

Matematica Discreta e Logica Matematica
Cl. 2 (matr. congrua 1 mod 3)
A.A. 2011/2012

Appello del 17 Gennaio 2012
Compito C

Cognome e Nome Matricola

1) Sia φ la seguente formula:

$$((\neg x \wedge \neg y) \vee z) \rightarrow (x \wedge \neg y).$$

- (i) Scrivere la tavola di verità di φ , dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.
- (ii) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ .
- (iii) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

Cognome e Nome Matricola

2) Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (2, 11)$ una valutazione delle variabili v_1, v_2 . Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come “ a è primo”;

$P_2(a, b)$ interpretato come “ a è potenza di b ”;

$P_3(a, b)$ interpretato come “ $a \geq b$ ”.

Interpretare, nel dominio \mathbb{N} , mediante la valutazione e le interpretazioni assegnate, le seguenti formule e dire se sono vere o false motivando la risposta.

(i) $\forall v(P_1(v) \rightarrow (\neg P_2(v, v_1)) \vee P_3(v, v_2))$.

(ii) $\exists v(P_1(v) \rightarrow (\neg P_2(v, v_1)) \vee P_3(v, v_2))$.

Cognome e Nome Matricola

3) Si risolva in \mathbb{Z} la seguente equazione congruenziale

$$12x \equiv 21 \pmod{81}$$

Cognome e Nome Matricola

- 4) Si consideri la relazione R sull'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi relativi definita, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se esiste } k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = y + 9k.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare

i) $[0]_R =$

ii) $[1]_R =$

iii) $[10]_R =$

iv) $[81]_R =$

Stabilire, infine, se è compatibile con l'addizione e con la moltiplicazione in \mathbb{Z} .

Cognome e Nome Matricola

5) Si consideri la seguente funzione

$$f : x \in \mathbb{Q} \rightarrow x^2 + 3x - 10 \in \mathbb{Q}.$$

Si determini

i) $f(\{-5, -3, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\})$

ii) $f^{-1}(\{-10, 0, \frac{2}{3}, 4, 8\})$

Si stabilisca se f è iniettiva o suriettiva.

Cognome e Nome Matricola

6) Considerare il sistema lineare razionale

$$S : \begin{cases} 2x & -y & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ x & -y & -2z & = & 0 \\ x & & 2z & = & -1 \end{cases} .$$

Dopo aver verificato che può essere risolto con il metodo di Cramer, applicare tale metodo.

Cognome e Nome Matricola

7) Dimostrare che la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile e determinare un sistema massimale di autovettori di A .

Cognome e Nome Matricola

8) Considerare l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{Q}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \frac{4}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3$$

Determinare la dimensione e una base per $\text{im } f$. f è suriettiva? Argomentare la risposta