

Esame di Matematica Discreta e Logica Matematica.
Prova scritta del 06 febbraio 2012
Compito D

Cognome e Nome Matricola

1) Sia φ la seguente formula:

$$(\neg x \rightarrow y) \wedge ((\neg y \rightarrow z) \rightarrow x).$$

- (i) Scrivere la tavola di verità di φ , dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.
- (ii) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ .
- (iii) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

Cognome e Nome Matricola

2 Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (12)$ una valutazione della variabile v_1 . Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come “ a è un numero primo”;

$P_2(a)$ interpretato come “ a è un numero pari”;

$P_3(a, b)$ interpretato come “ a divide b ”.

Interpretare, nel dominio \mathbb{N} , mediante la valutazione e le interpretazioni assegnate, le seguenti formule e dire se sono vere o false motivando la risposta.

(i) $\mathbb{N} \models_x \forall v((P_2(v) \wedge P_3(v, v_1)) \rightarrow P_1(v))$.

(ii) $\mathbb{N} \models_x \exists v((P_2(v) \wedge P_3(v, v_1)) \rightarrow P_1(v))$.

Cognome e Nome Matricola

3) Si risolva in \mathbb{Z} il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv -2 \pmod{5} \end{cases}$$

Cognome e Nome Matricola

- 4) Si consideri la relazione R sull'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi relativi definita, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se } a = b \text{ oppure } ab = 32.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare

i) $[0]_R =$

ii) $[2]_R =$

iii) $[16]_R =$

iv) $[9]_R =$

Stabilire, infine, se è compatibile con l'addizione e con la moltiplicazione in \mathbb{Z} .

Cognome e Nome Matricola

5) Si dimostri per induzione su n che:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$.

Si calcoli, inoltre, il $MCD(921, 63)$ mediante l'algoritmo euclideo delle divisioni successive.

Cognome e Nome Matricola

6) Considerare l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x & +2y & +z & +3w \\ x & +y & -z & +w \\ -4x & -y & +4z & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare la dimensione e un base di $\ker f$.

Cognome e Nome Matricola

7) Dimostrare che la matrice razionale

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e determinarne una base diagonalizzante.

Cognome e Nome Matricola

- 8) Dopo aver richiamato la definizione di base e di dimensione di uno spazio vettoriale, dimostrare che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base di \mathbb{R}^2 .