Matematica Discreta e Logica Matematica
CdL in Informatica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Università degli Studi di Salerno
A.A. 2008/2009
Compito d'Esame di Geometria
23/01/2009

Esercizio 1. Dimostrare, mediante il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema lineare razionale

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & -x_4 & = & 1 \\ & +x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & -x_2 & & -\frac{1}{2}x_4 & = & 4 \\ -x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

è incompatibile, mentre il sistema

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & -x_4 & = & 1 \\ & +x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & -x_2 & & -\frac{1}{2}x_4 & = & 4 \end{array} \right.$$

ottenuto da S eliminando l'ultima equazione è compatibile. Quindi determinare nell'ordine 1) il "numero di soluzioni di S_1" 2) l'insieme $\mathrm{Sol}(S_1)$ delle soluzioni di S_1.

Esercizio 2. Dimostrare, mediante il teorema spettrale, che l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 \\ \frac{3}{2}x_2 - 3x_3 + 3x_4 \\ -\frac{3}{2}x_1 \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

è diagonalizzabile e determinarne una base diagonalizzante.

Esercizio 3 (facoltativo). Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $f_1, f_2 : V \longrightarrow W$ applicazioni lineari. Dimostrare che l'applicazione

$$f_1 + f_2 : V \ni v \longmapsto (f_1 + f_2)(v) := f_1(v) + f_2(v) \in W,$$

è lineare.

Soluzioni

Esercizio 1. Siano A e B rispettivamente la matrice incompleta e la matrice completa del sistema S. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema S è compatibile sse $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$. Calcoliamo innanzitutto $\operatorname{rk} A$ mediante il teorema degli orlati. $\det A(1,1) = 1 \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 1$. L'orlato $\det A(1,1;1,1)$ del minore $\det A(1,1)$ è uguale a $1 \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 2$. Calcoliamo l'orlato

$$\det A(1,2,3;1,2,3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si può, per esempio, applicare la regola di Laplace alla prima riga e si trova

$$\det A(1,2,3;1,2,3) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Perciò $\operatorname{rk} A \geq 3$. Resta da calcolare

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando la regola di Laplace alla prima riga, otteniamo

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

può essere calcolato, per esempio, mediante la regola di Sarrus e si ottiene

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente,

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Sicché

$$\det A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Concludiamo che $\operatorname{rk} A = 3$ e le colonne 1, 2 e 3 (rispettivamente le righe 1, 2, 3) sono un insieme massimale di colonne (rispettivamente righe) indipendenti. Similmente $\operatorname{rk} B \geq 3$. Per calcolarlo mediante il teorema degli orlati è sufficiente calcolare il minore

$$\det B(1,2,3,4;1,2,3,5) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo nuovamente la regola di Laplace alla prima riga ottenendo

$$\begin{aligned} &\det B(1,2,3,4;1,2,3,5) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(4-2) + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

In cui, per calcolare il determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo applicato la regola di Laplace all'ultima riga, mentre il determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

era stato già calcolato. Allora, $\operatorname{rk} B = 4 \neq \operatorname{rk} A$ e dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema S è incompatibile.

Siano ora A_1 e B_1 rispettivamente la matrice incompleta e la matrice completa del sistema S_1. Dunque

$$A_1 = A(1,2,3;1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$B_1 = B(1,2,3;1,2,3,4,5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Giacchè le righe 1, 2 e 3 della matrice A sono indipendenti, $\operatorname{rk} A_1 = 3$. Analogamente $\operatorname{rk} B_1 = 3 = \operatorname{rk} A_1$ sicché il sistema S_1 è compatibile.

1) Il sistema S_1 ammette ∞^N soluzioni in cui $N = \sharp\{\text{incognite}\} - \operatorname{rk} A_1 = 4 - 3 = 1$.

3) Il sistema S_1 è ridotto e può essere risolto, per esempio, mediante il metodo di eliminazione di Gauss. Riduciamo la matrice B_1 a gradini. Sottraiamo all'ultima riga di B_1 la prima moltiplicata per 2:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Abbiamo effettuato su B_1 la trasformazione elementare di prima specie

$$B_1 \longrightarrow B_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Resta da aggiungere all'ultima riga di B_1' la seconda:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque

$$B_1 \longrightarrow B_1' \longrightarrow B_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è a gradini. Il sistema S_1 è perciò equivalente al sistema a gradini

$$S_1'' : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & & -x_4 & = & 1 \\ & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & = & -2 \\ & & -\frac{1}{2}x_3 & & = & 0 \end{array} \right. .$$

I pivot di B_1'' sono gli elementi di posto $(1,1)$, $(2,2)$ e $(3,3)$ che corrispondono alle incognite x_1, x_2 e x_3 rispettivamente. La rimanente incognita x_4 gioca il ruolo di parametro e "può essere portata a destra dei segni di =". Si trova così

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 1 + x_4 \\ & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & = & -2 + \frac{3}{2}x_4 \\ & & -\frac{1}{2}x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Dall'ultima equazione si trova

$$x_3 = 0$$

che, sostituita nella seconda equazione, dà

$$x_2 = -2 + \frac{3}{2}x_4.$$

Riassumendo

$$\mathrm{Sol}(S_1) = \mathrm{Sol}(S_1'') = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ -2+\frac{3}{2}t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^5.$$

Esercizio 2. La matrice rappresentativa dell'endomorfismo f nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ è

$$A_f := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -4 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è perciò:

$$P_f(t) = P_{A_f}(t) = \det(A_f - t\, I_4) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-t & 2 & -4 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2}-t & -3 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -t & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1-t \end{pmatrix}.$$

Applichiamo la regola di Laplace alla terza riga:

$$P_f(t) = -\frac{3}{2}\det \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ \frac{3}{2}-t & -3 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1-t \end{pmatrix} - t\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-t & 2 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2}-t & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1-t \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ \frac{3}{2}-t & -3 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1-t \end{pmatrix}$$

applichiamo la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ \frac{3}{2}-t & -3 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1-t \end{pmatrix} \\ &= 6(1+t) + 6 + 4\left(\tfrac{3}{2}-t\right) - 6 - 6 - 4(1+t)\left(\tfrac{3}{2}-t\right) \\ &= 4t^2. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-t & 2 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2}-t & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1-t \end{pmatrix} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}+t\right)\left(\tfrac{3}{2}-t\right)(1+t) - 6 + 4\left(\tfrac{3}{2}-t\right) - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}+t\right) \\ &= -t^3 - \tfrac{15}{4}t. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} P_f(t) &= -\tfrac{3}{2}4t^2 - t\left(-t^3 - \tfrac{15}{4}t\right) \\ &= t^2\left(t^2 - \tfrac{9}{4}\right) = t^2\left(t+\tfrac{3}{2}\right)\left(t-\tfrac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Concludiamo che $P_f(t)$ ha 3 radici reali, 0, $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$, di molteplicità 2, 1 e 1 rispettivamente. Dunque gli autovalori di f sono $\lambda_0 := 0$, $\lambda_1 := -\frac{3}{2}$ e $\lambda_2 := \frac{3}{2}$ e hanno molteplicità algebriche a_0, a_1 e a_2 pari a 2, 1 e 1 rispettivamente. In particolare $a_0 + a_1 + a_2 = 4$ e per verificare la diagonalizzabilità di f è sufficiente verificare che le molteplicità geometriche g_0, g_1 e g_2 di λ_0, λ_1 e λ_2 siano uguali ad $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ rispettivamente. La molteplicità geometrica di λ_0 è pari a

$$g_0 = 4 - \mathrm{rk}(A_f - \lambda_0\, I_4) = 4 - \mathrm{rk}(A_f).$$

Calcoliamo $\mathrm{rk}(A_f)$ mediante il teorema degli orlati. Consideriamo, innanzitutto, il minore

$$\det A_f(1,2;1,2) = -3/4 \neq 0$$

. Sicché $\mathrm{rk}(A_f) \geq 2$. Ora, la terza e la quarta colonna di A_f sono proporzionali alla seconda per cui $\mathrm{rk}(A_f) = 2$ e $g_0 = 4 - 2 = 2 = a_0$.

La molteplicità geometrica g_1 di λ_1 è almeno 1 per definizione di autovalore. D'altrocanto $g_1 \leq a_1 = 1$. Perciò $g_1 = 1 = a_1$. Similmente $g_2 = 1 = a_2$. L'endomorfismo f è dunque diagonalizzabile per il teorema spettrale.

Una base diagonalizzante di f è una base di autovettori di A. Per determinarla, determiniamo prima una base per l'autospazio A_0 relativo all'autovalore λ_0. A_0 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_0 la cui matrice incompleta è $A_f - \lambda_0\, I_4 = A_f$ e cioè

$$S_0 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} -\frac{1}{2}x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & \frac{3}{2}x_2 & -3x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 & & & & = & 0 \\ -x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Dalla terza equazione ricaviamo $x_1 = 0$. Le rimanenti incognite possono allora calcolarsi risolvendo il sistema

$$S_0' : \left\{ \begin{array}{cccccc} 2x_2 & -4x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ \frac{3}{2}x_2 & -3x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ora, è evidente che S_0' è equivalente al sistema

$$S_0'' : \{2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \ ,$$

da cui

$$x_2 = 2x_3 - 2x_4.$$

Concludiamo che

$$A_0 = \mathrm{Sol}(S_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Una base per A_0 si può determinare sostituendo, nell'espressione per il generico elemento, ai parametri s, t i valori $1, 0$, e poi $0, 1$. Troviamo così che una base per A_0 è il sistema

$$\mathcal{B}_0 := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Determiniamo in modo analogo una base per l'autospazio A_1 relativo all'autovalore λ_1. A_1 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_1 la cui matrice incompleta è

$$A_f - \lambda_1 I_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} & 2 & -4 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2}+\frac{3}{2} & -3 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e cioè

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & 3x_2 & -3x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 & & +\frac{3}{2}x_3 & & = & 0 \\ -x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

S_1 può essere risolto, per esempio, con il metodo di eliminazione di Gauss. Riduciamo allora $A_f - \lambda_1 I_4$ a gradini. A questo scopo, aggiungiamo alla terza riga di $A_f - \lambda_1 I_4$ la prima moltiplicata per $\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -\frac{9}{2} & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente aggiungiamo alla quarta riga di $A_f - \lambda_1 I_4$ la prima:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fin qui abbiamo effettuato la trasformazione

$$A_f - \lambda_1 I_4 \longrightarrow B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -\frac{9}{2} & 6 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Ora sottraiamo alla terza riga la seconda e alla quarta la seconda moltiplicata per $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 3 & -\frac{9}{2} & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque

$$A_f - \lambda_1 I_4 \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_1' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow B_1'' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è a gradini. Concludiamo che S_1 è equivalente al sistema omogeneo (ridotto) T_1'' la cui matrice incompleta è $B_1''(1,2,3;1,2,3,4)$ e cioè

$$T_1'' : \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & 3x_2 & -3x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ & & -\frac{3}{2}x_3 & +3x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

B_1'' è una matrice a gradini i cui pivot sono gli elementi di posto 11, 22, 33 che corrispondono alle incognite x_1, x_2 e x_3. La rimanente incognita x_4 gioca il ruolo di parametro e "può essere portata a destra dei segni di =" ottenendo:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -4x_3 & = & -4x_4 \\ & 3x_2 & -3x_3 & = & -3x_4 \\ & & -\frac{3}{2}x_3 & = & -3x_4 \end{cases} .$$

Dalla terza equazione si ricava

$$x_3 = 2x_4,$$

che, sostituita nella seconda equazione dà,

$$3x_2 = 6x_4 - 3x_4 = 3x_4 \Longrightarrow x_2 = x_4.$$

Sostituendo nella prima equazione troviamo

$$x_1 = -2x_4 + 8x_4 - 4x_4 = 2x_4.$$

Dunque

$$A_1 = \mathrm{Sol}(S_1) = \mathrm{Sol}(T_1'') = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

e una base di A_1 si può determinare sostituendo, nell'espressione per il generico elemento, al parametro 2 il valore 1. Troviamo così che una base per A_1 è il sistema che consiste di un solo elemento

$$\mathcal{B}_1 := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Determiniamo infine una base per l'autospazio A_2 relativo all'autovalore λ_2. A_2 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_1 la cui matrice incompleta è

$$\begin{aligned} A_f - \lambda_2\, I_4 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} & 2 & -4 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} - \frac{3}{2} & -3 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 - \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e cioè

$$S_2 : \begin{cases} -2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & & -3x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 & & -\frac{3}{2}x_3 & & = & 0 \\ -x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & -\frac{5}{2}x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

Sappiamo che $\mathrm{rk}(A_f - \lambda_2 I_4) = 4 - g_2 = 3$. D'altrocanto il minore

$$\begin{aligned} \det((A_f - \lambda_2 I_4)(1,2,3;1,2,3)) &= \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= 3 \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= 9 \neq 0, \end{aligned}$$

come si trova facilmente applicando la regola di Laplace alla seconda riga. Dunque S_2 è equivalente al sistema ridotto

$$S_2'' : \begin{cases} -2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & & -3x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 & & -\frac{3}{2}x_3 & & = & 0 \end{cases} ,$$

d'altrocanto, sempre dall'osservazione di cui sopra, si ricava che l'incognita x_4 gioca il ruolo di parametro e "può essere portata a destra del segno di =" trovando

$$\begin{cases} -2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & = & -4x_4 \\ & & -3x_3 & = & -3x_4 \\ -\frac{3}{2}x_1 & & -\frac{3}{2}x_3 & = & 0 \end{cases} ,$$

che può essere risolto, per esempio, con il metodo di Cramer. La matrice dei coefficienti da invertire è

$$C := (A_f - \lambda_2 I_4)(1,2,3;1,2,3) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

il cui determinante, come abbiamo già calcolato è 9. la matrice reciproca di C si calcola facilmente ed è

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{2} & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sicché

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}(C^*)^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ \frac{9}{2} & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} .$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= C^{-1}\begin{pmatrix} -4x_4 \\ -3x_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4x_4 \\ -3x_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dunque

$$A_2 = \mathrm{Sol}(S_2) = \mathrm{Sol}(S_2'') = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

e una base di A_2 si può determinare sostituendo, nell'espressione per il generico elemento, al parametro t il valore 1. Troviamo così che una base per A_2 è il sistema che consiste di un solo elemento

$$\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Concludendo il sistema

$$\mathcal{B} := \text{“}\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2\text{”} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base diagonalizzante per f.

Esercizio 3 (facoltativo). Siano $v, w \in V$ e $\beta \in \mathbb{K}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(v + w) &= f_1(v + w) + f_2(v + w) \\ &= f_1(v) + f_1(w) + f_2(v) + f_2(w) \\ &= f_1(v) + f_2(v) + f_1(w) + f_2(w) \\ &= (f_1 + f_2)(v) + (f_1 + f_2)(w),\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato la linearità di f_1 e f_2. Similmente,

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(\beta v) &= f_1(\beta v) + f_2(\beta v) \\ &= \beta f_1(v) + \beta f_2(v) \\ &= \beta(f_1(v) + f_2(v)) \\ &= \beta(f_1 + f_2)(v),\end{aligned}$$

in cui, di nuovo, abbiamo usato la linearità di f_1 e f_2. Dunque $f_1 + f_2$ è lineare.