Matematica Discreta e Logica Matematica
Cl. 2 (matr. congrua 1 mod 3)
A.A. 2011/2012

Appello del 20 Aprile 2012
Compito A

Cognome e Nome .... Matricola ....

1) Risolvere il sistema razionale

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & -2z & = & -3 \\ 3x & +y & & = & -1 \end{cases}$$

con il metodo di Gauss.

2) Dimostrare che la matrice reale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Trovare una base diagonalizzante.

3) Dopo aver richiamato la definizione di sottospazio vettoriale, dare un esempio di sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ che NON è un sottospazio vettoriale.

4) Sia φ la seguente formula:

$$(x \vee \neg(y \to z)) \to (\neg x \wedge z).$$

(i) Scrivere la tavola di verità di φ, dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.

(ii) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ.

(iii) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

5) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (9)$ una valutazione della variabile v_1. Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come "a è una potenza di 10";

$P_2(a)$ interpretato come "a ha uno zero come ultima cifra";

$P_3(a, b)$ interpretato come "a è maggiore di b".

Interpretare, nel dominio $\mathbb{N}$, mediante la valutazione e le interpretazioni assegnate, le seguenti formule e dire se sono vere o false motivando la risposta.

(*i*) $\mathbb{N} \models \forall v((P_1(v) \wedge \neg P_3(v, v_1)) \to \neg P_2(v))$.

(*ii*) $\mathbb{N} \models \exists v((P_1(v) \wedge \neg P_3(v, v_1)) \to \neg P_2(v))$.

6) Si consideri la seguente funzione

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2+1} \in \mathbb{R}.$$

Dopo aver calcolato

i) $f(\{-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{11}, \frac{13}{3}, 10\}) =$

ii) $f^{-1}(\{-10, -3, 0, \frac{2}{3}, 3, \sqrt{10}, \frac{15}{4}\} =$

stabilire se f è iniettiva o suriettiva.

7) Si consideri la relazione R sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi definita, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se} \quad a = b \text{ oppure } ab = 24.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare

i) $[0]_R =$

ii) $[1]_R =$

iii) $[-3]_R =$

iv) $[7]_R =$

v) $[-8]_R =$

Stabilire, infine, se è compatibile con l'addizione e con la moltiplicazione in $\mathbb{Z}$.

8) i) Si risolva in $\mathbb{Z}$ il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv -7 \mod 11 \\ x \equiv 2 \mod 13 \\ x \equiv 5 \mod 6 \end{cases}$$

ii) Determinare, poi, utilizzando l'algoritmo di Euclide, il MCD tra 75 e 2450. Scrivere, poi, il MCD ottenuto come combinazione lineare di 75 e 2450.