2y \Rightarrow x = \pm 2y$

se $y = -1 \Rightarrow \frac{|x|}{2} = -1 \Rightarrow |x| = -2$ mai ver. $\Rightarrow f$ non è suriettiva

3) $f: x \in \mathbb{Z} \to -\frac{x}{5} \in \mathbb{Q}$

i) $f(\{-7,-2,-1,0,1,2,7\})$

ii) $f^{-1}(\{-\frac{4}{3},-1,0,\frac{2}{5},20\})$

<u>f iniettiva</u> $\iff \forall x,y \in \mathbb{Z},\ f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

$\iff \forall x,y \in \mathbb{Z},\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$f(x)=f(y) \Rightarrow -\frac{x}{5} = -\frac{y}{5} \Rightarrow x=y$ VERA $\Rightarrow$ f è iniettiva

<u>f suriettiva</u> $\iff \forall y \in \mathbb{Q}\ \exists x \in \mathbb{Z} : y = -\frac{x}{5} \Rightarrow x = -5y$

$\Downarrow$

f è suriettiva

<u>i)</u> $f(\{-7,-2,-1,0,1,2,7\}) =$

$= \{-\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{5}\}$

<u>ii)</u> $f^{-1}(\{-\frac{4}{3},-1,0,\frac{2}{5},20\})$

$-\frac{x}{5} = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{20}{3} \Leftarrow \notin \mathbb{Z}$

$-\frac{x}{5} = -1 \Rightarrow x = 5$

$-\frac{x}{5} = 0 \Rightarrow x = 0$

$-\frac{x}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = -2$

$-\frac{x}{5} = 20 \Rightarrow x = -100$

4) $f: x \in \mathbb{Z} \to |x|+9 \in \mathbb{Z}$

- f iniettiva $\iff \forall\, x, y \in \mathbb{Z},\ f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

$\iff \forall\, x, y \in \mathbb{Z},\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$|x|+9 = |y|+9 \Rightarrow |x| = |y|$ mai verificato $\Rightarrow f$ non è iniett.

- f suriettiva $\iff \forall\, y \in \mathbb{Z}\ \exists\, x \in \mathbb{Z} : y = |x|+9 \Rightarrow |x| = y-9 \Rightarrow$

$y=|x|+9 \Rightarrow \begin{cases} x = y-9 & \forall x \geq 0 \\ x = 9-y & \forall x < 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{x = \pm y - 9 \Rightarrow f \text{ non è suriett.}}$

i) $f(\{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\}) =$

$= \{|-7|+9, |-2|+9, |-1|+9, |0|+9, |1|+9, |2|+9, |7|+9\} =$

$= \{16, 11, 10, 9, \cancel{10, 11, 16}\}$

ii) $f^{-1}(\{-4, -1, 0, 15, 20\}) = \{6, 11\}$

$|x|+9=-4$	$\Rightarrow |x|=-5$	MAI VERA
$|x|+9=-1$	$\Rightarrow |x|=-8$	" "
$|x|+9=0$	$\Rightarrow |x|=-9$	"
$|x|+9=15$	$\Rightarrow |x|=6$	$x=-6$ e $x=6$
$|x|+9=20$	$\Rightarrow |x|=11$	$x=-11$, e $x=11$

Relazioni di equivalenza

1) aRb, a e $b \in \mathbb{Z} \iff a=b$ oppure $a \cdot b = 15$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{11}{4} & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

verificare che $A^2 = A \cdot A$ è l'inversa di B

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 7 & 2 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^2 \cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3 \Rightarrow A^2 \text{ è l'inversa di } B$$

ORA CALCOLO L'INVERSA DI A

$$\det A = -1(2-3)+(-5+2) = 1-3 = \boxed{-2} \neq 0 \Rightarrow A \text{ è invertibile}$$

$$\cancel{A = -2 - \frac{3}{2} - 5 - (-2-3) = -2-\frac{3}{2} - 5 + 5 = -\frac{7}{2}}$$

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} -1 & +1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \hat{A}^t=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}^t}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

OK

$$A=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2 & -2\\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\left|\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 0\\ -1 & 0 & \sqrt{2}\\ \frac{1}{2} & \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right| = -2-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad \hat{A}^t=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\hat{A}^t}{\det A}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$B=\left|\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\right| \cancel{= -1\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right] = \left(\frac{2}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{2-2\sqrt{2}}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}-4}{-8} = \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}$$

$$= -1\begin{vmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix} = -1\left[-1\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right] = -1 \neq 0 \Rightarrow B \text{ è invert}$$

$$b_{11}=-1 \qquad b_{12}=\begin{matrix}0 & 0 & \sqrt{2}/2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2\end{matrix}=0 \qquad b_{13}=0 \qquad b_{14}=0$$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = -1$$
$$b_{12} = 0$$
$$b_{13} = 0$$
$$b_{14} = 0$$

$$b_{34} = \begin{vmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{24} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} = -1\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} =$$

$$b_{33} = -1\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$b_{41} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{42} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_{43} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{44} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & & -1 \end{vmatrix} = -1\left[-1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\hat{B}^t}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_1: \begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1 \\ -x + \sqrt{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 1 \end{cases}$$

$$C = \left| \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right| = -2 - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2})}{-2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1(-\sqrt{2}) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-2} = \frac{-\sqrt{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1(\sqrt{2} - \sqrt{2}) =}{-2} = 0$$

$$S_3: \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$ sistema incompatibile perché $0 = 1$ è sempre falsa

---

$$S_2: \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det C = 0 \Longrightarrow$$ sist. ha ∞ soluzioni

con Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}+\mathrm{I}]{\mathrm{III}-\frac{1}{2}\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}+\mathrm{II}]{\mathrm{III}-2\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{5}\mathrm{III}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}-3\mathrm{I}]{}$$

~~$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4$~~

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -s_1 \\ 0 \\ s_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il sistema ha ∞^1 soluzioni; con $s_1 = x_3$

$$S_4 \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ a-b-c+d=1 \\ a+d=1 \\ a+3b+3c+d=1 \end{cases}$$

$$e = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la prima e la quarta colonna sono uguali oppure la 2ª e la 3ª

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\text{II}-\text{I},\ \text{III}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-2\text{II}]{\text{III}+\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c + c + d = 1 \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1-d \\ b = -c \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1-s_2 \\ -s_1 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

il sist ha ∞^2 soluzioni

lo so perchè le incognite sono 4 e i pivot della matrice ridotta a gradini sono due quindi $4-2=2 \Rightarrow \infty^2$

4) $1+7+\ldots+(6n-5)=3n^2-2n \quad \forall n\geq 1$

$n=1 \Rightarrow 1=3\cdot 1^2-2\cdot 1=1$ VERA

Th $1+7+\ldots+(6n-5)+[6(n+1)-5]=3(n+1)^2-2(n+1)=3n^2+6n+3-2n-2$

$\Rightarrow =3n^2+4n+1$

$3n^2-2n+6n+6-5=3n^2+4n+1=$

6) $2^n > n^2 \quad \forall n>4$

$n=5 \Rightarrow 2^5>5^2 \Rightarrow 32>25$ VERA

$2^{n+1}>(n+1)^2=n^2+2n+1$

$2^{n+1}=2\cdot 2^n>2\cdot n^2=n^2+n^2>n^2+2n+1$

$n^2>2n+1 \quad \forall n>2$

$n=3 \quad 3^2>2\cdot 3+1$ VERA

Th $(n+1)^2>2(n+1)+1=2n+3$

$(n+1)^2=n^2+2n+1>(2n+1)+2n+1=$

3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \geq 1$

$\frac{1}{1(1+1)}, \frac{1}{2(2+1)}, \frac{1}{3(3+1)} \cdots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

$\boxed{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12} + \cdots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \geq 1}$

$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ VERA

$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdots \frac{1}{n(n+1)}} + \frac{1}{(n+1)[(n+1)+1]} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$ ← è uguale

$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$

---

8) $1^2 + 2^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$

$n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1(2)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$1^2 + 2^2 + \cdots n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2n+2+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)n + 6(n+1)^2}{6} =$

$= \frac{(n+1)[(2n+1)n + 6(n+1)]}{6}$

1) $f: x \in \mathbb{Z} \longrightarrow |x| + 4 \in \mathbb{N}$

f iniettiva $\Longleftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}$ se $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Longleftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}$ se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

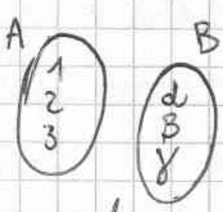
$|x| + 4 = |y| + 4 \Rightarrow |x| = |y| \not\Rightarrow x = y$

f suriettiva $\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{N} \ \exists x \in \mathbb{Z} : y = |x| + 4$

$\Rightarrow |x| = y - 4 \Rightarrow x = \pm y - 4$

corrispondenza

Dati due insiemi A e B



consideriamo il loro prodotto cartesiano

$$A\times B = \{(x,y) \mid x\in A \text{ e } y\in B\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\times B = \{(1,\alpha), (1,\beta), (1,\gamma), (2,\alpha), (2,\beta), (2,\gamma), (3,\alpha), (3,\beta), (3,\gamma)\}$$

Si dice <u>corrispondenza</u> di A in B un qualunque sottoinsieme $\mathcal{C}$ del prodotto cartesiano $A\times B$

---

* $\mathcal{C} = \{(1,\alpha), (3,\gamma)\}$ questo ad es. è una corrispondenza di A in B

---

essa si indica così:

$$\boxed{\mathcal{C}: \underset{\text{dominio della corrispondenza}}{A} \longrightarrow \underset{\text{codominio della corrispondenza}}{B}}$$

L'<u>immagine</u> di $A'\subseteq A$, indicata con $\mathcal{C}(A')$, è il sottoinsieme di B

$$\mathcal{C}(A') = \{y\in B : \exists\, x\in A', (x,y)\in \mathcal{C}\}$$

La <u>controimmagine</u> di $B'\subseteq B$ è il sottoinsieme di A

$$\mathcal{C}^{\circ}(B') = \{x\in A : \exists\, y\in B', (x,y)\in \mathcal{C}\}$$

nell'esempio ~~de~~ precedente* l'immagine è $\{\alpha,\gamma\}$, mentre la controimmagine è $\{1,3\}$

La <u>corrispondenza opposta</u> della corrispondenza $\mathcal{C}$, si indica con

$$\mathcal{C}^{\circ}: B\rightarrow A : (x,y)\in \mathcal{C}^{\circ} \iff (x,y)\in \mathcal{C}$$

Una corrispondenza $\mathcal{C}$ da A in B si dice:
- ovunque definita se $\forall x \in A \ \exists \ y \in B : (x,y) \in \mathcal{C}$
- funzionale se $\forall x \in A \ \exists! \ y \in B : (x,y) \in \mathcal{C}$
- surettiva se $\forall y \in B \ \exists \ x \in A : (x,y) \in \mathcal{C}$
- iniettiva se $\forall y \in B \ \exists! \ x \in A : (x,y) \in \mathcal{C}$

Una corrispondenza $\mathcal{C}$ da A in B ~~è ovu~~ si dice applicazione (o funzione) se è ovunque definita e funzionale. Una iniezione è una funzione iniettiva, e una suriezione è una funzione ~~se~~ surettiva.

si indica così: $\boxed{f : A \to B}$

Quando una corrispondenza è un'applicazione:

$$\forall x \in A \ \exists! \ f(x) \in B : (x, f(x)) \in f$$

L'immagine di f (l'immagine del dominio A secondo f):

$$\operatorname{Im} f = \{ y \in B : \exists \ x \in A : f(x) = y \}$$

sarebbero tutti i valori del codominio che hanno una corrispondenza nel dominio
se trovassimo un valore non associato ad alcun valore del dominio, esso non farebbe parte dell'immagine, ma solamente del codominio

Una funzione è surettiva $\iff \operatorname{Im} f = B$

La controimmagine di H rispetto ad f (dove $H \subseteq B$):

$$f^{-1}(H) = \{ x \in A \mid f(x) \in H \}$$

Un'applicazione si dice biiezione (o corrispondenza biunivoca) se è sia iniettiva che surettiva

Un'applicazione $f: A \to B$ è invertibile se $\exists \ g: B \to A : g \circ f = i_A$ (applicazione identica su A) e $f \circ g = i_B$. In questo caso l'app. g si dice inversa di f e si indica f^{-1}

Relazioni su un insieme

Una relazione su un insieme A è un qualunque sottoinsieme $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times A$
Essa è quindi una corrispondenza ~~dove~~ con il dominio e il codominio coincidenti.

$$\mathcal{R} : A \rightarrow A$$

per indicare la coppia $(a, b) \in \mathcal{R}$ si scrive $a \mathcal{R} b$ opp. $a \equiv_{\mathcal{R}} b$

Una relazione $\mathcal{R}$ su un insieme A è
- Riflessiva se $\forall\, a \in A$, $a \mathcal{R} a$
- Simmetrica se $\forall\, a, b \in A$, $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$
- Antisimmetrica se $\forall\, a, b \in A$, $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b$
- Transitiva se $\forall\, a, b, c \in A$, $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$

$$S: \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}\, x_2 + 2\sqrt{3}\, x_3 + 3x_5 = 2 \\ \sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_3 - \sqrt{3}x_4 - 3x_5 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x_1 + x_3 + x_4 + \sqrt{3}x_5 = 0 \\ -x_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_5 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = A$$

$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(3-6) = 0 \Rightarrow$ cambio riga

$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(3-0) = 2\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow rg A \geq 3$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 3 \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -\left[1(3) + \frac{\sqrt{3}}{3}(3\sqrt{3} - 3\sqrt{3})\right] = +3$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1(\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{3}(3)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3}) = -3$$

$\det B = -3 + 3 = 0 \Rightarrow$ cambio riga

$rg A = 3$

ora calcolo il rango della matrice associata al sistema completo

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = C = 2(-1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(3)\right] = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}) =$$

$$= -2 + 2 = 0$$

$rg A = rg(A|b) \Rightarrow$ il sistema è compatibile

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{III - \frac{\sqrt{3}}{3} I} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sqrt{3}III - I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{2\sqrt{3}\, IV + III} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R def. su $\mathbb{N}$ $\quad xRy \iff$ x divide y

- x divide x VERO $\Rightarrow$ R è riflessiva
- $\frac{y}{x} \neq \frac{x}{y}$ $\Rightarrow$ R non è simmetrica

x divide y e y divide x

$f: \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ y+2z \\ x+\frac{5}{2}y+z \\ \frac{1}{2}x+2y+2z \end{pmatrix} \qquad M_{4,3}(\mathbb{Q}) \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\frac{1}{2}\text{I}]{\text{III}-\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{\text{III}-\frac{1}{2}\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg} A = 2$$

$$\mathrm{Sol}(S) = \infty^{\#\text{incognite} - \#\text{pivot}} = \infty^1 = \infty$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A|b = \quad + \text{la colonna dei termini noti uguali a zero}$$

considero solo le prime due righe e scrivo il sistema associato

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4z \\ y=-2z \end{cases} \quad \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 4s \\ -2s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{Q} \right\}$$

[redacted]

7/12/11
BOFFA

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a \neq 0$ opp. $b \neq 0$

$d \in \mathbb{N}$

d divide a — d divide b — t divide d

$d = MCD(a,b) \iff$ 1) $d \mid a$ e $d \mid b$
2) $t \mid a$ e $t \mid b \Rightarrow t \mid d$ $\quad t \in \mathbb{N}$

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$

$\exists!\ q, r \in \mathbb{Z} : a = bq + r$

$0 \leq r < |b|$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a \neq 0$ opp. $b \neq 0$

$\exists\ q_1, r_1 : a = bq_1 + r_1 \ , \quad 0 \leq r_1 < |b|$

possiamo avere due casi:

- $r_1 = 0 \Rightarrow MCD(a,b) = b$

- $0 < r_1 < |b|$

$b, r_1, \exists\ q_2, r_2 :$

$b = q_2 r_1 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 \leq r_1$

$*$ $r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = MCD(a,b)$

$*$ $0 < r_2 < r_1 \qquad r_1, r_2 \qquad r_n = 0 \Rightarrow r_{n-1} = MCD(a,b)$

BOFFA

$MCD(76,60)$

$\underset{a}{76} = \underset{b}{60} \cdot \underset{q}{1} + \underset{r_1}{16}$

$r = 16 \neq 0$

$60, 16$

$60 = 16 \cdot 3 + \underset{r_2}{12}$

$r = 12 \neq 0$

$16, 12$

$16 = 12 \cdot 1 + \underset{r_3}{4}$

$r = 4 \neq 0$

$12, 4$

$12 = 4 \cdot 3 + \underset{r_4}{0}$

$\Downarrow$

$MCD(76,60) = 4$

BOFFA

$MCD(135212, 24750)$

$135212 = 24750 \cdot 6 + 11462$

$r = 11462 \neq 0$

$24750 = 11462 \cdot 2 + 1826$

$11462 = 1826 \cdot 6 + 506$

$1824 = 506 \cdot 3 + 308$

$506 = 308 \cdot 1 + 198$

$308 = 198 \cdot 1 + 110$

$198 = 110 \cdot 1 + 88$

$110 = 88 \cdot 1 + 22$

$88 = 22 \cdot 4 + 0 \implies$ MCD è 22

$MCD(54, -22)$

$\cancel{54 = -22(+3) + 8}$ $\quad 54 = -22(-2) + 10$

$\cancel{22 = 10 \cdot 2 + 2}$ $\quad -22 = 10 \cdot (-3) + 8$

$10 = 8 \cdot 1 + 2$

$8 = 2 \cdot 4 + 0$

$r < |b|$

BOFFA

EQUAZIONI CONGRUENZIALI

$a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad m > 1$

$ax \equiv b\,(m) \Longleftarrow ax - b \in m\mathbb{Z} \Longleftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{Z} : ax - b = mh$

se $d = MCD(a, m)$

$d \mid b \Longleftrightarrow \exists\, K \in \mathbb{Z} : b = Kd$

d divide b

$299x \equiv 52\,(247)$

$MCD\,(299, 247)$

$299 = 247 \cdot 1 + 52$

$247 = 52 \cdot 4 + 39$

$52 = 39 \cdot 1 + 13$

$39 = 13 \cdot 3 + 0 \Longrightarrow MCD(299, 247) = 13$

~~ora~~ verifico se 13 divide 52; è vero $\Rightarrow \exists$ soluz

$x_0 = \frac{b}{d} u = 4u$

$X_0 = \frac{b}{d} u$

$d = MCD(a, b) \Rightarrow d = au + bv$

$13 = 52 - 39 = 52 - (247 - 52 \cdot 4) =$

$= 52 - 247 + 52 \cdot 4 = 52 \cdot 5 - 247 =$

$= (299 - 247) \cdot 5 - 247 = 299 \cdot 5 - 247 \cdot 5 - 247 = 299 \cdot \underset{u}{5} + 247(-6)$

$u = 5 \Rightarrow X_0 = 4 \cdot 5 = 20$

$299x \equiv 52\,(247)$

$299 \cdot 20 - 52 = K\,247 = 24 \cdot 247$

questa è una delle 13 soluzioni che soddisfano questa equazione. So che ho 13 soluzioni perché il MCD è 13

BOFFA

$12x \equiv 39\ (93)$

$d = MCD(12, 93)$

$93 = 12 \cdot 7 + 9$

$12 = 9 \cdot 1 + 3$

$9 = 3 \cdot 3 + 0$

$MCD = 3$

3 divide 39? Si $\Rightarrow$ l'equazione ammette soluzioni

$x_0 = \frac{b}{d} u = 13u = 13 \cdot 8 = 104$

$3 = 12 - 9 = 12 - (93 - 12 \cdot 7) = 12 - 93 + 12 \cdot 7 = 12(8) + 93(-1)$

$[104]_{93} \subseteq S$

ora troviamo tutte le possibili soluzioni

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le k \le d - 1 = 2 \\ x_k = x_0 + k\frac{m}{d} \end{array}}$$

$x_1 = 104 + 1 \cdot \frac{93}{3} = 104 + 31 = 135$

$x_2 = 104 + 2 \cdot \frac{93}{3} = 104 + 2 \cdot 31 = 104 + 62 = 166$

VERIFICA

$12x - 39 = k\,93 \Rightarrow k = 17$

$2k + 1 - 2 = 3h$

$2k - 1 = 3h$

BOFFA

TEOREMA CINESE DEL RESTO

$m_1, m_2 \ldots m_t$ $\quad t \geq 2$

interi a due a due coprimi cioè

$MCD(m_i, m_j) = 1 \quad \forall i, j \in \{1 \ldots t\}$

$b_1 \ldots b_t$ numeri interi $\quad x_0 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x \equiv b_1 (m_1) \\ x \equiv b_2 (m_2) \\ \vdots \\ x \equiv b_t (m_t) \end{cases}$$

$S = \{\text{soluzioni}\} \neq \emptyset$

$S = [x_0]_{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_t}$

$$\begin{cases} x \equiv 1(2) & S_1 \\ x \equiv 2(3) & S_2 \\ x \equiv 3(5) & S_3 \end{cases}$$

$t \in S_1 \iff t \equiv 1(2) \iff t-1 = 2K, \quad K \in \mathbb{Z}$

$\iff t = 2K+1, \quad K \in \mathbb{Z}$

$S_1 = \{2K+1, K \in \mathbb{Z}\}$

1) $S_1 \cap S_2$

$2K+1 \in S_2 \iff 2K+1 \equiv 2(3) \iff$ ~~$2K+1 - 1 \equiv 1+2(3) \iff$~~

$\iff 2K \equiv 1(3) \iff 2K-1 = 3h, \quad h \in \mathbb{Z}$

[illegible] $K = 2$

$2K+1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$x_0 \in S_1 \cap S_2 \qquad S_1 \cap S_2 = [5]_6 = \{5 + 6K, K \in \mathbb{Z}\}$

segue $\Longrightarrow$

BOFFA

$5+6k \equiv 3(5) \iff 6k \equiv -2(5) \iff 3k \equiv -1(5) \iff$

$\iff 3k+1 = 5h$

$k=3$ $\qquad$ $5+6\cdot 3 = \underline{23}$

$[23]_{2\cdot 3\cdot 5=30}$

ESERCIZI

TROVARE

1) $MCD(660, 4500)$
2) $MCD(512, 24)$
3) $MCD(132, 624)$

4) $25x \equiv 4(31)$

5) $\begin{cases} x \equiv 1(5) \\ x \equiv 5(11) \\ x \equiv -2(15) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x \equiv 7(8) \\ x \equiv -2(11) \\ x \equiv 12(15) \end{cases}$

7) $\begin{cases} x \equiv 9(20) \\ x \equiv 7(11) \\ x \equiv -2(7) \end{cases}$

1) MCD(660, 4500)

$4500 = 660 \cdot 6 + 540$

$660 = 540 \cdot 1 + 120$

$540 = 120 \cdot 4 + 60$

$120 = 60 \cdot 2 + 0$ $\quad \Rightarrow d = MCD(660, 4500) = 60$ [redacted]

---

2) MCD(512, 24)

$512 = 24 \cdot 21 + \boxed{8}$

$24 = 8 \cdot 3 + 0$ $\quad$ MCD = 8

---

3) MCD(132, 624)

$624 = 132 \cdot 4 + 96$

$132 = 96 \cdot 1 + 36$

$96 = 36 \cdot 2 + 24$

$36 = 24 \cdot 1 + 12$

$24 = 12 \cdot 2 + 0$ $\quad$ MCD = 12

---

4) $25x \equiv 4 (31)$ $\quad$ (si legge: 25x congruo 4 modulo 31)

$d = MCD(25, 31)$

[redacted] $ax \equiv b(m)$

$31 = 25 \cdot 1 + 6$ $\quad$ VERIFICA $\boxed{25 \cdot 20 - 4 = 31 \cdot h \Rightarrow h = 16 \text{ VERA}}$

$25 = 6 \cdot 4 + \boxed{1}$

$6 = 1 \cdot 6 + 0$ $\quad$ MCD = 1 $\quad b = K \cdot d \Rightarrow K = \frac{4}{1} \in \mathbb{Z}$ VERA $\Downarrow$ $\exists$ sol.

sapendo che $x_0 = \frac{b}{d} u$ e che $d = MCD(a, b) = au + bv$

$x_0 = 4u = 4 \cdot 5 = 20$ $\quad [20]_{31} \subseteq S$

$1 = 25 - 6 \cdot 4 = 25 - (31 - 25) \cdot 4 = 25 - 31 \cdot 4 + 25 \cdot 4 = 25 \cdot \underset{u}{5} + 31 (\underset{v}{-4})$

DA INTERNET PDF

② $\begin{cases} x \equiv 2\ (5) & S_1 \\ x \equiv 3\ (7) & S_2 \\ x \equiv 7\ (9) & S_3 \end{cases}$

$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, \dots, [m-1]_m\}$

$\mathbb{Z}_2 = \{[0]_2, [1]_2\}$

$[1]_2 = [3]_2$

$x = 2+5t \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad \in S_1$

$2+5t \equiv 3\ (7)$

$5t \equiv 1\ (7)$

$t \equiv 5^{-1} \cdot 1\ (7)$

dalla seconda equazione ho:

$2+5t = 3+7n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$5t = 1+7n$

moltiplico per 3 così da evitare valori frazionari che $\notin \mathbb{Z}$

$15t = 3+21n$

$t+14t = 3+21n$

$t = 3+(21n-14t)$ → la pongo uguale a $7m$

$t = 3+7m \quad (m \in \mathbb{Z})$

$[5]_7^{-1} =$

$[x \cdot 5]_7 = [1]_7$

$5x \equiv 1\ (7)$

$5x - 1 = h7$

quindi:

$x = 2+5t \Rightarrow x = 2+5(3+7m) = 17+35m \in S_2$

dalla terza equazione ho:

$17+35m = 7+9k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$35m = -10+9k$

$36m - m = -10+9k$

$m = 36m+10-9k$

$m = 1+(9+36m-9k) \rightarrow = 9l$

$m = 1+9l \quad (l \in \mathbb{Z})$

quindi:

$x = 17+35m \Rightarrow \cancel{17+35(1+9l) \Rightarrow 17+35+315l} =$

$x = 17+35(1+9l) \Rightarrow x = 17+35+315l \Rightarrow x = 52+315l$

DA INTERNET PDF

③ $\begin{cases} x \equiv 4 (10) \\ 2x \equiv 4 (12) \\ 5x \equiv 6 (12) \end{cases}$

le soluzioni della prima equazione sono del tipo

$$x = 4 + 10n$$

la seconda implica allora

$2(4+10n) = 4 + 12m \qquad (m \in \mathbb{Z})$

$8 + 20n = 4 + 12m$

$20n = -4 + 12m$

?

ES. 1.28 DA INTERNET $\begin{cases} x \equiv 7 (9) \\ x \equiv 3 (5) \end{cases}$ $c =$

$9 = 5 \cdot 1 + 4$

$5 = 4 \cdot 1 + \boxed{1}$ $MCD(9,5) = 1$ $\Rightarrow$

$4 = 1 \cdot 4 + 0$

19/12/11
BOFFA

$\varphi : [(x \rightarrow z) \wedge y] \vee [(x \wedge y) \rightarrow z]$

x	y	z	$x \rightarrow z$	$(x \rightarrow z) \wedge y$	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \rightarrow z$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

φ è soddisfacibile? SI!!

soddisfacibile = almeno un valore uguale a 1

tautologia = tutte le uscite sono 1

contraddizione = tutte le uscite sono 0

$(1,1,1), (1,0,0), (0,1,1), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,1), (0,0,0)$

sono le valutazioni delle variabili di φ per cui φ è vera

φ CNF DNF

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m} L_{ij} \right)$$ CNF congiunzione di disgiunzioni

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij} \right)$$ DNF disgiunzione di congiunzioni

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$x \rightsquigarrow$ x $v(x)=0$
$\neg x$ $v(x)=1$

CNF $\boxed{\neg x \vee \neg y \vee z}$

DNF $x \rightsquigarrow$ x se $v(x)=1$
$\neg x$ se $v(x)=0$

$$\boxed{\begin{array}{l}(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee \\ (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)\end{array}}$$

p, q

$$p \vee \neg p \iff T \quad \text{tautologia}$$

$$p \wedge \neg p \iff \perp \quad \text{contraddizione}$$

$$p \to q \iff \neg q \to \neg p$$

$$p \to q \iff \neg p \vee q$$

$$\left.\begin{aligned} p \wedge T &\iff p \\ p \vee \perp &\iff p \end{aligned}\right\} \text{cancellazione}$$

duale

$$\left.\begin{aligned} p \vee T &\iff T \\ p \wedge \perp &\iff \perp \end{aligned}\right\} \text{dominanza}$$

$$\left.\begin{aligned} p \vee p &\iff p \\ p \wedge p &\iff p \end{aligned}\right\} \text{idempotenza}$$

$$\neg(\neg p) \iff p \quad \text{doppia negazione}$$

$$\left.\begin{aligned} p \vee q &\iff q \vee p \\ p \wedge q &\iff q \wedge p \end{aligned}\right\} \text{commutativa}$$

$$\left.\begin{aligned} (p \vee q) \vee r &\iff p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r &\iff p \wedge (q \wedge r) \end{aligned}\right\} \text{associativa}$$

$$\left.\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\iff (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &\iff \cancel{(p \vee q) \wedge (p \vee q)}\ (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned}\right\} \text{distributiva}$$

$$\left.\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\iff \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\iff \neg p \wedge \neg q \end{aligned}\right\} \text{De Morgan}$$

$$\left.\begin{aligned} [p \vee (p \wedge q)] &\iff p \\ [p \wedge (p \vee q)] &\iff p \end{aligned}\right\} \text{assorbimento}$$

CNF

1) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

2) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

3) Prop. distr. di $\vee$ risp. $\wedge$

DNF

1), 2), 3) " $\wedge$ risp. $\vee$

CNF

$[(x \to z) \wedge y] \vee [(x \wedge y) \to z] \equiv [(\neg x \vee z) \wedge y)] \vee [\neg(x \wedge y) \vee z] \equiv$

$\equiv [y \wedge (\neg x \vee z)] \vee [(\neg x \vee \neg y) \vee z] \equiv [(\neg x \vee \neg y) \vee z] \vee [y \wedge (\neg x \vee z)] \equiv$

$\equiv [(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee y] \wedge [(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee (\neg x \vee z)] \equiv$

$\neg x \vee \neg y \vee z$

Calcolo dei predicati

i) $\forall v \left(P_1(v) \wedge P_2(v, v_1) \rightarrow P_3(v, v_2) \right)$

ii) $\exists v \left(P_1(v_1) \wedge P_2(v, v_1) \rightarrow P_3(v, v_2) \right)$

$\mathbb{N}$, $P_1(a)$: "a divide 30"
$P_2(a,b)$: $a \geq b$
$P_3(a,b)$: "a multiplo di b"

$n \equiv (7,3)$

i) Per ogni v numero naturale
se v divide 30 ed è maggiore o uguale di 7
allora v è un multiplo di 3

ii) Esiste un numero naturale v_1 che divide 30

$(i_1 \dots i_k) = (i_1\, i_2) \dots (i_1\, i_{k-1}) \dots (i_1\, i_k)$

Decomposizione di σ in prodotto di trasposizioni

$\sigma = (1\ 5\ 4\ 7)\ (2\ 3) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 7)\ (2\ 3)$

$\sigma = (3\ 2)(3\ 7)(7\ 3)(7\ 1)(7\ 5)(7\ 4)$

Inversa di una permutazione

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \langle (7\ 3\ 2\ 5\ 1\ 6\ 4) \rangle$$

$I(\sigma^{-1}, 1) = \{7, 3, 2, 5\}$

$I(\sigma^{-1}, 2) = \{7, 3\}$

$I(\sigma^{-1}, 3) = \{7\}$

$I(\sigma^{-1}, 4) = \{7, 5, 6\}$

$I(\sigma^{-1}, 5) = \{7\}$

$I(\sigma^{-1}, 6) = \{7\}$

$I(\sigma^{-1}, 7) = \emptyset$

$\Longrightarrow$ numero totale di inversioni di σ^{-1} $= 12$

$$S: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = \alpha \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$
dimostrare che il sist. è comp. quando
$\alpha = 0$

$\alpha = 0 \Rightarrow S$ è un sist. omogeneo $\Rightarrow$ sist. compatibile
$\alpha \neq 0 \Rightarrow S$ non è compatibile (da verificare)

usando Rouché-Capelli sappiamo che

S è compatibile $\Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$

A: matrice incompl.; B: matrice completa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$rg(A) =$

$\det A_{(1)} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 1$

$1(2-6) + (1+4) = 4 - 4 = 0$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$

$\det A = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

$rg(B) = 3 \Rightarrow$ sistema non compatibile perché $rg(A) \neq rg(B)$

sist. non compatibile

ora troviamo la dimensione

$rg(A)=2$ $\qquad \infty^{N-rg(A)}$

nel nostro caso $\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y+\frac{1}{3}z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{9}z+z \\ y=-\frac{1}{9}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{9}z \\ y=-\frac{1}{9}z \end{cases}$$

$$Sol(S)=Sol(S')=\left\{\begin{pmatrix} \frac{10}{9}s \\ -\frac{1}{9}s \\ s \end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}\right\}$$

ora troviamo una base.

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B=\left\{\begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ è una base per S

$$f: \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$$

$$f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ y + 2z \\ x + \frac{5}{2}y + z \\ \frac{1}{2}x + 2y + 2z \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 : f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + \frac{5}{2}y + z = 0 \\ \frac{1}{2}x + 2y + z = 0 \end{cases} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S' = \begin{cases} x + 2y = 0 \\ \frac{1}{2}y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$Sol(S) = Sol(S') = \left\{ \begin{pmatrix} 4s \\ -2s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{Q} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una possibile base

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

1) troviamo gli autovalori quindi troviamo le sol. del polinomio caratteristico

$$P_A(t)=\det(A-t\mathbb{1}_4)=\left(t+\frac{1}{2}\right)^3(t-1)$$

$\lambda_1=-\frac{1}{2}$ $\qquad a_{\lambda_1}=3$

$\lambda_2=1$ $\qquad a_{\lambda_2}=1$

Th. $a_1=g_1$

$a_2=g_2$

$$g_1=\underbrace{(a_1+a_2)}_{4}-rg(A-\lambda_1\mathbb{1}_4)$$

$$g_2=(a_1+a_2)-rg(A-\lambda_2\mathbb{1}_4)$$

matrice diagonalizzabile se $\exists$ M invertibile: $P=M^{-1}AM$

$A_1=sol(S_1)$

$S_1 \rightsquigarrow A-\lambda_1\mathbb{1}_4$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\bullet$

$A_2 = sol(S_2)$

$S_2 \rightsquigarrow A - \lambda_2 \mathbb{1}_4$

$$A_2 = sol(S_2) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$B = B_1 \cup B_2$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

ESERCIZI ~~DAL~~ LIBRO ALGEBRA LINEARE I 26/12/11

$B=[(2,1),(1,1),(0,1)]$ è un sistema di generatori libero?

R: È un sistema di generatori ma è legato

$a(2,1)+b(1,1)+c(0,1)=(2a+b)+(a+b+c)=(0,0,0) \iff$

$$S=\begin{cases}2a+b=0\\a+b+c=0\end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases}b=-2a\\a-2a+c=0\end{cases}} \Rightarrow \cancel{\begin{cases}b=-2a\\c=a\end{cases}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\begin{cases}a-2a+c=0\\b=-2a\end{cases}} \Rightarrow \begin{cases}a=c\\b=-2a\end{cases} \Rightarrow Sol(S)=\left\{\begin{pmatrix}s\\-2s\\s\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}^2\right\}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} \xRightarrow{I\leftrightarrow II} \begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{II-2I} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{-II} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$S'=\begin{cases}x+y+z=0\\y+2z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2z+z=0\\y=-2z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=z\\y=-2z\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Sol(S)=Sol(S')=\left\{\begin{pmatrix}s\\-2s\\s\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}^2\right\}$$

$Sol(S)=\infty^1=\infty$

$$S=\begin{cases}a+c=0\\b-c=0\\2a+b+c=0\end{cases} \quad \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\2&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{III-2I} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S'=\begin{cases}a+c=0\\b-c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-c\\b=c\end{cases} \Rightarrow Sol(S)=Sol(S')=\left\{\begin{pmatrix}-s\\s\\s\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}^3\right\}$$

∞^1 soluzioni

I vettori del sistema sono linearmente dipendenti

ES. 2.8.1 PAG 76

1) $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0$

- $e_1 = (x_1, y_1)$ con $x_1 + y_1 = 0$
- $e_2 = (x_2, y_2)$ con $x_2 + y_2 = 0$

$e = e_1 + e_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) \Rightarrow (x_1+x_2)+(y_1+y_2) = (x_1+y_1)+(x_2+y_2) = 0$
$\Rightarrow e$ è un vettore di E_1

- $e_1' = K e_1 = (Kx_1, Ky_1)$

dato che $\forall K \in \mathbb{R}$, $Kx_1 + Ky_1 = K(x_1+y_1) = 0 \Rightarrow e_1'$ è un vettore di E_1

$\Downarrow$

E_1 è uno spazio vettoriale

2) $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4\}$

$e_1 = (x_1, y_1)$ con $y_1 = 4$
$e_2 = (x_2, y_2)$ con $y_2 = 4$

$e = e_1 + e_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) \Rightarrow y_1 = 4 \Rightarrow$ e non è un vettore di E_2

$\Downarrow$

E_2 non è uno spazio vettoriale

3) $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2$

$e = e_1 + e_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) \Rightarrow (y_1+y_2) = (x_1+x_2)^2$

questo è vero solo quando $2x_1x_2 = 0$ (il doppio prodotto del quadrato) e questo non vale $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$\Downarrow$

E_3 non è uno spazio vettoriale

$E_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-y=1$

$e = e_1+e_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) \Longrightarrow (x_1+x_2)-(y_1+y_2)=1$?

$(x_1-y_1)+(x_2+y_2)=1$

ES. 2.8.7

$A=[(1,3,2,-1),(-2,0,3,1),(4,5,0,1),(0,1,4,1),(1,0,0,1)]$

voglio esprimere i vettori del sistema A come una qualsiasi combinazione lineare. ~~trovare~~

$a(1,3,2,-1)+b(-2,0,3,1)+c(4,5,0,1)+d(0,1,4,1)+e(1,0,0,1)$

ora voglio trovare i valori di a,b,c,d,e ~~tali che~~ ~~mi diano~~ per i quali tale comb. lineare dà il vettore nullo $(0,0,0,0)$

$\boxed{} = a-2b+4c+e,\ 3a+5c+d,\ 2a+3b+4d,\ -a+b+c+d+e = (0,0,0,0) \iff$

$$\begin{cases} a-2b+4c+e=0 \\ 3a+5c+d=0 \\ 2a+3b+4d=0 \\ -a+b+c+d+e=0 \end{cases} \xRightarrow{\text{Passando al sistema ridotto}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\text{I}]{\text{II}-3\text{I},\ \text{III}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -8 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 7 & -8 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\text{II}]{\text{III}-7\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{17}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{23}{6} & \frac{7}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{6\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{23}{6} & \frac{7}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{IV}-\frac{23}{6}\text{III}}$$

$\frac{49}{6}-8=\frac{1}{6}$ $\quad -\frac{7}{6}+4=\frac{17}{6}$ $\quad \frac{7}{6}-\frac{17\cdot 6}{23}=\frac{161-612}{138}=-\frac{451}{138}$ $\quad -\frac{54}{23}+\frac{3}{2}=\frac{-108+63}{46}=-\frac{39}{46}$

$\frac{7}{2}-2=\frac{3}{2}$ $\quad 5-\frac{7}{6}=\frac{23}{6}$ $\quad 23\times 6=138$ $\quad 23\times 7=161$ $\quad 17\times 6=102$, $102\times 6=612$ $\quad 612-161=451$ $\quad 23\times 3=69$ $\quad 108-63=-39$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & -33 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2b + 4c + e = 0 \\ b - \frac{7}{6}c + \frac{1}{6}d - \frac{1}{2}e = 0 \\ c + 17d + 9e = 0 \\ 64\,d - 33\,e = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2b + 4c + e = 0 \\ b - \frac{7}{6}\left(-\frac{1137}{64}\right)e + \frac{1}{6}\cdot\frac{33}{64}e - \frac{1}{2}e = 0 \Rightarrow b + \frac{2653}{128}e + \frac{11}{128}e - \frac{1}{2}e = 0 \\ c + 17\cdot\frac{33}{64}e + 9e = 0 \Rightarrow c = -\frac{1137}{64}e \\ d = \frac{33}{64}e \end{cases}$$

$$\frac{17\cdot 33}{64} = \frac{561}{64} + 9 = \frac{561+576}{64} = \frac{1137}{64}$$

$$\begin{cases} a - 2b + 4c + e = 0 \\ b = -\frac{325}{16}e \\ c = -\frac{1137}{64}e \\ d = \frac{33}{64}e \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a - 2\left(-\frac{325}{16}\right)e + 4\left(-\frac{1137}{64}\right)e + e = 0 \\ b = -\frac{325}{16}e \\ c = -\frac{1137}{64}e \\ d = \frac{33}{64}e \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = +\frac{471}{16}e \\ b = -\frac{325}{16}e \\ c = -\frac{1137}{64}e \\ d = \frac{33}{64}e \end{cases}$$

$\boxed{\text{il sistema ha } \infty^1 \text{ soluzioni}}$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{471}{16}s \\ -\frac{325}{16}s \\ -\frac{1137}{64}s \\ \frac{33}{64}s \\ s \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \right\}$$

ES 2.8.8

$A_1 = [(-1,7,1),(-2,1,-2),(0,0,2)]$

$a(-1,7,1)+b(-2,1,-2)+c(0,0,2) = -a-2b,\ 7a+b,\ a-2b+2c = (0,0,0) \iff$

$$\begin{cases} -a-2b=0 \\ 7a+b=0 \\ a-2b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ 7(-2b)+b=0 \\ a-2b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ -13b=0 \\ a-2b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

i vettori ~~del~~ del sistema A_1 sono liberi

$A_2 = [(0,1,1),(2,1,0),(3,0,1)]$

$$\begin{cases} 2b+3c=0 \\ a+b=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} b=-\frac{3}{2}c \\ a=-b \\ a=-c \end{cases}} \begin{cases} -2a-3a=0 \\ b=-a \\ c=-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftarrow$$

i vettori del sistema A_2 libero

$A_3 = [(1,0,0),(1,0,-2),(1,1,2),(0,0,1)]$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c=0 \\ -2b+2c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} a=-b \\ d=2b \\ c=0 \end{cases}} \begin{cases} a+b=0 \\ d-2b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2}d \\ b=\frac{1}{2}d \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow$$

i vettori del sistema A_3 legato

$A_4 = [(1,0,1),(-2,0,-2),(1,0,2)]$

$$\begin{cases} a-2b+c=0 \\ a-2b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2b-c \\ \cancel{2b}-c-\cancel{2b}+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2b \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow$$

i vettori del sistema A_4 legato

$A_5 = [(0,0,0),(0,0,0),(1,3,2)] \Rightarrow$ legato perché contengo il vett. nullo

$A_6 = [(0,1,0),(-2,0,-2),(0,1,0)] =$ " " due vett uguali

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA

ESERCIZI 2

ES. 2.8.17 PAG. 82

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 2b+2c+2d=0 \\ 3c+3d= \\ 4d=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow$$ vettori del sist. sono liberi

$\Downarrow$

B è una base

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 2b+2c+2d=-1 \\ 3c+3d=1 \\ 4d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 2b+2c+2d=-1 \\ 3c=\frac{3}{4}+1 \\ d=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 2b+2c+2d=-1 \\ 3c=\frac{7}{4} \\ d=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 2b+\frac{7}{6}-\frac{1}{2}=-1 \\ c=\frac{7}{12} \\ d=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1+\frac{5}{6}-\frac{7}{12}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{5}{6} \\ c=\frac{7}{12} \\ d=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{7}{6}=\frac{-6+3-7}{6}=$$
$$=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$$
$$\frac{12+10-7+3}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

$$v=\frac{3}{2}u_1-\frac{5}{6}u_2+\frac{7}{12}u_3-\frac{1}{4}u_4$$ cioè

$$(1,-1,1,-1)=\Big(\underbrace{\frac{3}{2}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4}}_{=1},\ \underbrace{\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot 2+2\left(\frac{7}{12}\right)+2\left(-\frac{1}{4}\right)}_{=-1},\ \underbrace{3\left(\frac{7}{12}\right)+3\left(-\frac{1}{4}\right)}_{=+1},\ \underbrace{4\left(-\frac{1}{4}\right)}_{=-1}\Big)=$$
$=$

$$\frac{7}{4}-\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\frac{18-10+7-3}{12}=\frac{12}{12}=1 \quad \Big| \quad -\frac{5}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{2}=\frac{-10+7-3}{6}=-\frac{6}{6}=-1$$

ES 28.18 PAG 82

$\cancel{B_1}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

1) $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$

$v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2, \gamma u_3, \delta u_4$ cioè

$\cancel{\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \frac{3}{2} \\ \gamma = 5 \\ \delta = 4 \end{cases}$$

$v_2 = a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

3) $B_3 = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \left(\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 8\\ 0 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$

$v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4 =$

$$\begin{pmatrix}\alpha + 5\beta + \gamma + 3\delta & 4\alpha + 8\beta + 2\gamma + 2\delta \\ -\gamma + \delta & 4\beta + 2\gamma + \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha + 5\beta + \gamma + 3\delta = 2\\ 4\alpha + 8\beta + 2\gamma + 2\delta = \frac{3}{2}\\ -\gamma + \delta = 5\\ 4\beta + 2\gamma + \delta = 4\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 3\\ 4 & 8 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV} \leftrightarrow \mathrm{III}]{\mathrm{II} - 4\mathrm{I}} \begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 3\\ 0 & -12 & -2 & -10\\ 0 & 4 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{12}\mathrm{II}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 3\\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\\ 0 & 4 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} - 4\mathrm{II}} \begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 3\\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3}\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{4}\mathrm{III}} \begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 3\\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4}\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$2 - \frac{4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$1 - \frac{20}{6} = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}$

$1 - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}$

$$\xrightarrow{\mathrm{IV} + \mathrm{III}} \begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 3\\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha + 5\beta + \gamma + 3\delta = 2\\ \beta + \frac{1}{6}\gamma + \frac{5}{6}\delta = \frac{3}{2}\\ \gamma - \frac{7}{4}\delta = 5\\ -\frac{3}{4}\delta = 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha + 5\beta + \gamma + 3\delta = 2\\ \beta + \frac{1}{6}\gamma + \frac{5}{6}\delta = \frac{3}{2}\\ \gamma + \frac{7}{4}\cdot\frac{16}{3} = 5\\ \alpha = -\frac{16}{3}\end{cases} \Rightarrow$$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$\frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha + 5\beta + \gamma + 3\delta = 2\\ 4\alpha + 8\beta + 2\gamma + 2\delta = \frac{3}{2}\\ 4\beta + 2\gamma + 5 + \gamma = 4\\ \delta = 5 + \gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha + 5\beta + \gamma + 3\delta = 2\\ 4\alpha - 6\gamma - 2 + 2\gamma + 10 + 2\gamma = \frac{3}{2}\\ \beta = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\gamma\\ \delta = 5 + \gamma\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha + 5\beta + \gamma + 3\delta = 2\\ \alpha = \frac{+2}{4}\gamma - \frac{8}{4} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}\gamma - 2 + \frac{3}{8}\\ \beta = -\frac{3}{4}\gamma - \frac{1}{4}\\ \delta = 5 + \gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}\gamma - \frac{13}{8} - \frac{15}{4}\gamma - \frac{5}{4} + \gamma + 3\gamma + 15 = 2\\ \alpha = \frac{1}{2}\gamma - \frac{13}{8}\\ \beta = -\frac{3}{4}\gamma - \frac{1}{4}\\ \delta = 5 + \gamma\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\gamma = \frac{13}{8}+\frac{5}{4}-13 = \frac{13+10-104}{8} = -\frac{81}{8} \\ \alpha = \frac{1}{2}\gamma - \frac{13}{8} \\ \beta = -\frac{3}{4}\gamma - \frac{1}{4} \\ \delta = 5+\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\frac{\cancel{81}^{27}}{\cancel{8}_2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}_1} = -\frac{27}{2} \\ \alpha = -\frac{27}{4}-\frac{13}{8} = \frac{-54-13}{8} = \frac{-67}{8} \\ \beta = \frac{81}{8}-\frac{1}{4} = \frac{81-2}{8} = \frac{79}{8} \\ \delta = 5-\frac{27}{2} = -\frac{17}{2} \end{cases}$$

---

col metodo di riduzione a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}\leftrightarrow\text{III}]{\text{II}-4\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -12 & -2 & -10 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{12}\text{II}}$$

$$-8+\frac{3}{2} = -\frac{13}{2}$$

$$-\frac{2}{3}+2 = \frac{4}{3}$$

$$-\frac{20}{6}+1 = -\frac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{6}_3}$$

$$-\frac{13}{6}+4 = \frac{11}{6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{24} \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-4\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{24} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{4}\text{III}}$$

$$1+\frac{7}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$5+\frac{11}{8} = \frac{51}{8}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{24} \\ 0 & 0 & \cancel{\frac{4}{3}} & -\frac{7}{4} & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{24} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{51}{8} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{\cancel{51}^{17}}{\cancel{8}_2} = -\frac{17}{2}$$

$$\begin{cases} \gamma+5\beta+\gamma+3\delta = 2 \\ \beta+\frac{1}{6}\gamma+\frac{5}{6}\delta = \frac{13}{24} \\ \gamma-\frac{7}{4}\delta = \frac{11}{8} \\ -\frac{3}{4}\delta = \frac{51}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = -\frac{17}{6}\cdot\frac{7}{4}+\frac{11}{8} = \frac{-119}{24}+\frac{11}{8} = \frac{-119+33}{24} = \frac{\cancel{86}^{43}}{\cancel{24}_{12}} \\ \delta = -\frac{17}{6} \end{cases}$$

$$v_2 = a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4$$

$$\begin{pmatrix} a+5b+c+3d & 4a+8b+2c+2d \\ -c+d & 4b+2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+5b+c+3d=0 \\ 4a+8b+2c+2d=21 \\ -c+d=\frac{5}{6} \\ 4b+2c+d=1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{5}{6} \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV} \leftrightarrow \mathrm{III}]{\mathrm{II}-4\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & -2 & -10 & 21 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\mathrm{III}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & -2 & -10 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{4\mathrm{IV}+\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & -2 & -10 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \frac{82}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{10}{3}+24 = \frac{72+10}{3} = \frac{82}{3}$$

$$= -\frac{574}{9}+24 = -\frac{358}{9}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{179}{18}$$

$$\begin{cases} a+5b+c+3d=0 \\ -12b-2c-10d=21 \\ 4c-7d=24 \\ -3d=\frac{82}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+5b+c+3d=0 \\ -12b-2c-10d=21 \\ 4c=-7\cdot\frac{82}{9}+24 \\ d=-\frac{82}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+5b+c+3d=0 \\ -12b+\frac{179}{9}+\frac{820}{9}=21 \\ c= \quad -\frac{179}{18} \\ d=-\frac{82}{9} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d=-\frac{82}{9} \\ c=-\frac{179}{18} \\ 12b=111-21 \Rightarrow b=\frac{90}{12}=\frac{15}{2} \\ a=-\frac{75}{2}+\frac{179}{18}+\frac{82}{3}=\frac{-675+179+492}{18}=-\frac{4}{18}=-\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-\frac{2}{9} \\ b=\frac{15}{2} \\ c=-\frac{179}{18} \\ d=-\frac{82}{9} \end{cases}$$

5) $B_5 = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \left(\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$v_1 = a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4$ cioè

$$\begin{pmatrix} 5a+2b & \frac{3}{2}b+21c+2d \\ 5b+\frac{5}{6}c & 4b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5a+2b = 2 \\ \frac{3}{2}b+21c+2d = \frac{3}{2} \\ 5b+\frac{5}{6}c = 5 \\ 4b+c = 4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 21 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & \frac{5}{6} & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{3}{10}\mathrm{III}+\mathrm{II}]{-\frac{3}{8}\mathrm{IV}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 21 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{83}{4} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{165}{8} & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{664}{660}\mathrm{IV}+\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 21 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{83}{4} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{165} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a+2b = 2 \\ \frac{3}{2}b+21c+2d = \frac{3}{2} \\ \frac{83}{4}c+2d = 0 \\ -\frac{1}{165}d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 5a+2b & \frac{3}{2}b+21c+2d \\ 5b+\frac{5}{6}c & 4b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5a+2b = 0 \\ \frac{3}{2}b+21c+2d = 21 \\ 5b+\frac{5}{6}c = \frac{5}{6} \\ 4b+c = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 21 & 2 & 21 \\ 0 & 5 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{3}{10}\mathrm{III}+\mathrm{II}]{-\frac{3}{8}\mathrm{IV}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 21 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{83}{4} & 2 & \frac{83}{4} \\ 0 & 0 & \frac{165}{8} & 2 & \frac{165}{8} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{664}{660}\mathrm{IV}+\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 21 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{83}{4} & 2 & \frac{83}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{165} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a+2b = 0 \\ \frac{3}{2}b+21c+2d = 21 \\ \frac{83}{4}c+2d = \frac{83}{4} \\ -\frac{2}{165}d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

ES 2.8.19

1) $v = a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4 =$ $\qquad A = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$= a\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1 & 2\\ -8 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+2c+d & 2a+b+c+2d\\ a+3b-c-8d & -2a-b+3c+2d\end{pmatrix}$$

~~$a+b+2c+d =$~~

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1 & -8\\ -2 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III-I\\ IV+2I}]{II-2I} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & -3 & -9\\ 0 & 1 & 7 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[IV+II]{III+2II} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -9 & -9\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{9}{4}IV+III}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -9 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ $\dim \mathcal{L}(A) = 3$

~~e che~~ il sistema è legato

$$S\begin{cases} a+b+2c+d=0\\ -b-3c=0\\ -9c-9d=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2d\\ b=3d\\ c=-d\end{cases} \qquad Sol(S) = \left\{\begin{pmatrix}-2s\\ 3s\\ -s\\ s\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\boxed{\text{una base è } \begin{pmatrix}-2\\ 3\\ -1\\ 1\end{pmatrix} ?}$$

ES. 28.10

~~x+y=2~~ U non è un sottospazio perchè non contiene il vettor nullo
~~z-t=2~~

$$S:\begin{cases} x+y=2 \\ z-t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+y \\ z=2+t \end{cases} \qquad Sol(S)=\left\{\begin{pmatrix} 2+s_1 \\ s_1 \\ 2+s_2 \\ s_2 \end{pmatrix}, s_1 \text{ e } s_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

questo è il più piccolo sottospazio vettoriale

PAG 25 LIBRO BIANCO

$H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

$h_1 = (x_1, y_1)$ con $x_1 + y_1 = 0$ ERRATO

$h_2 = (x_2, y_2)$ con $x_2 + y_2 = 0$

$h = h_1 + h_2 = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2) \Longrightarrow (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0$

h è un vettore di H_1

$h_1' = K h_1 = (K x_1, K y_1)$ dato che $\forall K \in \mathbb{R}$, $K x_1 + K y_1 = K(x_1 + y_1) = 0 \Longrightarrow$

h_1' è un vettore di H_1

$h_1 = (x_1, y_1)$ con $y_1 = x_1^2$

$h_2 = (x_2, y_2)$ con $y_2 = x_2^2$

$h = h_1 + h_2 = ((x_1 + x_2)^2, (y_1 + y_2)) \Longrightarrow \cancel{(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2)}\ (y_1 + y_2) = (x_1 + x_2)^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 \Longleftrightarrow 2x_1x_2 = 0$ e questo non è vero $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

H_1 non è un sottospazio

$H_2 = \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}$

$(1,1) + (1,1) = (2,2) \notin H_2 \Longrightarrow H_2$ non è un sottospazio

$2(1,1) = (2,2) \in H_2$

$T = \{(1,0),(1,1)\}$

$v_T = (a_1, b_1) = a_1(1,0) + a_2(1,1)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a \\ a_2 = b \end{cases}$$

PAG 46 BIANCO

8.1) $v_1 = (1,0,2)$
$v_2 = (0\ 1\ 0)$
$v_3 = (0\ 0\ 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i 3 vett. sono indipendenti, sono generatori di $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ sono una base

8.2)
$v_1 = (2,-1,0,0)$; $v_2 = (0,1,3,0)$; $v_3 = (0,0,0,1)$; $v_4 = (1,1,1,-1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{3}\mathrm{III}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{IV}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + d = 0 \\ 2b + 3d = 0 \\ c - d = 0 \\ \frac{7}{3} d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema indipendente}$$

$\Uparrow$

$\{(2,-1,0,0),(0,1,3,0),(0,0,0,1),(1,1,1,-1)\}$
è una base

8.3) OSSERVAZIONE: il libro utilizza la trasposta della matrice scelta da me

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[II-2I]{III-I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-II]{III-2II} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-b+3c-2d \\ 2b-2c+4d \end{cases} \Rightarrow \dim H = 2 \Rightarrow$$ 2 qualsiasi vettori indipendenti di H formano una base

---

PAG 65 1.1)

$f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x, x+y, y) \in \mathbb{R}^3$ è lineare?

ciò è vero se valgono due proprietà: interna della somma ed esterna del prodotto

- $\forall v, w \in V$, $f(v+w) = f(v) + f(w)$
- $\forall h \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in V$, $f(hv) = h \cdot f(v)$

presi $\bar{v}$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v}=(x,y) \\ \bar{w}=(x',y') \end{array}\right. \Rightarrow \bar{v}+\bar{w} = (x+x', y+y')$$

$$f(\bar{v}+\bar{w}) = f(x+x', y+y') = (\overset{x}{x+x'}, \overset{x+y}{x+x'+y+y'}, \overset{y}{y+y'})$$

è uguale a

$$\begin{array}{l} f(\bar{v}) = f(x,y) \\ f(\bar{w}) = f(x',y') \end{array}$$ poichè $f(\bar{v}) + f(\bar{w}) = f(x,y) + f(x',y') = (x, x+y, y) + (x', x'+y', y')$

sia $h \in \mathbb{R}$ e $\bar{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad h\bar{v} = h(x,y) = (hx, hy)$

$f(h\bar{v}) = f(hx, hy) = (hx, hx+hy, hy)$

$h f(\bar{v}) = h(x, x+y, y) = (hx, h(x+y), hy) = (hx, hx+hy, hy) \Rightarrow$

$f(h\bar{v}) = h f(\bar{v})$

1.2) $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x,0) \in \mathbb{R}^2$ è lineare?

$\bar{v} = (x,y)$ $\qquad \bar{w} = (\alpha, \sigma)$ $\qquad (\bar{v}+\bar{w}) = (x+\alpha, y+\sigma)$

$f(\bar{v}+\bar{w}) = f(x+\alpha, y+\sigma) = (x+\alpha, 0)$

$f(\bar{v})+f(\bar{w}) = f(x,y)+f(\alpha,\sigma) = (x,0)+(\alpha,0) = (x+\alpha, 0)$

$K \in \mathbb{R}$ e $\bar{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$K\bar{v} = K(x,y) = (Kx, Ky)$

$f(K\bar{v}) = f(Kx, Ky) = (Kx, 0) \longleftarrow$ uguali

$K f(\bar{v}) = K(x,y) = K(x,0) = (Kx, 0)$

le due proprietà sono verificate $\Rightarrow$ f è un'applicazione lineare

---

1.3) $f: (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (2x-1, x-3z) \in \mathbb{R}^2$

$\bar{v} = (x,y,z)$ $\qquad \bar{w} = (\alpha, \beta, \gamma)$ $\qquad \bar{v}+\bar{w} = (x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$

$f(\bar{v}+\bar{w}) = f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = (2(x+\alpha)-1, x+\alpha-3(z+\gamma)) =$

$= (2x+2\alpha-1, x+\alpha-3z-3\gamma)$

$f(\bar{v})+f(\bar{w}) = f(x,y,z)+f(\alpha,\beta,\gamma) = (2x-1, x-3z)+(2\alpha-1, \alpha-3\gamma) =$

$= (2x+2\alpha-2, x+\alpha-3z-3\gamma)$ $\qquad$ DIVERSI

$\Downarrow$

f ~~è~~ non è un'appl. lineare

1.7) $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ x-z & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$

$\bar{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$\bar{w}=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \quad (\bar{v}+\bar{w})=(x+a,\ y+b,\ z+c)$

$f(\bar{v}+\bar{w})=f(x+a,\ y+b,\ z+c)=\begin{pmatrix} 2(x+a) & (y+b)+(z+c) \\ (x+a)-(z+c) & y+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+2a & y+b+z+c \\ x+a-z-c & y+b \end{pmatrix}$

$f(\bar{v})+f(\bar{w})=f(x,y,z)+f(a,b,c)=$

$=\begin{pmatrix} 2x & y+z \\ x-z & y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ a-c & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+2a & y+z+b+c \\ x+a-z-c & y+b \end{pmatrix}$

uguali

$l\in\mathbb{R}$

~~$\bar{v}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$~~ $\bar{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$l\bar{v}=l(x,y,z)=(lx,\ ly,\ lz)$

$f(l\bar{v})=f(lx,\ ly,\ lz)=\begin{pmatrix} 2lx & ly+lz \\ lx-lz & ly \end{pmatrix}$

uguali

$lf(\bar{v})=l\,f(x,y,z)=l\begin{pmatrix} x & y+z \\ x-z & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} lx & ly+lz \\ lx-lz & ly \end{pmatrix}$

le proprietà verificate $\Rightarrow$ f è appl. lineare

$g: ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x] \rightarrow 2ax+b \in \mathbb{R}_1[x]$

$v = (ax^2+bx+c)$

$w = (ak^2+bk+c)$

$v+w = (ax^2+ak^2)+(bk+bx)+(c+c) =$

$= a(x^2+k^2)+b(x+k)+2c$

$v = ax^2+bx+c \rightarrow 2ax+b$

$w = ay^2+by+c \rightarrow 2ay+b$

$v+w = ax^2+bx+c+ay^2+by+c = a(x^2+y^2)+b(x+y)+2c \rightarrow \cancel{2ab}$

$= a(x+y)^2 - 2axy + b(x+y)+2c$

$a(x+y)^2 + b(x+y)+c \rightarrow 2a(x+y)+b$

$g(v+w) = \cancel{2a(bk+bx)+b}\ g\big(a(x^2+k^2)+b(x+k)+2c\big) =$

$= 2a(x+k)+b$

PAG 90 BIANCO

2.1) $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x+2y, -x-2y) \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ -1 & -2-t \end{vmatrix} = (1-t)(-2-t)+2 = t^2+t = t(t+1)$$

$\cancel{= \alpha t^2 + \beta t + \gamma =}$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 0$

$\Rightarrow$ perché il numero delle radici del polinomio è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale cioè 2

L'autospazio $V(-1) = sol(A + \mathbb{1})x = 0)$

cioè

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}} + \overset{\mathbb{1}_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\cancel{V(-1)}$

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2y}+\cancel{2y}=0 \\ x=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix}$$

quindi $V(-1) = \{(-x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = L((-1,1))$

L'autospazio $V(0) = sol(Ax = 0) = \ker f$

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ -x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y+2y=0 \\ x=-2y \end{cases} \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

quindi $V(0) = \{(-2y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = L((-2,1))$

$\{(-1,1), (-2,1)\}$ è una base

2.3) $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to (3x,3z,3y)\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix} \quad P_A(t)=|\cancel{(A-t\mathbb{1}_2)x=0}\ \begin{vmatrix}3-t&0&0\\0&-t&3\\0&3&-t\end{vmatrix} = t^2(3-t)$$

$t_1=0$ e $t_2=3 \Rightarrow t^2(3-t)=0$

~~abbiamo solo due radici quindi quando le radici sono, in numero diverse dalla dimensione dello spazio vettoriale l'endomorfismo non è diagonalizzabile~~

~~2.3) $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to (3x$~~

2.3) $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \to (3x,3z,3y)\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix} \qquad P_A(t)=\left|\begin{pmatrix}3-t&0&0\\0&-t&3\\0&3&-t\end{pmatrix}\right| = (3-t)(t^2-9)$$

$$(3-t)(t^2-9)=0 \iff \begin{cases}3-t=0\\t^2-9=0\end{cases} \iff \begin{cases}t=3\\t=\pm3\end{cases} \iff \begin{cases}t=3\\t=-3\end{cases}$$

$V(-3)=sol(S) \qquad (A-t\mathbb{1})x=0 \Rightarrow (A+3\mathbb{1})x=0$

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$S=\begin{cases}6x=0\\3y+3z=0\\3y+3z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=-z\\0=0\end{cases} \Rightarrow V(-3)=\left\{\begin{pmatrix}0\\-s\\s\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}^3\right\}$$

$V(3) =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3\mathbb{1}_3)x = 0 \qquad \cancel{\begin{cases} 4x = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow V(3) = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_2 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}^3 \right\} \Rightarrow g_\lambda = a_\lambda = 2$$

una base di $V(-3)$ è: $(0, -1, 1)$

" " $V(3)$ è: $((1, 0, 0), (0, 1, 1))$

Una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f è:

$$\{(0, -1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

2.4) $f:(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \to (x+2y,\ y-t,\ z-3t,\ t)\in\mathbb{R}^4$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad P_A(\ell)=\begin{vmatrix}1-\ell&2&0&0\\0&1-\ell&0&-1\\0&0&1-\ell&-3\\0&0&0&1-\ell\end{vmatrix}=(1-\ell)^4$$

$\lambda_1=1 \Rightarrow a_\lambda=4$

$V(1)=sol(S) \qquad S: (A-\ell\mathbb{1}_4)x=0 \Rightarrow (A-\mathbb{1}_4)x=0$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=A'$$

$$A'\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2y=0\\-t=0\\-3t=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\t=0\end{cases} \quad V(1)=\left\{\begin{pmatrix}s_1\\0\\s_2\\0\end{pmatrix} s_1,s_2\in\mathbb{R}\right\}$$

~~una base di V(1) è {(1,0,0,0),(0,0,1,0)}~~

~~$g_\lambda=2$~~

$g_\lambda=\dim V(1)=2\neq a_\lambda=4 \Rightarrow f$ non è diagonalizzabile

3.1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(t) = \left| \begin{pmatrix} 2-t & 3 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix} \right| = (4-t)\left[(2-t)(1-t)-6\right] =$

$= (4-t)(t^2-3t-4)$

$(4-t)(t^2-3t-4) = 0 \iff \lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 4$

$t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} =$

$V(-1) \Rightarrow (A - t\mathbb{1}_3)x = 0 \Rightarrow (A + \mathbb{1}_3)x = 0$

$V(-1) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ 0=0 \\ z=0 \end{cases}$

$V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow a_{\lambda_1} = 1 \Rightarrow g_{\lambda_1} = 1$

$V(4) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+3y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\cancel{6x+3y=0}$
$\cancel{2x+5y=0}$
$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow V(4) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s_1 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$\Downarrow$

una base di $V(4)$ è:

$\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right), (0,0,1)$

$g_{\lambda_2} = 2 = a_{\lambda_2}$

$\Downarrow$

A è diagonalizzabile

una base di $V(-1)$ è $(-1,1,0)$

una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A è:

$\{(3,2,0),(0,0,1),(-1,1,0)\}$ quindi una matrice invertibile $P: P^{-1}A \cdot P$ è D è

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P \qquad \det P = -(3+2) = -5$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{\hat{P}^t}{\det P}$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{P}^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}+\frac{4}{5} & \frac{9}{5}+\frac{6}{5} & -\frac{4}{5}+\frac{4}{5} \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{12}{5}+\frac{12}{5} & -\frac{18}{5}+\frac{18}{5} & \frac{8}{5}-\frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

1) Prova del 8/01/09

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = C \qquad A = C - a^{(5)}$$

$\det C(1,2;1,2) = 2\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow rg(C) \geq 2$

$\det C(1,2,3;1,2,3) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(3-6) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$ ~~$\neq 0 \Rightarrow rg\,C \geq 3$~~

$$\det C(1,2,3;1,2,4) = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(3) = 2\sqrt{3} \neq 0$$

$\Downarrow$

$rg\,C \geq 3$

$$\det C(1,2,3,4;1,2,3,4) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (\text{det. di prima}) = 0$$

$$\det C(1,2,3,4;1,2,3,5) = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 3 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\text{det di prima}) = 0$$

il rango di A e anche quello di C è $= 3 \Rightarrow S$ è compatibile

il numero delle sol è ∞^2

$$S': \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 \qquad + 3x_5 = 2 \\ \sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_3 - \sqrt{3}x_4 - 3x_5 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x_1 \qquad + x_3 + x_4 + \sqrt{3}x_5 = 0 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & +1 & 1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - \frac{\sqrt{3}}{3} I} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{III - \frac{1}{\sqrt{3}} II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \sqrt{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow S'': \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 + 3x_5 = 2 \\ \sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_3 - \sqrt{3}x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_4 + \sqrt{3}x_5 = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}x^5 - \frac{1}{3}\sqrt{3}} \qquad \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 + 3x_5 = 2 \\ \sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_3 + \frac{3}{2}x_5 + 1 - 3x_5 = 0 \\ x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_5 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ x_2 = \left(\frac{3}{2}x_5 + \sqrt{3}x_3 - 1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_5 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_5 - \sqrt{3}x_3 + 1 \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_5 + x_3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_5 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$sol(S'') = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}s_1 - \sqrt{3}s_2 + 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}s_1 + s_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ s_2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}s_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ s_1 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

②

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P_A(t)=\left|\begin{pmatrix} -\frac{7}{2}-t & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}-t & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4-t & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}-t \end{pmatrix}\right| =$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-t\right)\left[\left(-\frac{7}{2}-t\right)\left(-\frac{1}{2}-t\right)(4-t)-3\left(-\frac{9}{2}\left(-\frac{1}{2}-t\right)\right)\right]=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-t\right)\left[\left(t^2+\frac{8}{2}t+\frac{7}{4}\right)(4-t)-\frac{27}{2}t-\frac{27}{4}\right]=\left(-\frac{1}{2}-t\right)\left[-t^3-4t^2-\frac{7}{4}t+4t^2+16t+7\right)+$$

$$-\frac{27}{2}t-\frac{27}{4}\Big]=\left(-\frac{1}{2}-t\right)\left(-t^3+\frac{13}{4}t+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-t\right)\left(-\frac{1}{2}-t\right)\left[\left(-\frac{7}{2}-t\right)(4-t)+\frac{27}{2}\right]=\left(-\frac{1}{2}-t\right)^2\left[t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right]=$$

$\lambda_1=-\frac{1}{2}$ $\qquad a_{\lambda_1}=$

$$\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}}{2}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}=1\\[2ex] \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\lambda_2=1$

$$P_A(t)=\left(-\frac{1}{2}-t\right)^2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-1)=\left(t+\frac{1}{2}\right)^3(t-1)$$

$$\left(\frac{1}{2}+t\right)^2$$

autovalori

$$\boxed{\begin{matrix}\lambda_1=-\frac{1}{2}\\ \lambda_2=1\end{matrix}}$$

$a_{\lambda_1}=3$

$a_{\lambda_2}=1 \implies g_{\lambda_2}=1$

$a_{\lambda_1}+a_{\lambda_2}=4=$ dim spazio vett.

$g_{\lambda_1}=4-rg(A-\lambda_1\mathbb{1}_4)$

$$A-\lambda_1 \mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4+\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A-\lambda_1 \mathbb{1}_4) = 1$ perchè ~~solo uno~~ le altre tre righe sono legate

$g_{\lambda_1} = 4-1 = 3 = a_{\lambda_1}$

La matrice A è diagonalizzabile

Per trovare una matrice invertibile trovo prima una base per l'autospazio A

$$S_{\lambda_1}: \begin{cases} -3a - \frac{3}{4}b + \frac{9}{2}c + \frac{3}{2}d = 0 \\ 0 = 0 \\ -3a - \frac{3}{4}b + \frac{9}{2}c + \frac{3}{2}d = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow S'_{\lambda_1}\left\{ -3a - \frac{3}{4}b + \frac{9}{2}c + \frac{3}{2}d = 0 \right.$$

$$\Downarrow$$

$$a = -\frac{1}{4}b + \frac{3}{2}c + \frac{1}{2}d$$

$$sol(S'_{\lambda_1}) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}s_1 + \frac{3}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4$$

$$B_{\lambda_1} = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{2}-1 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}-1 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4-1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_{\lambda_2}: \begin{cases} -\frac{9}{2}a - \frac{3}{4}b + \frac{9}{2}c + \frac{3}{2}d = 0 \\ -\frac{3}{2}b = 0 \\ -3a - \frac{3}{4}b + 3c + \frac{3}{2}d = 0 \\ -\frac{3}{2}d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2}a = -\frac{9}{2}c \\ b = 0 \\ +3c = +3a \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{0=0} \\ b = 0 \\ c = a \\ d = 0 \end{cases}$$

$$sol(S_{\lambda_2}) = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_1 \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4$$

$$B_{\lambda_2} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' := B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Downarrow$$

$D = M^{-1}AM$ per cui $M_{B',B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Prova del [redacted] 10/7/09

1) $S: \begin{cases} x - y + z = -\frac{1}{2} \\ -2x + y - w = 1 \\ -\frac{1}{2}y + z - \frac{1}{2}w = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} rg\,A(1;1) \neq 0 \\ rg\,A(1,2;1,2) = -1 \neq 0 \quad \Leftarrow rg = 2 \end{array}$$

$$rg\,A(1,2,3;1,2,3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1(1) + (1-2) = 0$$

$$rg\,A(1,2,3;1,2,4) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$rg\,A = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad rg\,B = (1,2,3;1,2,5) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & +1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$rg\,B = 2 = rg\,A \Rightarrow S$ è compatibile

$sol\,S = \infty^k$ dove $k = \#\text{incognite} - rg\,A = 4 - 2 = 2$

$$\Downarrow$$

$$sol(S) = \infty^2$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+2I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-\frac{1}{2}II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S': \begin{cases} x - y + z = -\frac{1}{2} \\ -y + 2z - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - w - \frac{1}{2} \\ y = 2z - w \end{cases} \qquad sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 - s_2 - \frac{1}{2} \\ 2s_1 - s_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Base di $Sol(S') = \left(\cancel{\begin{pmatrix} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \cancel{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$

N.B. nelle sol(S') bisogna "mettere a zero i termini noti altrimenti non troverei una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato (che è uno spazio vettoriale), ma solamente un certo numero di punti dell'insieme delle soluzioni del sistema di partenza

$\Downarrow$

Base di $Sol(S') = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

PROVA DEL 08/01/10

1) $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 : (x+2y, y+2z, x+\frac{5}{2}y+z, \frac{1}{2}x+2y+2z) = (0,0,0,0)\}$

$$S: \begin{cases} x+2y = 0 \\ y+2z = 0 \\ x+\frac{5}{2}y+z = 0 \\ \frac{1}{2}x+2y+2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{matrix} x=-2y \\ y=-4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-\frac{1}{2}I]{III-I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[III-\frac{1}{2}II]{IV-II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S': \begin{cases} x+2y=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$sol(S') = \left\{ \begin{pmatrix} 4s \\ -2s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^3$$

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 : x = 4z, y = -2z, z = 0\} = \{(0,0,0)\} = \{\bar{0}\}$

$\boxed{\operatorname{Im} f = L(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = L((1,0,1,\frac{1}{2}), (2,1,\frac{5}{2},2), (0,2,1,2))}$

un più

②

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4}\\ 1 & 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow P_A(t)=\begin{vmatrix}-1-t & -2 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-t & \frac{1}{4}\\ 1 & 1 & \frac{3}{2}-t\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}-t\right)-\left[\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t\right)+\frac{1}{2}\right]+\left(\frac{3}{2}-t\right)\left[(-1-t)\left(\frac{3}{2}-t\right)+1\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-t-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}t+\left(\frac{3}{2}-t\right)\left(t^2+t-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}+1\right)=$$

$$=+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}t+\left(\frac{3}{2}-t\right)\left(t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)=\cancel{1+\frac{1}{4}t+\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}-t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t}=$$

$$=\cancel{\frac{3}{4}}-\frac{3}{4}t+\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}t-\cancel{\frac{3}{4}}-t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t=$$

$$=-t^3+2t^2-t=t(-t^2+2t-1)$$

$$\boxed{t=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{-2}=1 \Rightarrow -(t-1)(t-1)=\cancel{(1-t)(t-1)}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\lambda_1=0\\ \lambda_2=1\end{matrix}} \leftarrow \text{autovalori} \qquad P_A(t)=-t(1-t)(1-t)=-t(1-t)^2$$

$a_{\lambda_1}=1 \Rightarrow g_{\lambda_1}=1$ $\qquad a_{\lambda_1}+a_{\lambda_2}=3=$ dim spazio vett.

$a_{\lambda_2}=2$

$g_{\lambda_2}=3-rg(A-\lambda_2\mathbb{1}_3)=3-rg(A-\mathbb{1}_3)$

$$\overset{C}{\overset{\parallel}{(A-\lambda_2\mathbb{1}_3)}}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$rg\,C(1,2;1,2)=0$

$rg\,C(1,2;1,3)=0$

$rg\,C(1,3;1,2)=0 \Rightarrow rg\,C=1$

$rg\,C(1,3;1,3)=0$

$g_{\lambda_2}=3-2=1\neq a_{\lambda_2}=2 \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile

③ Sappiamo che f è suriettiva $\iff \operatorname{Im} f = W$

PROVA DELL'08/07/2010

① $S: \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{9}x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \\ -3x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \end{cases}$ passando alla matrice dei coefficienti $\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & \frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III+9I}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & 2 & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III+6II} \left(\begin{array}{ccccc} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{4}{3} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow S': \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{9}x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \\ -4x_3 - \frac{4}{3}x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \cancel{-\frac{1}{3}x_4} + \cancel{\frac{1}{3}x_4} = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{3}x_4 \end{cases}$ $\quad Sol(S') = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}s \\ 0 \\ -\frac{1}{3}s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

una base può essere $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ e la dim è 3 perché sono tre le equazioni linearmente indipendenti

il sistema della traccia ~~non~~ è ridotto, mentre ~~quello~~ il sistema S' è ridotto

② $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_{(A)}(t) = \left| \begin{matrix} 2-t & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -t & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -t \end{matrix} \right| =$

$= -t\left[-t(2-t) + \frac{1}{2}\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right] = -t\left(t^2 - 2t + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}t = -t^3 + 2t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t =$

$= -t^3 + 2t^2 - t = -t(t^2 - 2t + 1) = -t(1-t)^2$

$\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}} \leftarrow$ autovalori $\qquad t^2 - 2t + 1 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$

$a_{\lambda_1} = 1 \Rightarrow g_{\lambda_1} = 1$

$a_{\lambda_2} = 2 \quad g_{\lambda_2} =$ dim spaz. vett $- rg(A - \lambda_2 \mathbb{1}_3) = 3 - rg(A - \mathbb{1}_3)$

$$A-\mathbb{1}_3=\begin{pmatrix}1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1\end{pmatrix}=C$$

$rg\, C(1,2;1,2)=-1+\frac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow rg\, C\geq 2$

$rg\, C(1,2,3;1,2,3)=-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

$\Downarrow$

$rg\, C=2$

$g_{\lambda_2}=3-2=1\neq a_{\lambda_2}=2 \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile

L'autospazio $V(\lambda_1)=V(0)$ è uguale alle soluzioni del sistema omogeneo $(A-\lambda_1\mathbb{1}_3)X=0 \Rightarrow AX=0$ cioè al sistema

$$T:\begin{cases}2a-\frac{\sqrt{2}}{2}b-\frac{\sqrt{2}}{2}c=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}a=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-c\end{cases}\quad Sol(T)=\left\{\begin{pmatrix}0\\-T\\T\end{pmatrix}, T\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

un autovettore è $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

L'autospazio $V(1)$ è uguale alle soluzioni del sistema omogeneo $(A-\lambda_2\mathbb{1}_3)X=0 \Rightarrow (A-\mathbb{1}_3)X=0$

$$E:\begin{cases}a-\frac{\sqrt{2}}{2}b-\frac{\sqrt{2}}{2}c=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}a-b=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}a-c=0\end{cases}\xRightarrow{\text{riduco il sistema a gradini}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[III-\frac{\sqrt{2}}{2}I]{II-\frac{\sqrt{2}}{2}I}\begin{pmatrix}1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{III+II}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a-\frac{\sqrt{2}}{2}b-\frac{\sqrt{2}}{2}c=0\\ -\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=c\end{cases}$$

$SOL(E)=\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\E\\E\end{pmatrix}, E\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$ un autovettore è $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}$

una base formata da autovettori di A è quindi $\{(0,-1,1),(\sqrt{2},1,1)\}$

3

BIANCO PAG 73

33) $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to (2x+y-z,\ y+z,\ 3z)\in\mathbb{R}^3$

dato che se V (lo spazio vett) è finitamente generabile e $B=\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ è una base di V, allora $\mathrm{Im}\, f = L(f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$, abbiamo che:

$$\mathrm{Im}\, f = L(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = L((2,0,0),(1,1,0),(-1,1,3))$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ x+y=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$ Questi 3 vettori che generano generano

---

$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2 \to (x,\ x+y,\ y)\in\mathbb{R}^3$

$\bar{v}=(x,y) \qquad \bar{w}=(x',y')$

$\bar{v}+\bar{w}=(x+x',\ y+y')$

$\boxed{f(\bar{v}+\bar{w}) = f(\bar{v})+f(\bar{w})}$ ← devo dimostrare

$f(\bar{v}+\bar{w}) = (x+x',\ x+y+x'+y',\ y+y')$

$f(\bar{v}) = (x,\ x+y,\ y) \qquad f(\bar{w}) = (x',\ x'+y',\ y')$

$f(\bar{v})+f(\bar{w}) = (x+x',\ x+y+x'+y',\ y+y')$

$\boxed{f(h\bar{v}) = h\, f(\bar{v})}$ ← devo dim.

$h\bar{v} = h(x,y) = (hx,\ hy)$

$f(h\bar{v}) = f(hx, hy) = (hx,\ hx+hy,\ hy)$

$$\begin{cases} x \equiv 2(5) \\ x \equiv 3(7) \\ x \equiv 7(9) \end{cases}$$

$x \equiv 2(5) \Rightarrow x - 2 = 5h \Rightarrow x = 5h + 2$

$5h + 2 \equiv 3(7) \Rightarrow 5h \equiv 1(7) \Rightarrow 5h - 1 = 7m$ $\Rightarrow$ segue fine quaderno

---

$h\, f(\bar{v}) = h(x, x+y, y) = (hx, hx+hy, hy)$

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 & \frac{1}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_3 \\ -x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}\, f = \left((0,1,-1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow I} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{III + I} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - II} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = 2 \neq$ dim spazio vett. $\Rightarrow f$ non è suriettiva

$$S \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \neq (0,0,0) \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f \neq 0$$

$\Downarrow$

f non è iniettiva

$$\mathrm{sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}n_2 - \frac{1}{2}n_3 = 0 \\ n_1 + \frac{1}{2}n_2 + \frac{1}{2}n_3 = 0 \\ -n_1 - \frac{1}{2}n_2 - \frac{1}{2}n_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_2 = n_3 \\ n_1 + \frac{1}{2}n_3 + \frac{1}{2}n_3 = 0 \\ -n_1 - \frac{1}{2}n_3 - \frac{1}{2}n_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cancel{\begin{cases} n_2 = n_3 \\ n_1 = -n_3 \\ n_3 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} n_2 = n_3 \\ n_1 = -n_3 \\ n_3 - \frac{1}{2}n_3 - \frac{1}{2}n_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_2 = n_3 \\ n_1 = -n_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$f:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x+2y\\ y+2z\\ x+\frac{5}{2}y+z\\ \frac{1}{2}x+2y+2z\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&\frac{5}{2}&1\\\frac{1}{2}&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{IV}-\frac{1}{2}\text{I}]{\text{III}-\text{I}}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&\frac{1}{2}&1\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{\text{III}-\frac{1}{2}\text{II}}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S':\begin{cases}x+2y=0\\y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4z\\y=-2z\end{cases}\qquad Sol(S')=\left\{\begin{pmatrix}4s\\-2s\\s\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$B=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ è una base del Ker f

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Ker } f = 0 \Rightarrow f \text{ è iniettiva}$$

$\text{Im } f = L((1,0,0),(0,1,0)\,(0,0,1)) = L((1,0,1,\frac{1}{2}),(2,1,\frac{5}{2},2),$
$(0,2,1,2))$

$aRb \iff a=b \quad a\cdot b=50$ relaz. di equi.?

aRb ~~rifl~~ rifless $\iff$ R è simm., rifless. e transitiva

- riflessiva

$aRa \quad a=a$ vero

- Simmetrica

$aRb \iff bRa$

$a=b \iff b=a$ vero

- transitiva

$$\left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right) \Rightarrow aRc$$

1) $a=b$ e $b=c \Rightarrow a=c$

2) $a=b$ e $bc=50 \Rightarrow ac=50$

3) $ab=50$ e $b=c \Rightarrow ac=50$

4) $ab=50$ e $bc=c \Rightarrow a=c$

$$\left.\begin{matrix} aRb \\ cRd \end{matrix}\right) \quad a+cRb+d \quad \text{SOMMA}$$

vogliamo dim. che: $a+c=b+d$ e $(a+c)(b+d)=50$

1) $a=b$ e $c=d \qquad a+c=b+d$

2) $a=b$ e $cd=50 \qquad (a+c)(b+d)=50$

controesempio: $a=b=2 \quad c=1 \quad d=50 \quad \neq 50 \Rightarrow$ rel non compat. con la somma

~~$aRb \iff a-b \in \mathbb{Z}$~~

aRb
cRd

$a \cdot c = b \cdot d$
$(a \cdot c)(b \cdot d) = 50$

1) $a = b$ e $b = d$

2) $a = b$ e $cd = 50$

$aRb \qquad a = 2b$ e $a \cdot b = \underline{12}$

$[0]_R = \{ n \in \mathbb{Z} : n = 0$ e $n \cdot 0 = 50 \} = \{0\}$

$[-3]_R = \{ n \in \mathbb{Z} : n = -3$ e $-3n = 50 \} = \{-3\}$

$[1]_R = \{ n \in \mathbb{Z} : n = 1$ e $n = 50 \} = \{1, 50\}$

$aRb \quad a = 2b$ opp. $a \cdot b = 12$

riflessiva

$aRa \qquad a = 2a$ falso

$aRb \iff a - b \in \mathbb{Z}$

$aRa \iff a - a = 0 \in \mathbb{Z}$

simmetrica

$aRb \iff bRa$

$a - b \in \mathbb{Z} \iff -(a-b) \in \mathbb{Z}$

transitiva

$\left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right) \; aRc \qquad \begin{matrix} a-b \in \mathbb{Z} \\ b-c \in \mathbb{Z} \end{matrix} \Rightarrow a - c \in \mathbb{Z}$

$a - c = (a-b) + (b-c)$

$1 + \ldots\ 2n-1 = n^2 \qquad \forall n \geq 1$

$1^2 + 2^2 + \ldots\ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \geq 1$

$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \Rightarrow 1 = 1$ Base d'induzione verif.

$\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots\ n^2}_{} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\cancel{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6n^2+6+12n}{6} =}$

$\cancel{= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6n^2+12n+6}{6} = \frac{2n^3+2n^2+n^2+n+6n^2+12n+6}{6} =}$

$\cancel{= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}}$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+2+1)}{6}$

1° membro

$\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$

2° membro

$(n^2+2+3n)(2n+3) = 2n^3+4n+6n+3n^2+6+9n =$

$= 2n^3+3n^2$

$2^n > n^2 \quad \forall n > 4 \quad Hp$

[illegible]

$2^5 > 5^2 \qquad 32 > 25$ BASE VERA

$2^{n+1} > (n+1)^2 = (n^2+2n+1)$

$\neg((\neg\varphi) \to (\psi \wedge (\neg\gamma))) = \neg(\neg\varphi \to (\psi \wedge \neg\gamma)) =$
$= \neg(\neg\varphi \to \psi \wedge \neg\gamma)$

$\models \neg\neg A$, $\neg A \vee B$ $\qquad \neg A \vee B$

A B	¬A	¬A ∨ B
0 0	1	1
0 1	1	1
1 0	0	0
1 1	0	1

$\neg\neg A$

A	¬A	¬¬A
0	1	0
1	0	1

coimplicazione

A B	A→B	B→A	(A→B)∧(B→A)
0 0	1	1	1
0 1	1	0	0
1 0	0	1	0
1 1	1	1	1

$DNF(g) = (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3)$
$CNF(g) = \neg X \vee \neg X_2 \vee X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3)$

Logica

La logica è lo studio dei meccanismi del ragionamento.
L'oggetto della logica sono le proposizioni o asserzioni

I connettivi sono $\vee$ (OR) $\wedge$ (AND) $\neg$ (NOT) $\rightarrow$ (implica)

Alfabeto logica proposizionale è composto da:
- Un insieme V di variabili proposizionali
- I connettivi: $\vee$ $\wedge$ $\neg$ $\rightarrow$
- Le parentesi "(" e ")"

Una formula della logica proposizionale è definita così:
i) ogni variabile è una formula
ii) Se P e Q sono formule allora $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(\neg P)$, $(P \rightarrow Q)$ sono ancora formule
iii) tutte le formule sono fatte in questo modo

Gerarchia dei connettivi:

$\neg$ poi $\wedge$ e $\vee$ poi $\rightarrow$

Albero di parsing
- la radice albero è la formula di partenza φ
- ogni nodo è un pezzetto di φ
- le foglie sono le variabili della formula

es. $\varphi = \neg(x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \wedge (x_2 \vee \neg x_1))$

Una valutazione delle variabili proposizionale è una funzione
$v: V \rightarrow \{0,1\}$ che assegna ad ogni variabile 0 (falso) opp. 1 (vero)

~~Una formula è soddisfacibile~~ TABELLE DI VERITÀ CONNETTIVI:

NOT

X	¬X
0	1
1	0

AND

A B	A∧B
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

OR

A B	A∨B
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

IMPLICAZIONE

A B	A→B
0 0	1
0 1	1
1 0	0
1 1	1

COIMPLICAZIONE

A B	A↔B
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$(A \rightarrow B) = \neg A \vee B$

Una formula si dice soddisfacibile se ha almeno un valore di verità uguale a 1. I valori delle variabili in corrispondenza di tale righe si ~~dicono~~ dice che soddisfano la formula. La valutazione che soddisfa la formula si chiama modello della formula

Tautologia: tutti i valori delle variabili di una formula la soddisfano e cioè ogni valutazione è un modello. Si indica così: $\boxed{\models}$

Contraddizione: tutti i valori delle variabili non soddisfano la formula e cioè nessuna valutazione è un modello. Si indica così: $\boxed{\not\models}$

Principio di induzione strutturale

Una proprietà A vale per tutte le formule P se

- A vale per tutte le variabili proposizionali (caso base)
- se A vale per la formula P allora A vale per $\neg P$
- se A vale per le formule P e Q allora A vale per $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$

La formula A implica logicamente la formula B se e solo se $A \rightarrow B$ è una tautologia

La formula A è ~~impl~~ logicamente equivalente se e solo se $A \leftrightarrow B$ è una tautologia e si scrive $\boxed{A \equiv B}$

Un insieme di formule Γ è soddisfacibile se esiste una interpretazione v tale che per ogni formula $A \in \Gamma$, $v(A)=1$
Una formula A è conseguenza (semantica) di un insieme di formule $\Gamma \models A$ se e solo se per ogni interpretazione v, per cui $v(B)=1$, $\forall B \in \Gamma$, è tale che $v(A)=1$
Teorema di deduzione $\{A_1, \dots A_n\} \models B$ se e solo se

$$\models (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \longrightarrow B$$

Un letterale è una variabile o la negazione di una variabile

Una formula è in CNF (forma normale congiuntiva) se è espressa come congiunzione di disgiunzioni di letterali, $(\neg X \vee Y) \wedge (X \vee Y)$ mentre è in DNF (forma normale disgiuntiva) se è espressa come disgiunzioni di congiunzioni di letterali $(\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge Y)$

Un insieme di connettivi che permette di scrivere tutte le tabelle di verità si chiama insieme sufficiente di connettivi. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ lo è!
Anche $\{\neg, \wedge\}$ e $\{\neg \vee\}$ lo sono, anche $\{NOR\}$

Asserzioni categoriche: ogni, qualche, nessuno
Quantificatori: $\forall$ (per ogni), $\exists$ (esiste)
Predicati; Costanti; Variabili

$\Big\}$ Logica del primo ordine

Verificare che:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \forall\, n \geq 1$$

Base d'induzione: $n=1$

$$1^3 = \frac{(1+1)^2 \cdot 1^2}{4} \Rightarrow 1=1 \quad \text{VERA}$$

Th

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

1° membro

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2+[n^2+4(n+1)]}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2+n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+1)^2+(n+2)^2}{4}$$ → è uguale al 2° membro

⇓

L'induzione è verificata

$$2^n > n^2 \qquad \forall\, n > 4$$

$n=5$ Base d'induzione

$$2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25 \quad \text{VERO}$$

Th

$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

sapendo che $n^2 > 2n+1$

$$2^{n+1} > n^2+2n+1$$

$$2^n \cdot 2 > n^2+2n+1$$

$2^n > n^2$ dall'ipotesi

$$2 \cdot 2^n > 2n^2 = n^2+n^2 \qquad n^2 > 2n+1$$

uguale

$$\Downarrow$$

$$n^2+n^2 > n^2+2n+1$$

quindi posso scrivere: $2 \cdot 2^n > 2n^2 = n^2+n^2 > n^2+2n+1 = (n+1)^2$ c.v.d.

VERIFICARE CHE:

$n^2 > 2n+1 \quad \forall n > 2$ Hp

Base d'induzione

$P(3)$: $3^2 > 2\cdot 3+1 \Rightarrow 9 > 7$ VERA

Th $(n+1)^2 > 2(n+1)+1 \Rightarrow (n+1)^2 > 2n+3$

sapendo che $(n+1)^2 = n^2+2n+1$, parto dall'ipotesi dicendo che $n^2 > 2n+1$ aggiungo la quantità $2n+1$ ad entrambi i membri

$n^2+2n+1 > (2n+1)+2n+1$

$n^2+2n+1 > 2n+3+2n-1$

faccio in modo da ottenere $2n+3$ aggiungendo e sottraendo 2 al 2mem.

$$\underbrace{n^2+2n+1}_{=(n+1)^2} > 2n+3+2n-1$$

$\Downarrow$

$(n+1)^2 > 2n+3$ VERA

la quantità $2n-1$, essendo $n>2$, sarà certamente positiva; quindi sommando $2n+3$ a ~~questa quantità positiva~~ $2n-1$ avrò una quantità maggiore di $2n+3$; cioè

$\boxed{2n+3+2n-1 > 2n+3}$

$n^2+2n+1+\cancel{2}-\cancel{2} > (2n+1)+(2n+1)+2-2$

$n^2+2n+1 > 2n+3+2n-1$

~~$n+1$ 8~~

~~$n+3$~~

Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f(n) = \frac{n}{2}$ se $n \in \mathbb{N}$ è pari e $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ se $n \in \mathbb{N}$ è dispari.
Si provi che è una biezione

f è iniettiva $\iff \forall x, y \in \mathbb{N},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
$\iff \forall x, y \in \mathbb{N},\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$$f(n) = f(n') : \begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{n'}{2} & \text{per } n \text{ pari} \\ -\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{n'}{2} \Rightarrow n = n' & \text{vero} \\ -\frac{n}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} = -\frac{n'}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} \Rightarrow n = n' & \text{vero} \end{cases}\right\} \Rightarrow f \text{ è iniettiva}$$

f è suriettiva $\iff \forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N} : y = f(x)$

$$f \text{ suriettiva} \iff \forall y \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N} : \begin{cases} y = \frac{n}{2} & \forall n \text{ pari} \\ y = -\frac{n+1}{2} & \forall n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 2y \\ y = -\frac{n+1}{2} \Rightarrow -2y - 1 = n \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è suriettiva}$$

f è sia iniettiva che suriettiva $\Rightarrow f$ è biettiva

$f: x \in \mathbb{Z} \to -\frac{x}{5} \in \mathbb{Q}$ verificare se è biettiva e trovare

i) $f(\{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\})$

ii) $f^{-1}(\{-\frac{4}{3}, -1, 0, \frac{2}{5}, 20\})$

f iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$-\frac{x}{5} = \frac{y}{-5} \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$ VERO $\Rightarrow f$ è iniettiva

f è suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{Z} : y = f(x)$

$y = -\frac{x}{5} \Rightarrow x = -5y \Rightarrow f$ è suriettiva

f è biettiva

i) $f(\{-7, -2, -1, 0, 1, 2, 7\}) = \{\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{7}{5}\}$

ii) $f^{-1}(\{-\frac{4}{3}, -1, 0, \frac{2}{5}, 20\}) = \{0, 5, -2, -100\}$

$-\frac{4}{3} = -\frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{20}{3} \leftarrow \notin \mathbb{Z}$

$-1 = -\frac{x}{5} \Rightarrow x = 5$

$0 = -\frac{x}{5} \Rightarrow x = 0$

$\frac{2}{5} = -\frac{x}{5} \Rightarrow x = -2$

$20 = -\frac{x}{5} \Rightarrow x = -100$

$f: x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{x}+3 \in \mathbb{R}$ biettiva?

f iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

$\frac{1}{x}+3 = \frac{1}{y}+3 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow \cancel{x}y \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = x\cancel{y} \frac{1}{\cancel{y}} \Rightarrow x=y$

f è iniettiva

f suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: y=f(x)$

$y = \frac{1}{x}+3 \Rightarrow \cancel{y}\frac{x}{\cancel{y}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}+3 \Rightarrow x = \frac{1}{y}+3 \Rightarrow f$ è suriettiva

f è biettiva

$f: x \in \mathbb{Z} \rightarrow |x|+9 \in \mathbb{Z}$ biettiva?

f iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z},\ f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

$|x|+9 = |y|+9 \Rightarrow |x| = |y| \qquad x = \pm|y| \Rightarrow f$ non è iniettiva

f suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}: f(x)=y$

$|x|+9 = y \Rightarrow \begin{cases} x = y-9 & \forall x \geq 0 \\ x = 9-y & \forall x < 0 \end{cases} \Rightarrow f$ è suriettiva

f non è biettiva

MCD(54, -22)

dati $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ $\exists!\, q, r \in \mathbb{Z}$:

$a = b \cdot q + r$ con $0 \leq r < |b|$

$\Downarrow$

$54 = -22 \cdot (-2) + 10$

$\cancel{-22 = 10 \cdot (-2) \boxed{-2}}$ ← ERRATO ~~x~~ r non può essere < 0

$\cancel{10 = -2 \cdot (-5) + 0}$

$-22 = 10 \cdot (-3) + 8$

$10 = 8 \cdot 1 + \boxed{2}$ MCD(54, -22) = 2

$8 = 2 \cdot 4 + 0$

MCD(1369, 1807)

$1807 = 1369 \cdot 1 + 438$

$1369 = 438 \cdot 3 + 55$

$438 = 55 \cdot 7 + 53$

$55 = 53 \cdot 1 + 2$ MCD(1369, 1807)

$53 = 2 \cdot 26 + \boxed{1}$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$299x \equiv 52 (247)$ $\qquad a = 299$; $b = 52$; $m = 247$

$MCD(299, 247) = 13$ $\qquad d = MCD$

$299 = 247 \cdot 1 + 52$

$247 = 52 \cdot 4 + 39$ $\qquad d | b$ cioè 13 divide 52?

$52 = 39 \cdot 1 + \boxed{13}$ $\qquad 52 : 13 = 4$ SI $\Rightarrow$ eq. ha soluzioni, con esattezza 13 soluzioni

$39 = 13 \cdot 3 + 0$

$$x_0 = \frac{b}{d} u = \frac{52u}{13} = 4u$$

sapendo che il $MCD(a, b) = au + bv$

$13 = 52 - 39 = 52 - (247 - 52 \cdot 4) = 52 \cdot 5 - 247 = (299 - 247) 5 - 247 =$
$= 299 \cdot 5 - 247 \cdot 5 - 247 = 299 \cdot 5 - 247 \cdot 6 = 299 \cdot \underset{u}{5} + 247(-6)$

$u = 5 \Rightarrow x_0 = 4 \cdot 5 = 20$

$299x \equiv 52 (247) \Rightarrow 299x - 52 = K \cdot 247 \Rightarrow$

$\Rightarrow K = \dfrac{299 \cdot 20 - 52}{247} \Rightarrow K = 24$

$12x \equiv 39 (93)$

$a = 12$

$b = 39$

$m = 93$

$12x - 39 = K \cdot 93$

$d = MCD(12, 93)$

$93 = 12 \cdot 7 + 9$

$12 = 9 \cdot 1 + \boxed{3}$

$9 = 3 \cdot 3 + 0$

$d | b$?

$d = 3$ 3 divide 39? SI $\Rightarrow \exists$ sol.

$x_0 = \frac{b}{d} u = \frac{39}{3} u = 13u$

$d = au + bv$

ora troviamo quanto vale u

$3 = 12 - 9 = 12 - (93 - 12 \cdot 7) = 12 \cdot 8 - 93 = 12 \cdot \underset{u}{8} + 93(-1)$

$u = 8 \Rightarrow x_0 = 13 \cdot 8 = 104 \mod 93$

$12 \cdot 104 - 39 = 93K \Rightarrow K = 13$

questa è una delle 3 soluzioni

$104 = 93 \cdot 1 + 9$

$104 \equiv 9 (93)$

$7x \equiv 24 \ (41)$ $\quad a = 7 \ ; \quad b = 24 \ ; \quad m = 41$

$41 = 7 \cdot 5 + 6$ $\quad MCD(7, 41) = 1 = d$

$7 = 6 \cdot 1 + \boxed{1}$

$6 = 1 \cdot 6 + 0$

1 divide 24? SI $\Rightarrow$ l'eq. ammette soluzioni, precisam. 1

$x_0 = u \cdot \frac{b}{d}$

$1 = 7 - 6 = 7 - (41 - 7 \cdot 5) = 7 \cdot 6 - 41 = 7 \cdot 6 + 41(-1)$

$u = 6$

$x_0 = 6 \cdot \frac{24}{1} = 144$ $\quad$ mod 41 $\qquad$ 7y

$144 = 41 \cdot 3 + 21$

$144 \equiv 21 \ (41)$

BOFFA

$an \equiv b(m)$

$7x \equiv 24(41)$

$$x_0 = \frac{b}{d}u$$

$MCD(7,41) = 1$

$41 = 7 \cdot 5 + 6$

$7 = 6 \cdot 1 + \boxed{1}$

$6 = 1 \cdot 6 + 0$

$$\underset{1}{\overset{\shortparallel}{MCD}}(a,m) = ua + vm$$

$1 = 7 - 6 \cdot 1 = 7 - (41 - 7 \cdot 5) = 7 - 41 + 7 \cdot 5 = 7 \cdot 6 - 41 = 7 \cdot 6 + 41(-1)$

$x_0 = \frac{24}{1} \cdot 6 = 144$

$S = [x_0]_m = [144]_{41} = [21]_{41}$

$[x]_m = [resto(x,m)]_m$

$144 = 41 \cdot 3 + 21$

[redacted]

$6x \equiv 12(15)$ $\quad 3|12$ (3 divide 12)

$\Downarrow$

$MCD(6,15) = 3$ eq. ammette soluzioni

$15 = 6 \cdot 2 + 3$

$6 = 3 \cdot 2 = 0$

In $\mathbb{Z}_{15}$ abbiamo 3 classi di equivalenza

$x_0 = \frac{12}{4} u = 4u$

$3 = 15 - 6 \cdot 2 = (-2) \cdot 6 + (1) \cdot 15 \Rightarrow u = -2$

$x_0 = 4 \cdot (-2) = -8 \Rightarrow [x_0]_{15} = [-8]_{15}$

$$[-x]_m = [m-x]_m$$

$$\Downarrow$$

$$[x_0]_{15} = [-8]_{15} = [15-8]_{15} = [7]_{15}$$

$$x_1 = x_0 + 1 \cdot \frac{15}{3} = -8 + 5 = -3$$

$$[x_1]_{15} = [-3]_{15} = [15-3]_{15} = [12]_{15}$$

$$x_2 = -8 + 2 \cdot \frac{15}{3} = -8 + 2 \cdot 5 = 2$$

$$[x_2]_{15} = [2]_{15}$$

$$S_{\mathbb{Z}} = [2]_{15} \cup [7]_{15} \cup [12]_{15}$$

$$S_{\mathbb{Z}_{15}} = \{[2]_{15}, [7]_{15}, [12]_{15}\}$$

$$\begin{cases} x \equiv -5 \mod 7 \\ x \equiv 6 \mod 13 \\ x \equiv -7 \mod 23 \end{cases}$$

1) verificare se il sist. ammette sol. MCD(7, 13), MCD(7, 23) MCD(13, 23)

$= 1$

$\Downarrow$

devono essere coprimi

$\Downarrow$

$\exists$ sol.

$x \equiv -5 (7) \iff x = -5 + 7K,\ K \in \mathbb{Z}$

$-5 + 7K \equiv 6 (13) \implies 7K \equiv 11 (13)$

ora risolvo come un'eq. congr. classica

$MCD(7,13) = 1$

$13 = 7 \cdot 1 + 6$

$7 = 6 \cdot 1 + \boxed{1}$

$6 = 6 \cdot 1 \cdot 0$

$$x_0 = \frac{b}{d} \mu = \frac{11}{1} \mu = 11 \mu$$

$1 = 7 - 6 \cdot 1 = 7 - (13 - 7 \cdot 1) = 7 \cdot \underset{\mu}{2} + 13(-1)$

$x_0 = 11 \cdot 2 = 22$

$[x_0]_{13} = [22]_{13} = [\text{resto}(22, 13)]_{13} = [9]_{13}$

$22 = 13 \cdot 1 + 9$

$\boxed{\text{scrivere } [9]_{13} = x \equiv 9 (13)}$

$[9]_{13} = \{9 + 13h,\ h \in \mathbb{Z}\}$

$K = 9 + 13h$ lo sostituisco nella 1° eq. $x = -5 + 7K$

$\Downarrow$

$x = -5 + 7(9 + 13h) = 58 + 91h,\ h \in \mathbb{Z}$

ora sostituisco nella 3° eq.

$58 + 91h \equiv -7 (23)$

$91h \equiv -65 (23)$ ora potrei risolverla, ma voglio semplificare

$91 = 23 \cdot 3 + 22$

quindi ottengo

$22 \equiv -65 (23)$ ora faccio lo stesso con -65 quindi

$22h \equiv -19 (23)$ $-65 = (-2) \cdot 23 - 19$

ora continuo a semplificare

$22h \equiv 4 (23)$

$11h \equiv 2 (23)$

$x_0 = \frac{b}{d} u = 2u$

$23 = 11 \cdot 2 + \boxed{1}$ $1 = (-2) 11 + 23 (1)$

$11 = 11 \cdot 1 + 0$

$x_0 = -2 \cdot 2 = -4$

$[x_0]_{23} = [-4]_{23} = [23-4]_{23} = [19]_{23} = \{19 + 23t, t \in \mathbb{Z}\}$

ora sost. ↑ nella eq. $58 + 91h \equiv -7 (23)$

quindi ottengo

$x = 58 + 91k = 58 + 91(19 + 23t) = 58 + 1729 + 2093k = 1787 + 2093k$ cioè $[1787]_{2093}$

e faccio la prova ottengo

$1787 + 5 = 7k \Rightarrow 1792 = 7k$ ← sostituendo con il valore 1787 (1ª eq)

$1787 - 6 = 13k$ ← " " " " " (2ª eq)

$1787 + 7 = 23k$ ← " " " " " (3ª eq)

VERO

$\mathcal{R}$ in $\mathbb{Z}$

$x, y \in \mathbb{Z}$ è una rel. d'equivalenza?

$x \mathcal{R} y \iff \exists K \in \mathbb{Z} : x = y + 8K \iff x - y = 8K, K \in \mathbb{Z} \iff$

$\iff (x-y) \in 8\mathbb{Z} \iff 8 \mid (x-y)$

dim. che è una rel. d'equivalenza

$\mathcal{R}$ riflessiva $\iff x \mathcal{R} x \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

$x \in \mathbb{Z} \; \exists K = 0 : x = x + 8 \cdot 0$ vera

$\mathcal{R}$ simmetrica $\iff x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

$x \mathcal{R} y \iff \exists K \in \mathbb{Z} : x = y + 8K \Rightarrow -y = -x + 8K \Rightarrow y = x - 8K = x + 8(-K)$

$y \mathcal{R} x \iff \exists h \in \mathbb{Z} ; y = x + 8h$

$\mathcal{R}$ transitiva $\iff \left.\begin{matrix} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{matrix}\right) \Rightarrow x \mathcal{R} z$ con $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Th $x \mathcal{R} z \iff \exists t \in \mathbb{Z} : x = z + 8t$

$x \mathcal{R} y \Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z} : x = y + 8K$

$y \mathcal{R} z \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} ; y = z + 8h$

$x = z + 8h + 8K = z + 8(K + h)$

è compatibile con la somma?

$S, +, \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ compatibile $+$ in $S \iff \left(\begin{matrix} \forall a, b, c, d \in S \\ a \mathcal{R} b \\ c \mathcal{R} d \end{matrix} \Rightarrow (a+c) \mathcal{R} (b+d)\right.$

$x \in \mathbb{N} \to \frac{x-3}{3x} \in \mathbb{Q}$ iniettiva? suriettiva?

$x, y \in \mathbb{N}$ $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\frac{x-3}{3x} = \frac{y-3}{3y} \Rightarrow \frac{\cancel{x}}{3\cancel{x}} - \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}x} = \frac{\cancel{y}}{3\cancel{y}} - \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}y} \Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$

f suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{N} : f(x) = y$

$y = \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{N} : \frac{x-3}{3x} = y \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{x} = y \Rightarrow -\frac{1}{x} = y - \frac{1}{3} \Rightarrow$

$-\frac{1}{x} = \frac{3y-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{3y-1}{3} \Rightarrow x = -\frac{3}{3y-1}$ non è vera $\forall y$

$\Downarrow$

f non è suriett

TROVARE L'IMMAGINE

$f(\{1, 2, 5, 10\})$

$f(1) =$

TROVARE LA CONTROIMM.

$f^{-1}\left(\left\{-\frac{5}{3}, -1, -\frac{2}{3}\right.\right.$

$f^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)$ $x : f(x) = -\frac{5}{3} = \frac{x-3}{3x} \Rightarrow -\frac{5}{3} = \frac{x}{3x} - \frac{3}{3x} \Rightarrow -\frac{5}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x} \Rightarrow$

$f : (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \to (x-y, x+y, 0) \in \mathbb{Q}^3$ trovare una base e la dim. di Im f

$\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) : f(x,y)\} = (x-y, x+y, 0\}$

$f(1,0) = (1,1,0)$
$f(0,1) = (-1,1,0)$

$\mathrm{Im} f = \langle f(1,0), f(0,1) \rangle = \langle (1,1,0), (-1,1,0) \rangle$

una base $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ opp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$f:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ \frac{4}{5}x \ \frac{9}{5}y \ \frac{2}{5}z \\ \frac{2}{5}x \ \frac{2}{5}y \ \frac{1}{5}z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{9}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad P_A(t) = \Big($$

$$\begin{cases} x \equiv 2\,(5) \\ x \equiv 3\,(7) \\ x \equiv 7\,(9) \end{cases}$$

$257 \equiv 2(5) \iff$

$257 = 2 + 5k$

$\iff 257 - 2 = 5k$

$255 = 5k$

$\boxed{x = 2 + 5k}$ (1)

$2 + 5k \equiv 3(7)$

$5k \equiv 1(7)$ $\leftarrow$ $x_0 = \frac{b}{d}u = \frac{1}{1}u = u$

$MCD(5,7) = 1$

$7 = 5 \cdot 1 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + \boxed{1}$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$1 = 5 - (2 \cdot 2) = 5 - 2 \cdot [7 - (5 \cdot 1)] = 5 - (7 \cdot 2) + 5 \cdot 2 =$

$= 5(3) + 7(-2) \Rightarrow u = 3$

$x_0 = 1 \cdot 3 = 3$

$[x_0]_7 = [3]_7$

$k = 3 + 7h, \; h \in \mathbb{Z}$

sostituisco in (1) $\rightarrow x = 2 + 5(3 + 7h) = 2 + 15 + 35h = 17 + 35h$ (*)

ora sostituisco $17 + 35h$ nella 3ª eq. del sist.

$17 + 35h \equiv 7(9) \Rightarrow 35h \equiv -10(9)$

ora semplifichiamo perché $35 > 9$ $(a > m)$

$35 = 9 \cdot 3 + 8$ sostituisco il resto al posto di 35

$8h \equiv -10(9)$ continuo a semplificare [redacted] $[-n]_9 = [m-n]_9 = [9-10]_9 = [-1]_9$

$8h \equiv 4 (9)$

se a e b sono multipli (in questo caso lo sono) e l'elemento per cui vogliamo dividere è coprimo con m possiamo dividere (voglio dividere per 4; 4 e 9 sono coprimi quindi posso)

$\Downarrow$

$4h \equiv 1 (9)$

~~$4h = 1 + 9m$~~

MCD$(4,9) = 1$

$9 = 4 \cdot 2 + \boxed{1}$

$4 = 2 \cdot 2 + 0$

$k_0 = \frac{b}{d} u = \frac{1}{1} u = u$

$1 = 9 - 4 \cdot 2 = 4(-2) + 9(1)$

$\downarrow$
u

$k_0 = -2 \qquad [-2]_9 = [9-2]_9 = [7]_9 = \{ 7 + 9t, \; t \in \mathbb{Z} \}$

$(*) = 12 + 35 (7 + 9t) =$

$= 12 + 245 + 315t$

$257 + 315t$

$[257]_{315} \quad t \in \mathbb{Z}$

$f = (\neg x \to y) \to \neg Z) \wedge (\neg y \vee Z)$

$n = (8, 2)$

$P_1(a, b) =$ "a divide b"

i) $\forall v \left(\left(P_1(v, v_1) \wedge \neg P_2(v, v_2) \right) \to P_3(v) \right)$

ii) $\exists v$ " " " " "

~~Se~~ per ogni numero naturale ~~[illegible]~~ v, v divide 8 e v è maggiore di 2 allora v ~~[illegible]~~ è primo

l'antecedente è vero solo per $v = 4$ e $v = 8$ ma nè 4, nè 8 sono num. primi quindi l'implicazione è falsa