

Matematica Discreta e Logica Matematica
Cl. 2 (matr. congrua 1 mod 3)
A.A. 2011/2012

Appello del 24 Febbraio 2012
Compito C

Cognome e Nome Matricola

1) Considerare il sistema lineare reale

$$S : \begin{cases} 2x & -y & +z & = & 1 \\ -x & & +2z & = & 1 \\ \frac{1}{2}x & -y & -z & = & 1 \end{cases} .$$

Dimostrare che S è compatibile mediante il teorema di Rouché-Capelli e risolverlo con il metodo di Gauss.

2) Dimostrare che la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

3) Dopo aver richiamato la definizione di applicazione lineare, dimostrare che l'applicazione

$$f : \mathbb{Q}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$$

non è lineare.

4) Sia φ la seguente formula:

$$x \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow \neg x).$$

- (i) Scrivere la tavola di verità di φ , dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.
- (ii) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ .
- (iii) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

5) Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (16)$ una valutazione della variabile v_1 . Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come “ a è un numero primo”;

$P_2(a)$ interpretato come “ a è un numero pari”;

$P_3(a, b)$ interpretato come “ a divide b ”.

Interpretare, nel dominio \mathbb{N} , mediante la valutazione e le interpretazioni assegnate, le seguenti formule e dire se sono vere o false motivando la risposta.

$$(i) \mathbb{N} \models_x \forall v((P_2(v) \wedge P_3(v, v_1)) \rightarrow P_1(v)).$$

$$(ii) \mathbb{N} \models_x \exists v((P_2(v) \wedge P_3(v, v_1)) \rightarrow P_1(v)).$$

6) Si dimostri per induzione su n che:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

per ogni $n \geq 1$.

- 7) Si consideri la relazione R sull'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi relativi definita, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se} \quad a = b \text{ oppure } ab = 15.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare

- i)* $[0]_R =$
- ii)* $[1]_R =$
- iii)* $[-3]_R =$
- iv)* $[15]_R =$
- v)* $[5]_R =$

Stabilire, infine, se è compatibile con l'addizione e con la moltiplicazione in \mathbb{Z} .

8) Si risolva in \mathbb{Z} il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv -2 \pmod{15} \end{cases}$$

Determinare, poi, utilizzando l'algoritmo di Euclide il MCD tra 660 e 4500.